

宇宙惑星科学

牧野淳一郎

惑星学専攻

評価等

- 小テスト (初回はなし) (レポートはなし)

講義概要

1. ビッグバン宇宙論: 2コマ分くらい
2. 天体形成 (主に銀河): 2コマ分くらい
3. 星形成・進化、惑星形成: 3コマ分くらい

講義の目的

- 惑星形成を、宇宙における階層的構造形成全体の中で理解する
- 同時に、惑星形成研究を天文学・天体物理学研究の中で位置付ける
- そのために宇宙の始まり、銀河等の天体形成、星形成、惑星形成の順にトップダウンで話を進める

ビッグバン宇宙論

- 宇宙論の歴史
- 現在の描像
- 残っている問題
 - インフレーション
 - ダークマター
 - ダークエネルギー

天体形成

- 大規模構造・重力不安定 (ジーンズ不安定)
- 重力熱力学的不安定
- 円盤構造、軸対称不安定、スパイラルモード
- 銀河形成
- 銀河と太陽

星形成と惑星形成

- 星形成
 - 星形成を考えるいくつかの立場
 - 初代星
- 恒星進化
 - 星の一生
 - 中性子星・ブラックホール・重力波
- 惑星形成の標準ないし京都/林モデル
 - minimum solar nebula model
 - シナリオ紹介
 - 理論的問題
 - わかっていないこと

事務連絡

今日は講義のおわりに小テストはありません。前回の提出者の学生番号のリストは Web にあるので、もしも自分はだしたはずなのに番号ない、という人は牧野まで。講義のあとでもメール (jmakino -at- people...) でも。

マイクロ波バックグラウンドの観測

- 1964年、ベル研のペンジアスとウィルソン、電波天文学のための電波望遠鏡を作っていた
- 謎な雑音がどうしても消えなかった。
- ちょうどそのころ、プリンストン大学(ベル研と同じニュージャージー州)のディッケ、ピーブルスといった人達が、全く独立にビッグバンからの電波の観測計画をたてようとしていた。
- ペンジアスの友人がピーブルスの論文のプレプリントをみていて、関係あるのでは?といたので、ペンジアスらはディッケらにコンタクトして相談し、「同時に」「別々に」*Astrophysical Journal* にレター論文をだした。
(1965)

マイクロ波バックグラウンドの観測

- 1978年にペンジァスとウィルソンはノーベル賞もらった。ディッケ、ピーブルスは、、、
- ピーブルスは 2019年(今年)ノーベル賞。

マイクロ波精密観測

これだけからやたら色々なものが精密に決まる。

Ω : 物質・エネルギーの密度 (物質だけの場合、放物線

解: $\Omega = 1$

Ω_Λ : 物質以外のエネルギーの密度

Ω_b : 物質 (宇宙物理では「バリオン」という) 密度

ダークマターの密度

宇宙年齢

密度ゆらぎの大きさ

密度ゆらぎのスケール依存性 (べき指数)

というわけで、現在の理解をもう一度

- 物質＋ダークエネルギーで「平坦」
- ダークエネルギーは重力とは逆に働いて、空間を膨張させる。遠い未来には指数関数的に膨張
- つまり、宇宙初期のとは違うけれど、現在の宇宙も「インフレーション」的な膨張過程にある
- 「ダークエネルギー」は、全く正体不明。ほぼ名前つけただけ

最近の考え方

- 宇宙の「始まり」を考えなくても、そこらじゅうでインフレーションしていると思えばいい。
- 何故かインフレーションが止まったところで色々な「宇宙」ができる。
- (これはある意味ビッグバンから定常宇宙にもどっている気も)

では「物質」のほうは？

- 観測の示唆: ダークエネルギー+物質 = 「1」
(臨界密度に等しい、ということ)
- ダークエネルギー: 68.3%, 「ダークマター」: 26.8%, 普通の物質: 4.9%
- 普通の物質: 陽子、電子、中性子からなる普通の元素。それぞれクォークからできている。
- ダークマター: 普通の物質「ではない」なにか。現在の宇宙ではほぼ重力しか働いていない

話がちょっともどってダークマター

- 1970年代になると、宇宙にある物質は通常のバリオン、つまり、普通の原子を作っている陽子・中性子と電子だけではないらしいということが明らかになってきた。
- 大きな理由:円盤銀河(我々の銀河系のような渦巻銀河)があること、その回転曲線(回転速度を中心からの距離の関数として書いたもの)
- 銀河系外の円盤銀河のガスを電波で観測することで、その回転速度の半径方向の分布を求めることができる。
- 多くの銀河で、回転速度がかなり外側までほぼ一定で、なかなか小さくならない、ということがわかってきた
- 見えている星の明るさから、質量を推定して回転曲線を作ったものとはあわない。

- また、円盤銀河は、見えている星だけだとすると円盤が不安定で、薄い円盤銀河は存在できない(これはあとでもうちょっと詳しく)

円盤銀河とダークマター

- 普通の物質とは違う、重力以外ではほとんど相互作用しない物質が実は宇宙の物質の大半を占めると「仮定」する。
- そうすると、そういう物質は、バリオンと違って重力で集まっても薄い円盤にならない。球状の形をとる
- みえている銀河は薄い円盤だが、実はそれはダークマターがほぼ球状に分布しているものの底に沈んでいるものだということになる。
- 回転曲線の問題も安定性の問題も解消

こんな都合のいいものが本当にあるのか？

- わかっている (と思っている、、、) ことは、重力以外では相互作用していない、ということだけ
- あらゆる可能性が検討された:太陽質量の100万倍程度のブラックホールからニュートリノまで
- 現在のところ一番もっともらしい:未知の素粒子で比較的質量が大きいもの

何故他は駄目か

- ニュートリノは相互作用が非常に弱く、また質量があることはほぼ確定した(2015年ノーベル物理学賞)
- もしもダークマターの大半がニュートリノだとすると、宇宙初期のゆらぎのうち銀河団くらいの大きさより小さいものは、ニュートリノの運動によってならされて、消えてしまうこと
- つまり、銀河が存在していないはず。
- なので、もっと重い素粒子でないといけない。(一部はニュートリノというのは最近流行のきざし)

コールドダークマター

というわけで

- ダークマターは重い素粒子であるというのが現在の支配的理論
- 銀河団より大きなスケールでは大きいほどゆらぎの振幅が小さく、それより小さなスケールでは漸近的に一定となる。
- この一定値は無限に続くわけではなく、ダークマター粒子の質量に関係した限界のところではならされる。(地球質量くらい)

これをCDM(コールドダークマター)モデルという。CDMモデルは、銀河団や銀河の空間分布、質量分布を非常に良く

再現できることが知られている。

ダークマター探査

2つの方針:

- 直接検出: 検出器を通り抜けるダークマター粒子が普通の物質とぶつかり、はね飛ばすのを検出 (日本の XMASS、アメリカの CDMS-II など) CDMS-II は「発見したかも」と数年前に発表したが???
- 間接検出: 宇宙の中でダークマター粒子が集まっているところでの対消滅からでてくるなにか (γ 線? 電子? 陽電子?) を人工衛星で観測 (Fermi 望遠鏡の天体の中にないか? AMS 実験:ISS 上で反粒子を観測) AMS も「発見したかも」と数年前に発表したか???

もちろんまだ見えてないので、どこにどれだけあるのかよくわからない

宇宙の始まりから今まで

をもう一度簡単にまとめておく

- 宇宙初期には非常に高温・高密度であり、普通の元素はまだ存在していなくて全てがクォークである状態があったはずである(クォーク・グルーオンプラズマ)
- ある程度膨張が進むと、普通の陽子、中性子、電子になる
- さらに膨張が進み、温度、密度が下がると、陽子、中性子の集合状態から原子核に分かれる。この過程を元素合成という
- さらに膨張し、温度が下がると、それまで電離していた陽子(水素原子イオン)と電子が結合する(宇宙の晴れあがり)

- このあと、重力不安定によりダークマターやバリオン (普通の物質) が集まって天体が形成され、それらからの放射によって水素原子がもう一度電離する (宇宙の再電離)

どこまで信用できるか？

- 現在の標準的な理解が確立したのは、比較的最近のこと
- ビッグバンの確実な証拠とされるマイクロ波背景放射が発見されたのは1960年代
- インフレーションモデルの提案は1980年代
- 新星の観測結果からダークエネルギーが必要という理解が標準的になったのは2000年代にはいつてから
- 現在の標準的理解はまだ15年ほどの歴史しかない。

どこまで信用できるか？

- ビッグバンがあって、宇宙の始まりがある、という仮説については、近年あまり疑う余地はなくなってきたかに見える。
- 上に述べたマイクロ波背景放射は重要だが、他の傍証の一つとして、遠方(赤方偏移大)の銀河は形態も数も質量も我々の近傍と大きく違う、というのがサーベイ観測でわかってきた、ということがある。
- 仮にビッグバンがなく、宇宙が無限の過去から定常であるなら、見える範囲の過去で銀河の形態等が大きく変わる、ということは考えにくい。
- 他の細かいこと、ダークマターやダークエネルギーについてはまだガラガラ変わるかもしれない

天体形成

- とりあえず見た目を
- 重力(だけ)による天体形成

とりあえず見た目を

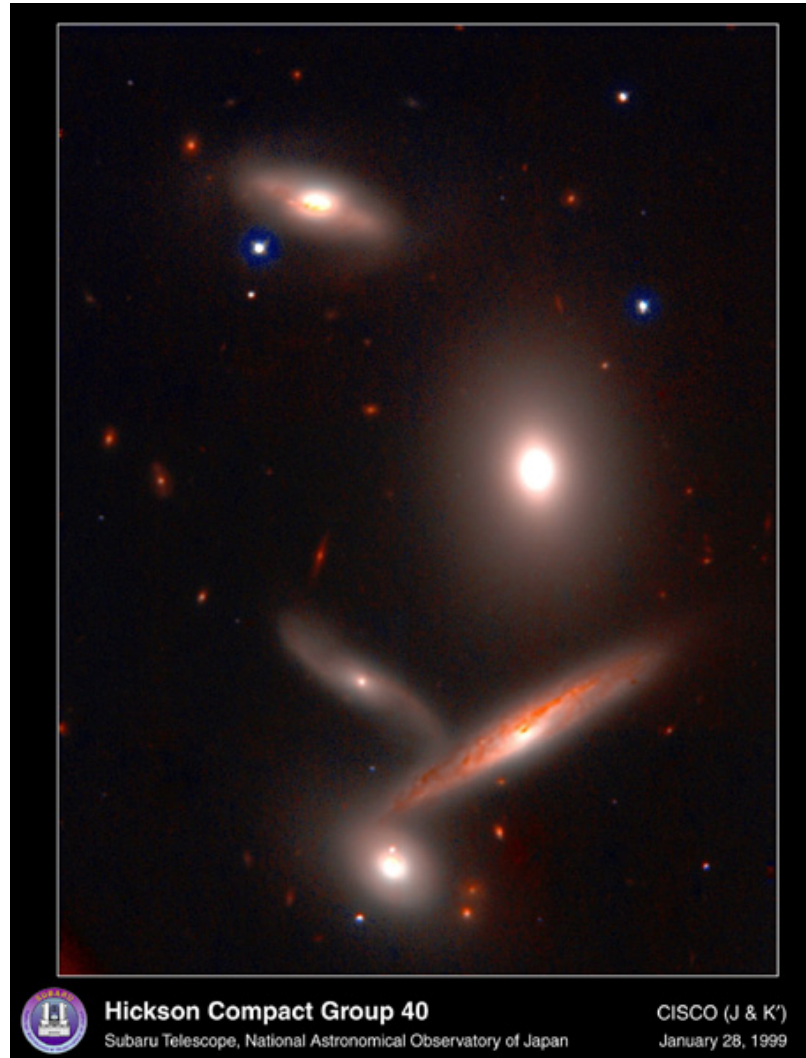
銀河



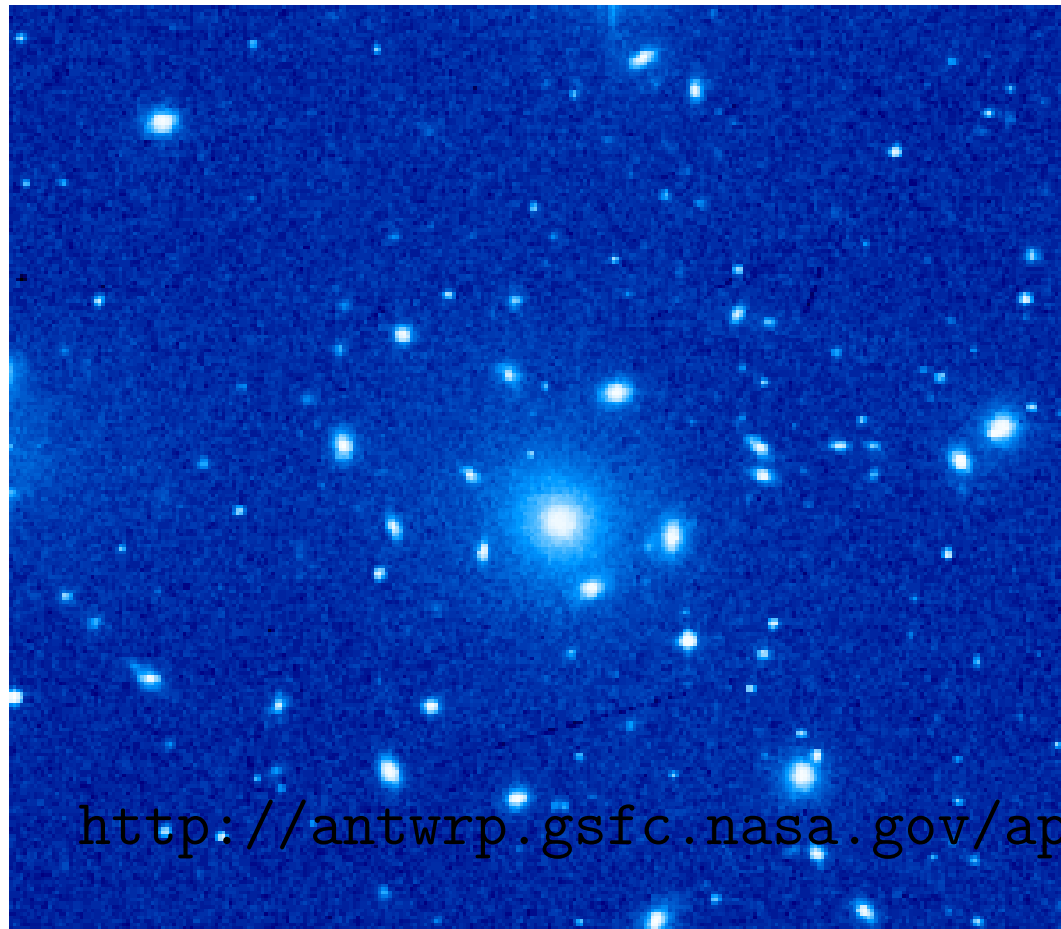
球状星団



銀河群

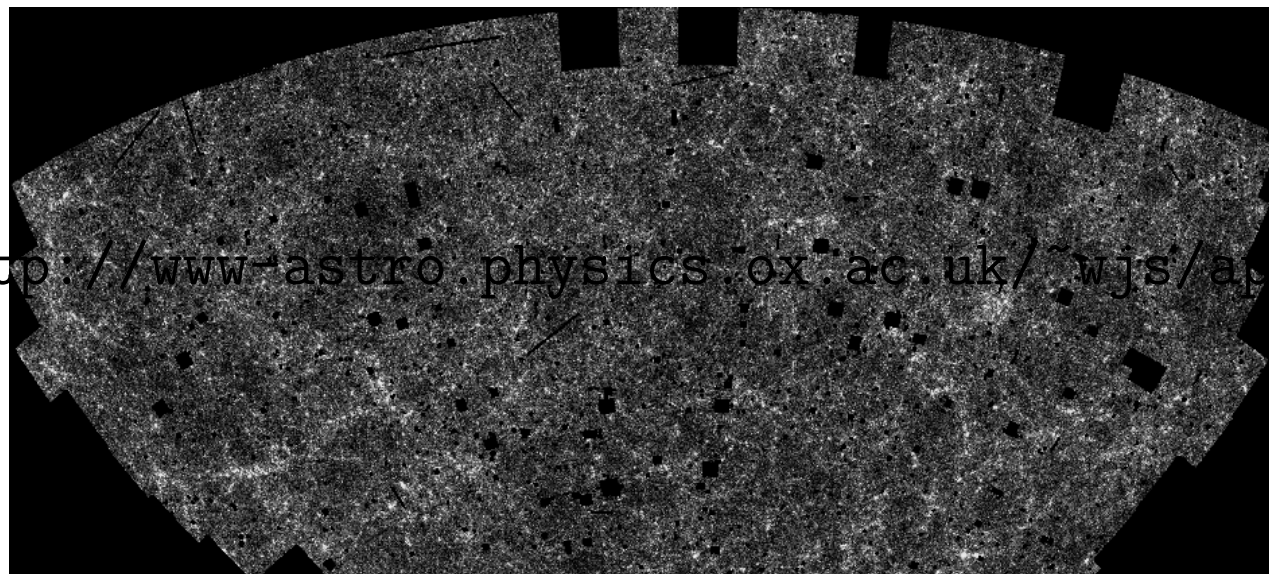


銀河団



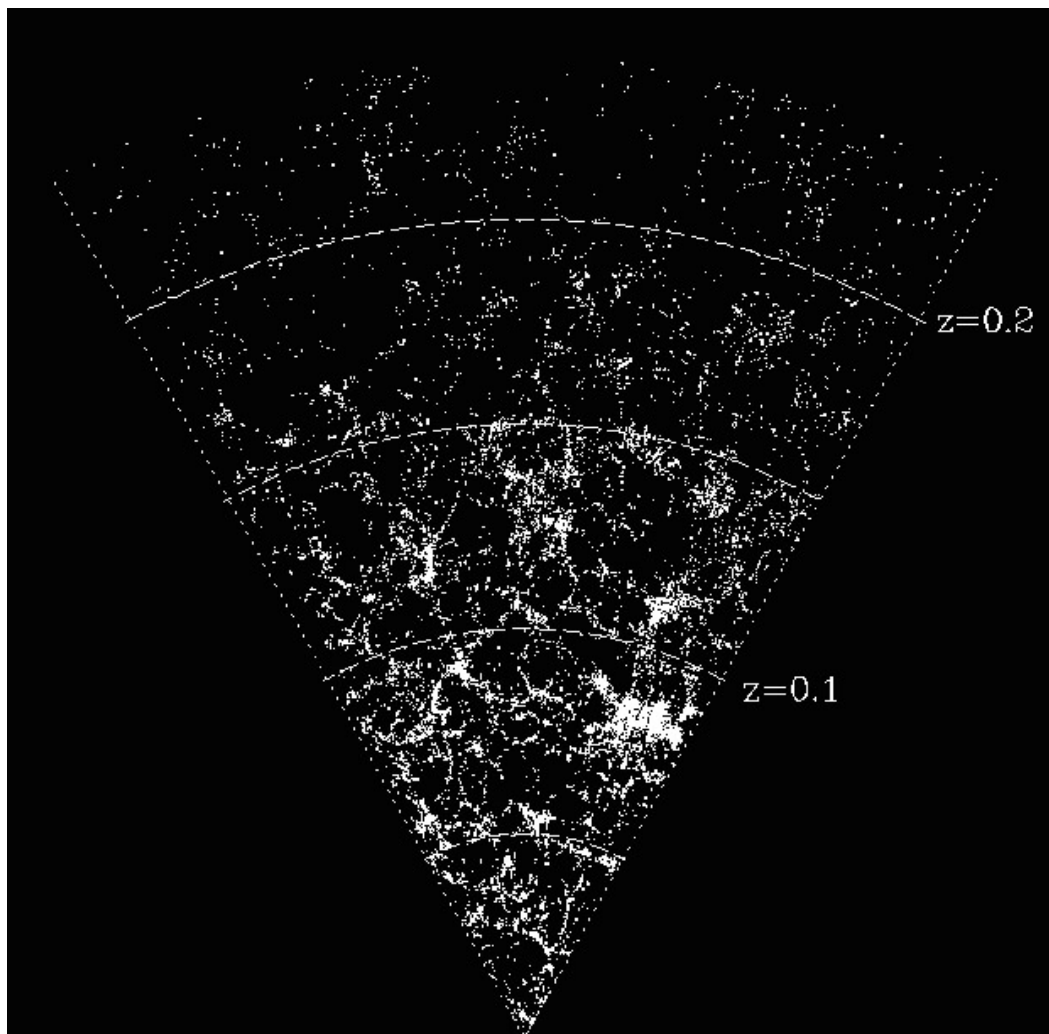
<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html>

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



支配方程式:

太陽系、星団、銀河、銀河団、宇宙の大規模構造などの基本方程式

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j r_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- それぞれの星（あるいは惑星）を一つの「粒子」と思った時に、ある粒子は他のすべての粒子からの重力を受ける。位置、質量: r_i, m_i 、重力定数: G
- 大抵の場合に相対論的効果は考えなくていい（速度が光速にくらべてずっと小さい）

重力多体系の基本的性質

惑星や星と、それ以上の大きさの構造の基本的な違い：

圧力が重力とつりあっているわけではない

では、どうして潰れてしまわないか？

— Newton 以来の疑問。

- 太陽系
- 銀河
- 宇宙全体

太陽系の場合

太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からののに比べて 3 桁程度小さい（木星の質量は太陽のほぼ 0.1%）。従って

ケプラー問題＋摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか？（惑星の軌道は本当に安定か？）というのは現在でもまだ完全に解決されていない大問題。

古典的な（19世紀くらいの）理解

「ラプラスが太陽系の安定性を証明した」

これは摂動展開したという話。

- ラプラスの頃にはまだ無限級数の収束条件はそもそも知られていなかった
- 摂動展開すればいいというものではないということをポアンカレが示した
- 冥王星、海王星などの新しい惑星がみつかった
- 単純な力学系でも「カオス」になるということがわかってきた

近代的な（20世紀後半の）理解

20世紀後半には太陽系が本当に安定かどうか？というのは、

「なんだかよくわからない問題」

に戻ってしまった。

用語の整理

安定: 太陽系だと、要するに惑星がどっかにとんでいってしまったり、2つがぶつかるとか太陽に落ちるとかそういった大きな変化はないということを定義にする。

可積分: 任意の初期条件で解析的な解が求まる。(多重) 周期的なので、フーリエ級数で書ける

用語の整理 (続き)

カオス的 これも定義はかならずしもはっきりしない。可積分なものはカオス的ではないが、一般には可積分かどうかわかるとは限らないし、可積分でなくてもある初期条件の範囲で安定な解が求まるような力学系もある。

ややこしい例

可積分ではないけれど安定な解がある古くて新しい問題：重力3体問題。

3個の質点がお互いの重力に引かれて運動する。

銀河、星団等のもっとも簡単なモデルともいえる。

(2体問題は可積分)

3体問題の性質

一般の3体問題は可積分ではない：ポアンカレによって「証明された」

が、これはどんな初期条件でも安定ではないというわけではない。

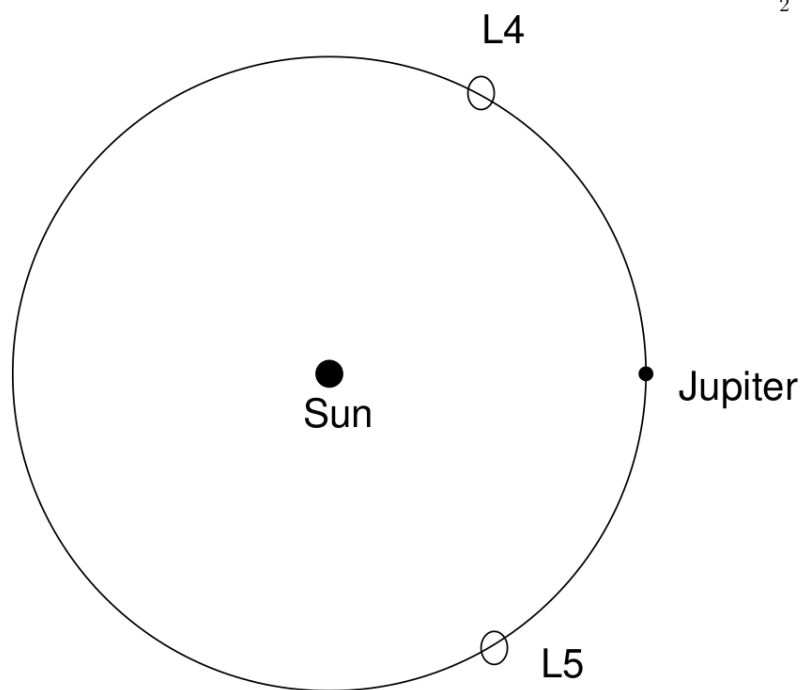
安定な解の例

ラグランジュ解（正3角形解）。

2,3 個めの質量が十分小さければ安定。

太陽・木星・トロヤ群の小惑星は実際にこのラグランジュ解を作っている。

（ラグランジュではなくてオイラーによって発見されたとか、、、）



ちょっと余談

20年くらい前に発見された新しい安定軌道 — Figure-8
Solution

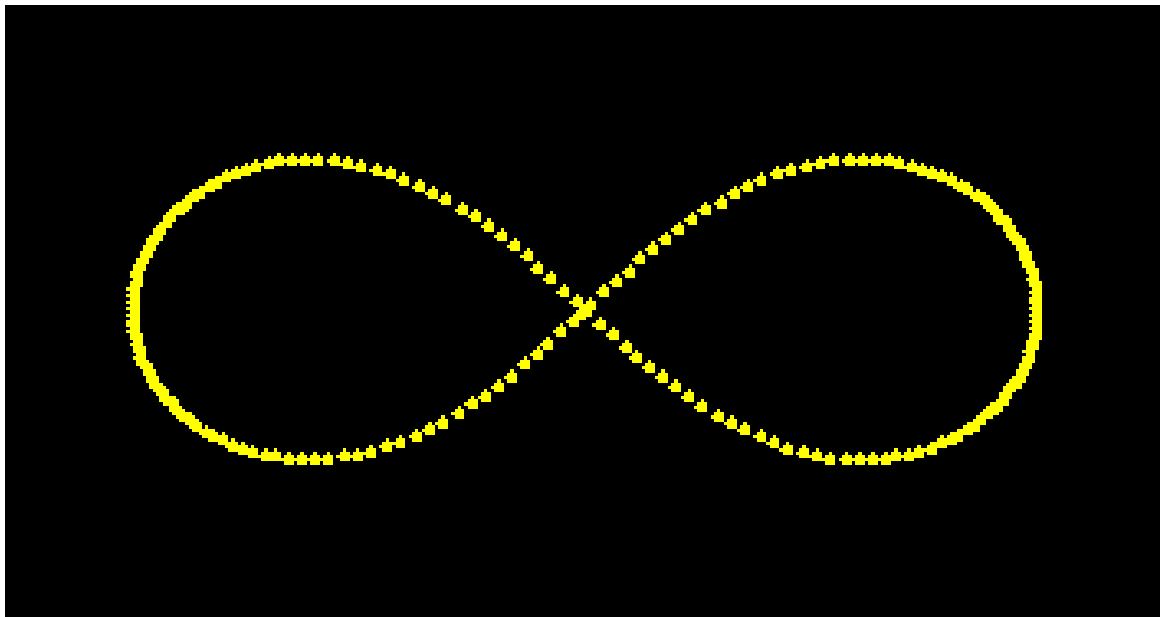


Figure-8 solution

- 3個の質量がほぼ等しい (0.005% 程度) の時にだけ安定 (らしい)
- 数値的に (計算機で) 周期軌道を見つける新しい方法が開発されて求まってきたもの。

太陽系の安定性について

結局、「計算機で長い間惑星の軌道を追いかけていって、どうなるか見る」のが唯一信用できる方法（信用できないとわかっていない方法）ということになった。

「計算機で軌道を追いかける」とはどういうことか？

計算機による軌道計算

ある運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad (1)$$

と初期条件

$$x(0) = x_0, \frac{dx}{dt}_{t=0} = v(0) = v_0 \quad (2)$$

が与えられたとして、そのあとの時間発展を計算機で求めること。

具体的な方法

基本的には、最初の位置（と速度）からちょっと後の時刻の位置を求めるというのを繰り返す。

もっとも基本的な方法：オイラー法

1変数で書くと

$dx/dt = f(x)$ に対して、

$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t))$ と近似するもの。

つまり、ある時刻での解のテイラー級数展開の1次の項までをとったもの

もっと効率の良い方法が一杯研究されている

で、安定性はどうなったかということ

と、こういうような、いろいろな方法が出てきたこと、計算機が速くなったこともあって、

太陽系の惑星の軌道は「安定ではない」

ということが 1987 年には示された

ここでの「安定ではない」の意味は：

「非常に近い初期条件の太陽系を 2 個つくってそれぞれ別に計算すると、それぞれでの惑星の位置の差が指数関数的にどんどん大きくなっていく」ということ

不安定のタイムスケール

大きくなるタイムスケール：リアプノフ時間といわれるもの。
軌道間の距離が e 倍になる時間。

求まったリアプノフ時間： 2千万年

これ自体は 8.5 億年の計算をして求まったもの。

太陽系はでは 45 億年間どうして存在を続けているのか？

さらに長い時間の計算（主に国立天文台の木下・中井・伊藤らによるもの）でわかったこと：

- 主な問題は冥王星
- リアプノフ時間は確かに 2 千万年 程度と短い
- だからといって惑星がどこかに飛んでいってしまうというようなことはおこらない（らしい）

つまり、軌道の安定性ということからみるとカオス的だが、だからといって全くなんでも起こるというわけではなくてある狭い範囲（どういう範囲かはよくわからない）に軌道が収まっている（らしい）

冥王星だけが問題か？

冥王星は2006年のIAU総会で「準惑星」に。だからいうわけでもないが、2009年にNatureにでた論文:

Vol 459 | 11 June 2009 | doi:10.1038/nature08096

nature

LETTERS

Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth

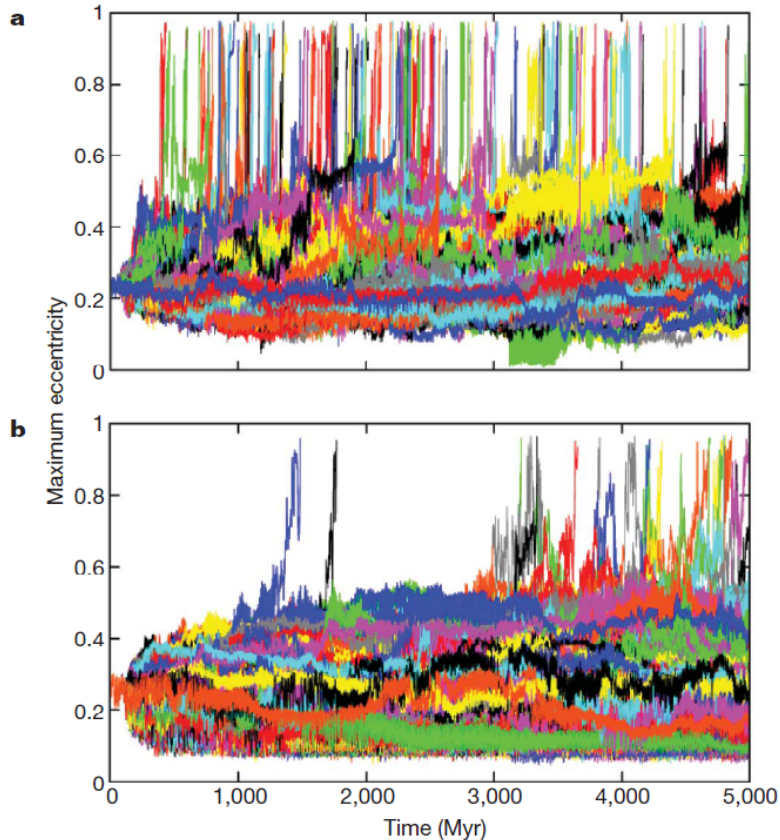
J. Laskar¹ & M. Gastineau¹

地球が水星や金星とぶつかる ???

Laskar and Gastineau 2009

- 水星の初期の位置をほんのちょっとだけ (0.38mm) づつ変えて、沢山の「太陽系」の進化を計算した
- 結構な数の「太陽系」で、水星の離心率が大きく上がって金星や地球とぶつかった
- 但し、一般相対論的効果をいれると、いれない場合より安定になった

本当に計算あってるのかどうかは？



結局のところ

そういうわけで安定かどうかはまだよくわかっていない。

色々な人が色々な方法で研究中。

系外惑星では変なものが一杯見つかったので、寿命が短い惑星系もあるのかも、、というのが段々一般的に。

以下、太陽系の話はしばらくおいて銀河とか星団の話に移る。

なにが問題か？

銀河とか星団とかはそもそもどうしてそこにあるのか？

それらは安定なのか？

どうやってできたのか？

というようなことが問題。

銀河等はどうやってできたか？

- 宇宙全体は一様に膨張しているとする、惑星とか、太陽とか、銀河はどうやってできたのか？
- 銀河は重力で星が集まっているだけなのにどうして潰れてしまわないのか？

という問題。

まず、どうしてそれら、とりあえず銀河とか、ができたのか？ということ。

重力不安定による揺らぎの成長

宇宙全体としては、(非常に大きなスケールでは) 一様で密度一定であるとしても、小さなスケールになると揺らぎのために一様からずれている。

宇宙が熱い火の玉から現在まで膨張する過程で、その揺らぎが自分自身の重力のために成長して、ものが集まってできるのが銀河とか銀河団ということになる。つまりは、ニュートンが最初に心配した、「星が落ちてくるのではないか」という問題に対する答は、「おちてきちゃってる」というもの。

では、銀河はどうやって形を保っているか？

宇宙はなにからできているか

(復習)

そのへんにある普通の物質：バリオン（陽子、中性子）＋電子でできている。

宇宙のバリオンのほとんどは水素原子のまま（ビッグバンの最初にヘリウムやリチウムが少しできて、あとは星のなか、特に超新星爆発の時にもっと重い元素が核反応で作られる）

ダークマター

見えるバリオンの量（星と、あとは電波や X 線でみえる水素ガスの量）：例えば銀河系の質量や、銀河団の質量のほんの一部でしかない。

銀河：回転曲線

銀河団：X線ガスの温度から質量を推定

- 重力の理論が間違っている？
- なんだかわからないものがある？

ダークマター

どちらが本当かというのは簡単にはいえないわけだが、今のところ「なんだかわからないものがある」というほうが主流。

これはいろいろな状況証拠があるが、（僕の意見としては）大きいのは重力理論が違うことにした時に、銀河毎に重力理論が違うというわけにはいかない（統一的な説明があるはず）とすると説明が難しいということ。

現在の宇宙に対する我々の基本的な理解とその「検証」

- 宇宙の物質のほとんどは、偉そうに言えば「未知の素粒子」、わかりやすくいえば**なんだかわからないもの**である。
- 宇宙は全体としては一様だが、揺らぎがあって完全に一様なわけではない。宇宙膨張の間にその揺らぎが成長して銀河とか銀河団ができてきた。

こういった理解が正しいかどうか：本当にこういうやり方で現在の宇宙の構造ができるかどうかを計算機シミュレーションで調べることである程度はチェックできる。

宇宙の大規模構造形成のシミュレーション

計算の 1 例（現在千葉大准教授・石山さん提供）

ここでやっていること：

- 基本的には「一様」な宇宙を、なるべく沢山の粒子で表現する
- 理論的に「こう」と思われる揺らぎを与える
- 理論的に「こう」と思われる初期の膨張速度を与える
- あとは各粒子の軌道を数値的に積分していく。基本的には太陽系の時と同じこと

わかること

- 宇宙全体としては膨張していく
- 最初に密度が高いところは、他に比べて相対的に密度がどんどん大きくなっていく。
- 特に密度が高いところは、そのうちに膨張しきって潰れ出す。
- （このシミュレーションでは）最初に小さいものが沢山できて、それらがだんだん集まって大きなものになる
- 大雑把にいうと、銀河とか銀河団はこのようにして潰れたもの。

宇宙論の問題としては：

- 観測される銀河や銀河団の性質、特に分布
- シミュレーションでできた銀河や銀河団の分布

を比べて、「どうすれば現在の宇宙ができるか」を決めることで、「宇宙の始まりはどうだったか」を逆に決めたい。

例えば宇宙の膨張速度、密度、宇宙項、初めの揺らぎの性質、ダークマターの性質

それは上手く決められる問題か？

つまり、、、

- 宇宙初期の揺らぎ：（銀河や銀河団になる細かいところまでは）直接には見えない
- 昔の宇宙の膨張速度：直接には見えない
- ダークマター：見えるかどうか（あるかどうか）わからない

これらを、全部同時に銀河の観測から決めたい。

そんなことは可能か？ という問題。

問題点

シミュレーションで出来るのは、本来はダークマターの分布だけ。

銀河になるにはそのなかでガスが収縮して星にならないといけない。

つまり、**どういう条件で星ができるかが決まらなると本当には比べられない**

- 銀河の数が変わる（合体するとか）
- 銀河の明るさが変わる（若い星があると明るい。古くなると暗くなる）

原理的には

- こういった問題点の解決: 「ガスが収縮して星になる」ところも全部シミュレーションすればいい
- そういう方向の研究ももちろん進められている
- が、まだ、シミュレーションの信頼性その他に問題が、、、

シミュレーションの例

話を戻して、、、

なぜ銀河は潰れないか？

太陽系 太陽が圧倒的に重い — 2 体問題 + 摂動

一般の 3 体問題：不安定

安定（最終）状態：2体の連星 + もう一つ（無限遠に飛ばされる）

銀河ではなにが起きるか？

銀河の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x, v)$ ：6次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x, v)dx dv$ がある「体積」 $dx dv$ の中の星の数を与えるとする。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (3)$$

ここで Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho. \quad (4)$$

ここで、 G は重力定数である。

分布関数の従う方程式（続き）

ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \quad (5)$$

である。

この書き換えは難しいことではないんだけど、「面倒臭い」ので導出はここでは省略。

力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがある
(一般にいつでもそうというわけではもちろんない)

これを「力学平衡状態」という。

銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態に行くのか？

はよくわからない。

なぜ力学平衡にいくのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態にいく。

(但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、)

前に見せた銀河形成のシミュレーションはその一例。

ジーンズ不安定

良く考えると、宇宙膨張と構造形成の関係はあんまり簡単ではない。

- ビッグバン直後の宇宙は熱平衡、一様密度
- 今の宇宙は全く一様ではない(少なくとも「小さな」スケールでは。メガパーセクとか)
- 理論的にはどうやって一様でなくなったか？

理解する枠組み: 重力不安定 (ジーンズ不安定)

ジーンズ不安定(続き)

- 「理論的」枠組み:大抵、摂動論(解けるものからの無限小のずれを扱う)
- ここでもそういう話
- で、ダークマター(無衝突ボルツマン方程式に従う)だと面倒なので断熱のガスで考える(あとで述べるが、安定性条件は同じになる)

流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6)$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (7)$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (8)$$

で記述される。

さらに状態方程式がある。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいい)

記号のリスト

ρ : 密度

t : 時間

v : 速度

p : 圧力

Φ : 重力ポテンシャル

G : 重力定数

線型化

- 平衡状態からの無限小のずれの変化を見るため、ベースの解とずれの部分にわけると
- ρ, p, v, Φ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好
- 添字 0 がつくものはもとの方程式の平衡解であり、1 がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）とする。

で、方程式を書き直す。

線型化した方程式

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (10)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (11)$$

$$p_1 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho_1 = v_s^2 \rho_1 \quad (12)$$

ここで v_s は音速である。

ベースが無限一様の場合

ベースは無限一様でいたるところ密度、圧力が等しく、速度も0とすると、連続の式とオイラー方程式が

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (14)$$

となる。下2本は見かけはかわらない。

これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \quad (15)$$

この方程式の振舞いは？

- 最初の2項をみれば普通の波動方程式、
- 最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。
- 波長が短い極限では普通の波動方程式
- 波長が長い極限では空間2階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

分散関係 (空間波長と時間振動数の関係) を求める

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\rho_1 = C e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (16)$$

として代入すれば

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (17)$$

ということになる。したがって、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \quad (18)$$

と書くことにする。

分散関係

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

なお、一応念のために書いておくと、式(16)の形の解だけを考えるのは任意の初期条件からの解が（連続性とかを仮定すれば）この形の解の線形結合で表現できるからである。解の線形結合が解であるのは方程式が線形だからであり、任意の解が表現できるのは要するにフーリエ変換が完全系をなすからである。

分散関係からいえること

- 波長が短ければ普通の音波
- 波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化
- つまり、長い波長のモードは密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）

いいかえると

- 十分に波長が長いと必ず不安定になる
- 重力があると無限に一様な状態というのは温度無限大でない限り必ず不安定

ジーンズ波長

k_J に対応する波長: ジーンズ波長 λ_J

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} v_s \quad (19)$$

ジーンズ波長くらい半径の球を考えると、

- 運動エネルギー: $M_J v_s^2$ の程度
- 重力エネルギーは GM_J/λ_J の程度、
- M_J はジーンズ質量で (半径 λ_J の球の質量)

計算すると、運動エネルギーと重力エネルギーが大体等しい。
ジーンズ波長はそういう長さ。

ここまでの解析でごまかしたところ

- 一様密度の物質があれば、ポアソン方程式の右辺が0じゃないから重力ポテンシャルは一様な値というのは何かおかしい
- が、一様で無限にひろがっているなら、重力ポテンシャルが場所によって違うのも何か変

宇宙全体の場合：宇宙膨張に対して不変な座標系（共動座標という）で方程式を書き換えるとこの問題は解消。但し、時間変換がはいるので、時間の指数関数的にはならない。

初期条件と力学平衡の状態の関係

あまり役に立つことはわかっていない。初期条件と最終状態の間関係をいろいろ調べている段階。

このへんは、基本的には前にいった数値計算でやられる。

- 1996 年頃に、宇宙論で考えるような初期条件の範囲内ではいろいろパラメータを変えてもできるものはみんな同じであるというシミュレーション結果が出た。
- が、この結果は実は間違いであったことが、より大規模なシミュレーションからわかった。

というわけで、わかっていない問題は非常に多い。