

惑星学要論  
宇宙の始まりから惑星形成まで

牧野淳一郎

神戸大学 惑星学専攻

# 事務連絡

- 講義資料は  
**<http://jun-makino.sakura.ne.jp/kougi/wakuseigaku-youron-2020/>** にあります。
- レポート課題をだします

# 講義概要

1. ビッグバン宇宙論: **1**コマ分くらい
2. 天体形成・進化 (主に銀河・星団): **2**コマ分くらい
3. 惑星形成: **1**コマ分くらい

# 講義の目的

- 惑星形成を、宇宙における階層的構造形成全体の中で理解する
- 同時に、惑星形成研究を天文学・天体物理学研究の中で位置付ける
- そのために宇宙の始まり、銀河等の天体形成、星形成、惑星形成の順にトップダウンで話を進める(星形成の話はあんまりしない)
- 天体の形成過程を支配する基本的な物理法則を理解する。

# ビッグバン宇宙論

- 宇宙論の歴史
- 現在の描像
- 残っている問題
  - インフレーション
  - ダークマター
  - ダークエネルギー

# 天体形成

- 恒星系力学の基礎
- 大規模構造・重力不安定 (ジーンズ不安定)
- 熱力学的緩和
- 重力熱力学的不安定
- 円盤構造、軸対称不安定、スパイラルモード
- 銀河形成
- 銀河と太陽

# 惑星形成

惑星形成の標準ないし京都/林モデル

- **minimum solar nebula model**
- シナリオ紹介
- 理論的問題
- わかっていないこと
- シミュレーションの諸問題

# 天体形成

- とりあえず見た目を
- 重力(だけ)による天体形成



# とりあえず見た目を

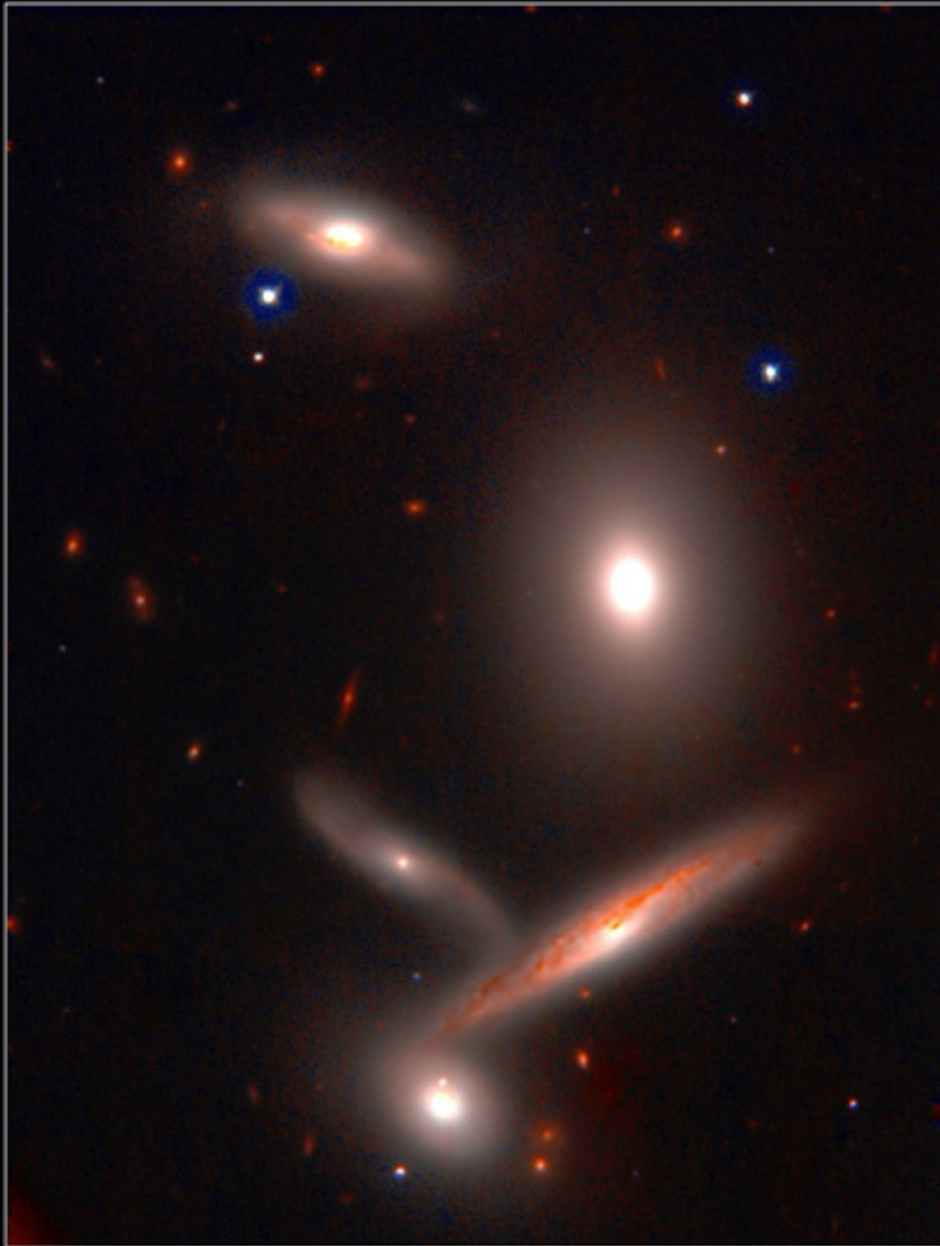
## 銀河



## 球状星団



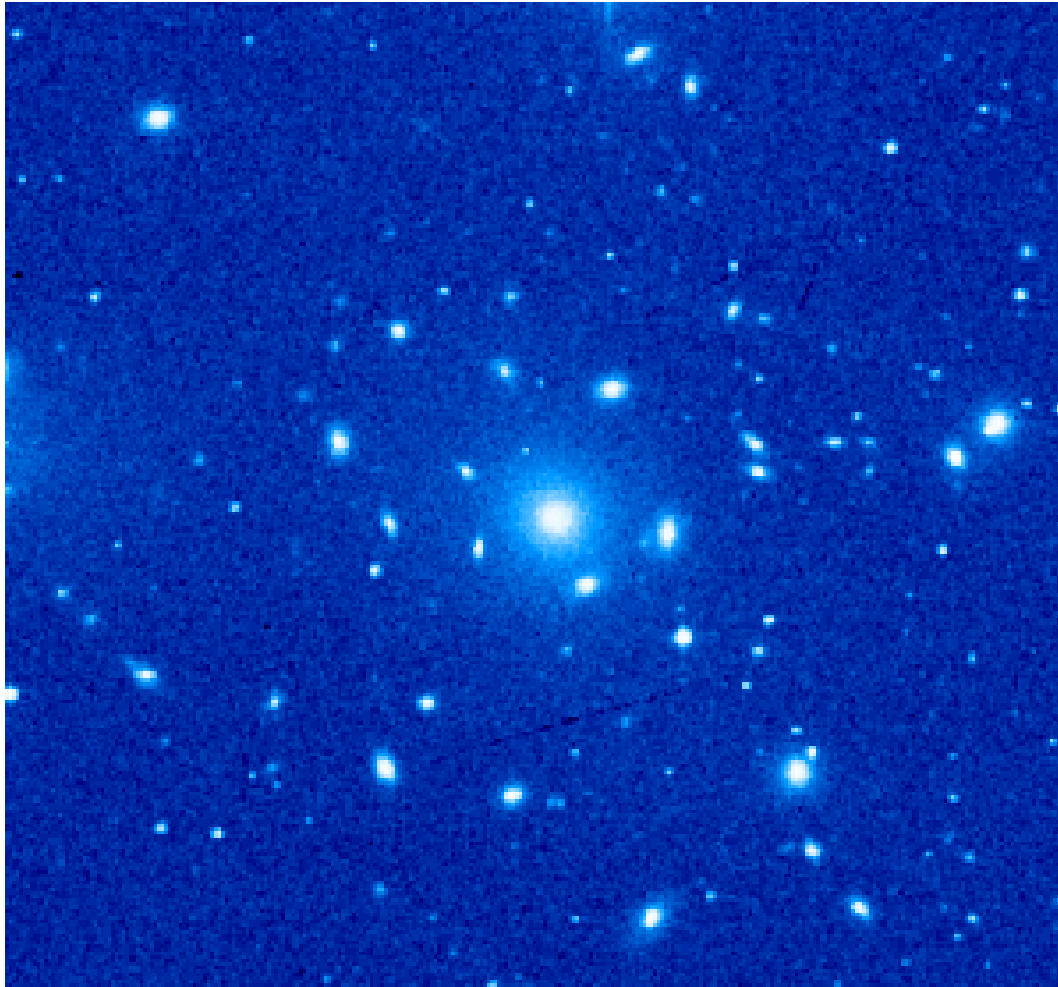
# 銀河群



Hickson Compact Group 40

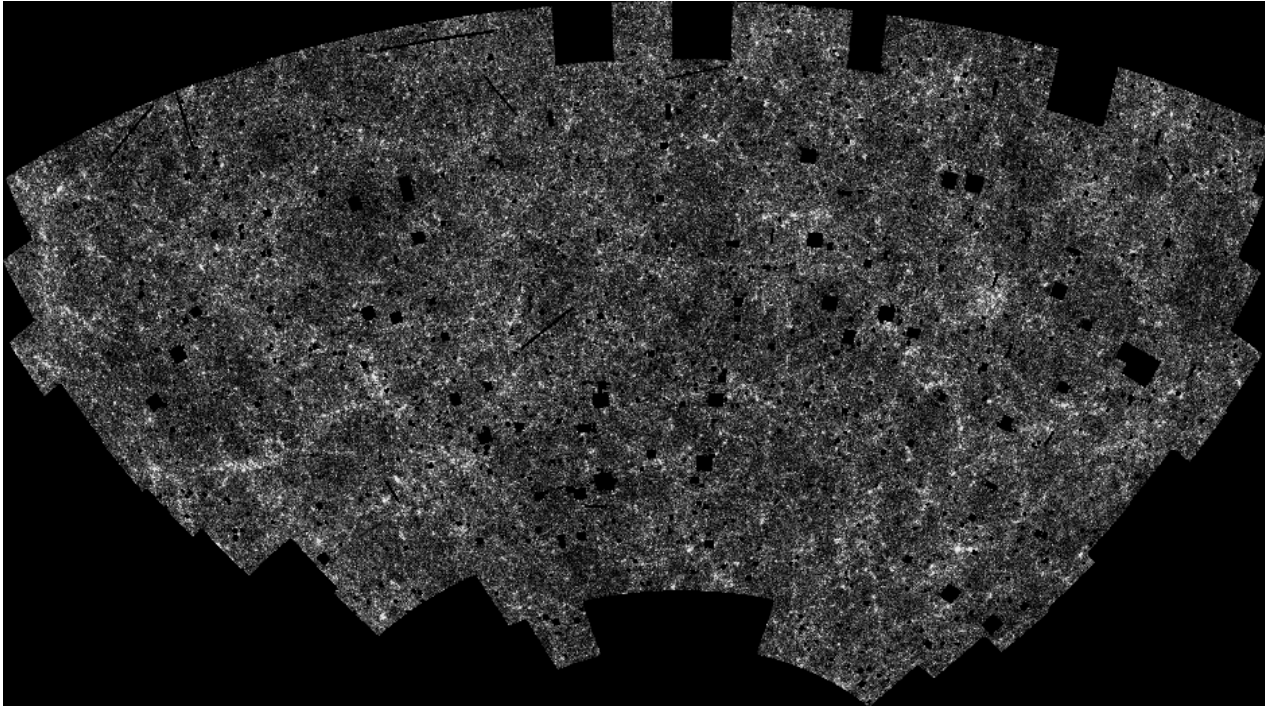
CISCO (J & K')

# 銀河団



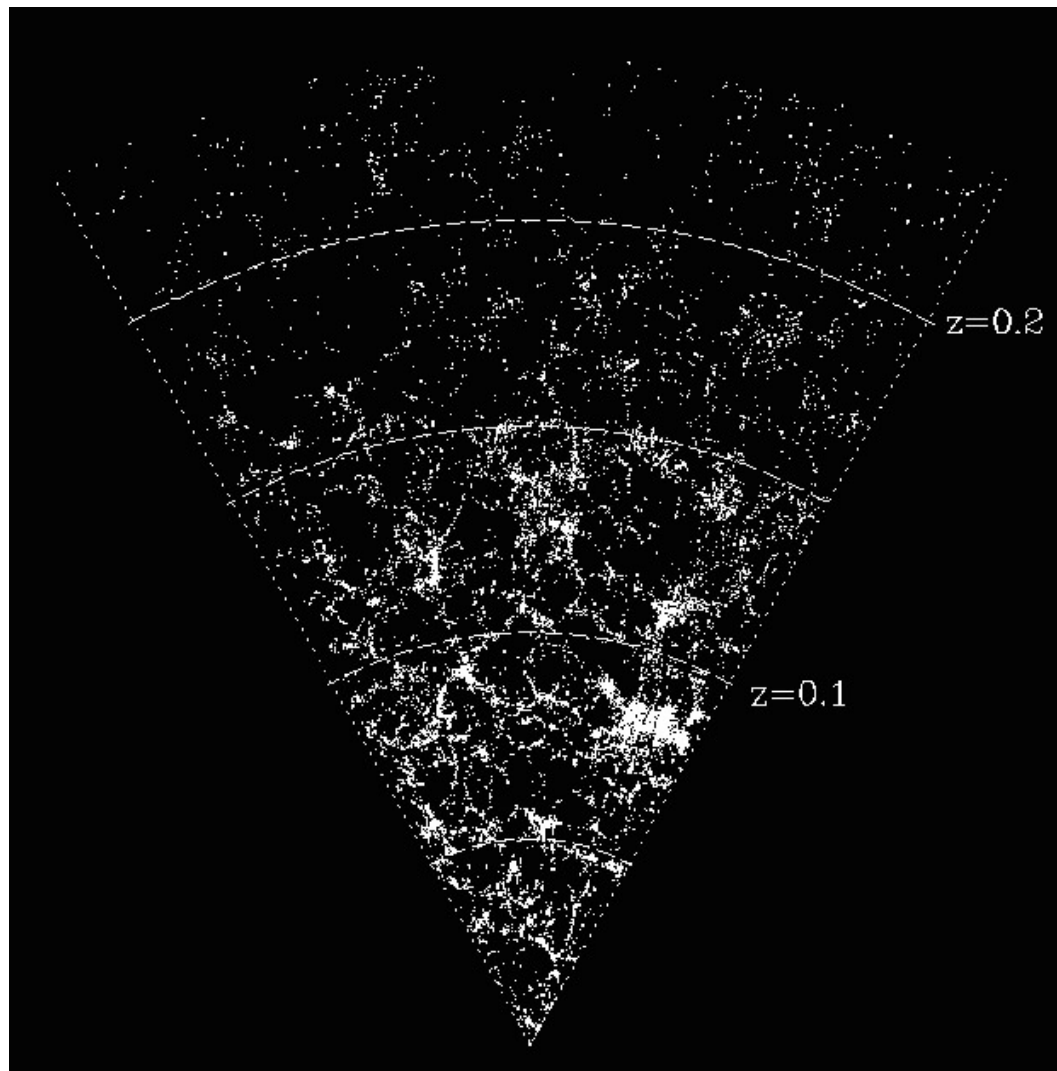
<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html>

## 大規模構造 (天球面)



[http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm\\_grey.gif](http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif)

# 大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



# 支配方程式:

太陽系、星団、銀河、銀河団、宇宙の大規模構造などの基本方程式

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j r_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- それぞれの星（あるいは惑星）を一つの「粒子」と思った時に、ある粒子は他のすべての粒子からの重力を受ける。
- 大抵の場合に相対論的効果は考えなくていい（速度が光速にくらべてずっと小さい）

# こういう系をどうやって研究するか

- 観測する：ほとんど「ある瞬間」しかわからない。恒星の運動は最近ある程度見えるものも。
- 理論を立てる：立てた方程式が簡単には解けない、、、
- 実験する：重力が重要な系の実験は実際上不可能

「計算機実験」が割合重要。



# 計算機「実験」

実際に星や惑星をどこかにおいて実験するのは不可能

計算機で支配方程式を積分することで実験の代わりにする

= 「計算機実験」

実験そのものとはちょっと違う

- こちらが入れた物理法則以外は入ってこない（はず）
- 計算があっているとは限らない

# 重力多体系の基本的性質

惑星や星と、それ以上の大きさの構造の基本的な違い：

圧力が重力とつりあっているわけではない

では、どうして潰れてしまわないか？

— **Newton** 以来の疑問。

- 太陽系
- 銀河
- 宇宙全体

# 星の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x, v)$  : **6**次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x, v)dx dv$  がある「体積」  $dx dv$  の中の星の数を与えるとする。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

# 分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \quad (1)$$

ここで  $\Phi$  は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (2)$$

ここで、 $G$  は重力定数である。

# 分布関数の従う方程式（続き）

$\rho$  は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \quad (3)$$

である。

以下、方程式を導く。位相空間でのある粒子の座標を  $w = (x, v)$  と書くことにする。また、重力ポテンシャルを  $\Phi = \Phi(x, t)$  とおくと、位相空間の中での粒子の流れは

$$\dot{w} = (\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\nabla\Phi) \quad (4)$$

となる。ここで、運動方程式

$$\dot{v} = -\nabla\Phi \quad (5)$$

を使っている。流れにそって物質が保存するので、 $f$  は連続の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f \dot{w}_i}{\partial w_i} = 0, \quad (6)$$

を満たす。一般の流れでは、第2項の微分はややこしいが、位相空間では

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} \right) = \sum_{i=1}^3 -\frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (7)$$

となるので  $w$  の微分の項は全部なくなって、結局

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (8)$$

となる。今、 $f$  が質量密度分布関数であり、外場がないとすると、重力ポテンシャル  $\Phi$  は以下のポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (9)$$

の解である。ここで、 $G$  は重力定数であり、 $\rho$  は空間での質量密度

$$\rho = \int dv f, \quad (10)$$

である。

式 (8) の直観的な意味は、左辺は

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \quad (11)$$

つまり **6** 次元位相空間でのラグランジュ微分であり、これが恒等的に **0** ということは非圧縮での連続の式である。

これが「無衝突」であることに意味は後でもう一度述べるが、単純には、上でみたように  $f$  がラグランジュ的にみて保存するということである。これは、統計力学的なエントロピーが保存するということの意味しており、無衝突の近似が成り立つ限りにおいて系は熱平衡に向かうという保証はない。

# 力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがありえる（一般にいつでもそうというわけではもちろんない）

これを「力学平衡状態」という。



# 銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態に行くのか？

はよくわからない。

# なぜ力学平衡に行くのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態に行く。

(但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、)

以下、もうちょっと、そもそも平衡状態はどう表現されるかについて。

# 運動の積分

平衡状態というものを考える上で基本になるのは、「運動の積分」という概念である。ポテンシャル  $\Phi$  のもとで、ある  $x, v$  の関数  $I$  が運動の積分であるとは、その上で

$$\frac{d}{dt}I(x, v) = 0, \quad (12)$$

がなり立つことである。つまり、実際にすべての粒子の軌道について、その上でその量が変わらないということである。ちょっと変形すれば

$$v \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial v} = 0 \quad (13)$$

これと、前の無衝突ボルツマン方程式を比べてみると、すぐわかるように時間微分が落ちているだけである。

# 運動の積分(注意)

なお、「運動の積分」というときの流儀は2通りあって、一般に運動の保存量のことを「運動の積分」という流儀もあるが、ここでは位相空間の座標だけの関数であって同時に保存量であるものをさす。具体的には、たとえば1次元調和振動子で「初期の位相」というのは保存量だが運動の積分ではない。これは、時間が入ってくるからである。

# 例

エネルギー  $v^2/2 + \Phi$  や、ポテンシャルが球対称 ( $r$  だけの関数) の場合の角運動量ベクトル  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  は運動の積分である。

# ジーンズの定理

さて、上のように  $I$  を定義すると、以下の「ジーンズの定理」がなり立つことがわかる。

ジーンズの定理 任意の無衝突ボルツマン方程式の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

いいかえると、分布関数  $f$  が定常であるためには、運動の積分  $I_1, I_2, \dots, I_m$  があって  $f = f(I_1, I_2, \dots, I_m)$  の形で書けることが必要十分ということ。

証明だが、まず「定常ならば運動の積分で書ける」というほうを考えてみる。これは、 $f$  自体が運動の積分の定義を満たしているので、**OK**。

# ジーゼの定理 (証明続き)

逆のほうは、実際に  $f$  の全微分を  $I_k$  で書き下せば、それぞれが  $0$  になるということからいえる。

というわけで、これはなかなか強力な定理だが、一般の場合にはそれほど役に立つわけではない。というのは、ポテンシャルを与えた時に一般に運動の積分というのは  $5$  個あるはずだが、それらをすべて知っているということはないからである。

ただし、球対称とか軸対称とか条件をつけると、いろいろちゃんと決まるようになる。以下、まず球対称の場合を考える。

球対称ではない場合については後でもう一度。

# 球対称の場合(1)

球対称の場合、運動の積分はエネルギーと角運動量の**3**成分で**4**つある。一般にはもう一つあるが、これは特別な場合を除いてあまり意味がないので、定常な分布関数はエネルギーと角運動量だけで書けると思っている。

特別な場合の例 = ケプラー軌道、調和振動。軌道全体の向きを表す量（近点経度）が保存

一般の場合：数学的には近点経度に対応するような保存量はあるが、**1**つの軌道がエネルギーと角運動量で決まる部分空間を覆う（その部分空間の任意の点に無限に近づく）。このため、この保存量に依存するような分布関数はあまり意味がない。



## 球対称の場合 (2)

さて、 $f$  は  $E$  と  $J$  によるということにしたわけだが、いま球対称な場合ということなので  $J$  の方向にではなく、絶対値だけに依存するのでないといけない。したがって、実は球対称の分布関数は一般に  $f(E, J)$  と書けるということになる。

我々が扱いたいのは自己重力系なので、実際にこれを球対称の場合に書き下してみると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \int f \left( \frac{1}{2} v^2 + \Phi, |r \times v| \right) dv, \quad (14)$$

てな感じになる。

# $f(E)$ の場合 (1)

上の場合でもまだちょっと大変なので、さらに単純化してとりあえず  $J$  にもよらない場合というのを考えてみる。これには、なかなか特別な、空間上の各点で速度分散が等方的であるという性質がある。これはどういうことかということ、一般にある方向の速度分散というのは

$$\langle v_e^2 \rangle = \frac{1}{\rho} \int v_e^2 f(v^2/2 + \Phi) dv \quad (15)$$

となるが、 $f$  が  $v$  の絶対値にしかよらないので、 $v_e$  の方向にこの積分はよらない。まあ、速度分散がとかいうより、速度分布自体が等方的なのだから当然ではある。

## $f(E)$ の場合 (2)

以下、扱いやすくするために変数を取り直す。

$$\Psi = -\Phi + \Phi_0, \quad \mathcal{E} = -E + \Phi_0 = \Psi - v^2/2 \quad (16)$$

ここで  $\Phi_0$  は定数で、普通は  $\mathcal{E} > 0$  で  $f > 0$ ,  $\mathcal{E} \leq 0$  で  $f = 0$  となるようにとる。

これらを使って、さらに  $v$  の角度方向に渡って積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) &= -16\pi^2 G \int_0^{\sqrt{2\Psi}} f\left(\Psi - \frac{1}{2}v^2\right) v^2 dv \\ &= -16\pi^2 G \int_0^{\Psi} f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} d\mathcal{E}. \end{aligned} \quad (17)$$

## $f(E)$ の場合 (2)

これで、一般に  $f$  を与えて  $\Psi$  を求めるとか、あるいはその逆とかが出来る。

ただし、 $\Psi$  を与えて  $f$  を求めようってときには、求まった  $f$  が  $f \geq 0$  の条件を満たすという保証はないので、そういうのは物理的には意味がない解ということになる。

# 球対称な分布関数の例

ここであげるのはあくまでも例であるが、さまざまな理由からその性質がよく調べられているものである。

# ポリトロープとプラマーモデル

ある意味でもっとも簡単な分布関数の例は、 $\mathcal{E}$  の冪乗（パワー）で書けるものである。例えば

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} F\mathcal{E}^{n-3/2} & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

これから、まず密度を  $\Psi$  の関数として求められる ( $v^2 = 2\Psi \cos \theta$  なる変数変換のあと)。で、答えは

$$\rho = c_n \Psi^n \quad (\Psi > 0) \quad (19)$$

となる。ただし、 $c_n$  が有限になるためには  $n > 1/2$  でないといけない。

# ポリトロープとプラマーモデル(2)

上を使ってポアソン方程式から  $\rho$  を消去すると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \quad (20)$$

変数を適当にスケールリングして

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left( s^2 \frac{d\psi}{ds} \right) + \psi^n = 0 \quad (21)$$

としたものを **Lane-Emden** 方程式と呼ぶ。

# ポリトロープとプラマーモデル(3)

実際には、上の **Lane-Emden** 方程式を解かないとポテンシャルや密度がどうなっているかはよくわからない。で、一般の  $n$  ではこの方程式には初等的な解はないが、 $n = 5$  の場合には解があることが古くから知られている。これは

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}s^2}} \quad (22)$$

の形をしている。これが **Lane-Emden** 方程式を満たしていることは各自確かめること。さらに、密度は  $c_5\phi^5$  で与えられることになる。

密度が  $r = 0$  で有限で、 $r \rightarrow \infty$  で  $1/r^3$  より速く落ちるので、質量は有限である。



# ポリトロープとプラマーモデル(4)

これは、天文学的になにか素晴らしいものであるというわけではないが、球状星団のうち中心密度が低いものにはまあまあ似ていなくもない。とりあえず、この意味は、解析関数で簡単に書ける自己重力系の **self-consistent** なモデルであるということである。

プラマーモデルは、いろんなシミュレーションの初期条件として使われることが多い。

# Hernquist Model

プラマーモデルはその存在が **100** 年くらい前から知られているが、こちらは論文が発表されたのが **1990** 年という、(比較的)新しいモデルである (Hernquist, L., 1990, ApJ 356, 359)。これは、ポテンシャルを

$$\Phi = -\frac{1}{r + a} \quad (23)$$

で与える。密度分布は

$$\rho = C \frac{a^4}{r(r + a)^3} \quad (24)$$

で書ける。

# Hernquist Model(2)

分布関数は求まっているが、めんどくさいのでここには書かない。とりあえず、密度とポテンシャルがコンシステントになっていることは確認してみよう。なお、一般に球対称ならば

$$\frac{d\Phi}{dr} = GM_r/r^2 \quad (25)$$

であることに注意。これは、単に半径  $r$  のところでの重力加速度である。

**Hernquist Model** には、「 $r^{1/4}$  則をかなり良く再現する」という著しい特徴がある。

# Hernquist Model(3)

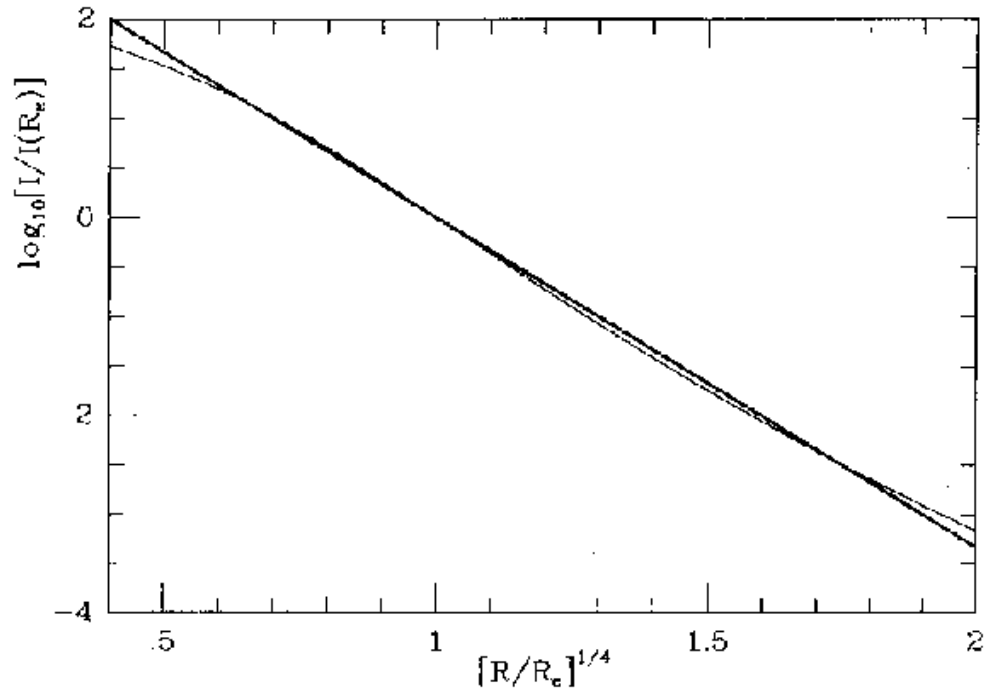


FIG. 4. Surface brightness profiles for the  $R^{1/4}$  law (*thick curve*) and the present model (*thin curve*) as a function of  $(R/R_e)^{1/4}$ . Surface brightness is normalized to its value at  $R_e$  where  $R_e$  refers separately to the effective radii of the two models.

# Hernquist Model(4)

$r^{1/4}$  則については後でその物理的解釈も含めて詳しく議論することにした  
いが、要するに、観測される楕円銀河の表面輝度の対数（要するに等級で  
すね）が、半径の  $1/4$  乗に対して直線にのって見えるというものである。  
この性質と、一応解析関数で分布関数が書けるということのために、楕円  
銀河やダークハローのモデルとして広く使われるようになってきている。

ただし、このモデルにはいくつか妙な性質もあり、それについてもまた後  
で触れることになるはずである。

# 等温モデル(1)

恒星系は(惑星系も)必ずしも熱平衡状態にあるわけではないが、理想状態としてのついて良く理解しておくことは結構大事である。熱平衡状態では(古典統計なので)分布関数はマックスウェル-ボルツマン分布、すなわち

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \quad (26)$$

で与えられなければならない。

## 等温モデル(2)

まず、例によってこれを速度空間で積分して密度をポテンシャルの関数として表す。この時に誤差関数についての

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 \quad (27)$$

を使うと、

$$\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} \quad (28)$$

ポアソン方程式にこれを入れると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G\rho \quad (29)$$

# 等温モデル(3)

従って、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \log \rho}{dr} \right) = -4\pi G \sigma^2 \rho \quad (30)$$

後はこれを数値的に解くわけだが、まず、一つ特別な解があるということ  
を指摘しておく

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad (31)$$

は、上の方程式を満たし、解の一つとなっている。これを **singular isothermal sphere** と呼ぶ。これは **self consistent** なモデルではない。というのは、質量が  $M_r \propto r$  となって有限ではないからである。が、例えば銀河ハローの中心部、あるいは楕円銀河についても中心部についてはこれで比較的良く近似できるものもあるということがわかっている。

特に、渦巻銀河については、「回転速度が中心からの距離に（あまり）依存しない」（いわゆる **flat rotation curve**）という性質が知られていて、



これを説明するためには上のような  $\rho \sim 1/r^2$  のダークハローが必要であるということになっている。

特別ではない解は、中心密度を有限にして中心から外側に向かって解いていけばいい。この時でも、 $r \rightarrow \infty$  の極限では **singular isothermal** に近づく。

# 流体との関係

等温モデルは、エントロピー極大であり、分布関数がボルツマン分布になっているという特別な性質がある。このため、等温ガス球と実は同じ構造をとる。以下、ガス球について方程式を導いておく。静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \quad (32)$$

である。状態方程式に等温の

$$P = \frac{k_B T}{m} \rho \quad (33)$$

を使って  $P$  を消して、さらに  $M_r$  を微分してみれば、係数を別にして

$$C \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \log \rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2 \quad (34)$$

要するに、**stellar system** とガスで同じ方程式になっている。

なお、ポリトロープでも、ポリトロピックな状態方程式を持つガス球の密度分布と **stellar system** のそれとは一致する。が、等温モデルの場合とは実は本質的な違いがある。等温モデルの場合は、分布関数そのものが一致する（ボルツマン分布であり、局所的にも大局的にもエントロピー最大）が、一般のポリトロープではそんなことはない（そもそもガス球ではジーンズの定理が成り立たないし、局所的にはボルツマン分布であるから）。

球対称ではない場合

# 軸対称の場合

球対称ではない場合の例として、まず軸対称の場合を考える。

この場合、運動の積分として確実に存在するのはエネルギーと、対称軸回りの角運動量だけである。但し、では他に運動の積分はないのかというと、話は既に簡単ではなくなる。これは以下のように理解できる。

軸対称ポテンシャルなので、座標を  $(R, z, \phi)$  の円筒座標にしてみる。 $R, z$  を決めると角運動量保存から  $V_\phi$  が決まるので、こちらは解く必要がなく、 $(R, z)$  平面の中の運動を考えればよい。そうすると自由度が**2**なので、運動の積分がエネルギーの他にもうひとつあると可積分になって、「解析的に解ける」。

例えば、 $(R, z)$  平面内の運動にした後で、ポテンシャルが

$$V = aR^2 + bz^2 \quad (35)$$

と調和振動子になっていると、この場合はもちろんそれぞれの方向の調和振動になるので可積分である。保存量は  $R$  方向のエネルギーと  $z$  方向のエネルギーの**2**つある。

ところが、調和振動子に少し余計な項を加えると、もうよくわからないことが起こる。この有名な例が **Hénon-Heiles**（エノン-ハイレス）系である。**Hénon** も **Heiles** も天文学者であり、この系は元々円盤銀河のような軸対称ポテンシャルの中での恒星の運動のモデル方程式として導かれたものである。

# Hénon-Heiles 系

Hénon と Heiles (1964 AJ 69, 73) は、 $U$  として以下のようなものを考えてみた。

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (36)$$

何故この形を考えたかというのは、論文には以下のように書いてある

**because: (1) it is analytically simple; this makes the computation of the trajectory easy; (2) at the same time, it is sufficiently complicated to give trajectories which are far from trivial, as will be seen below.**

つまり、物理的あるいは天文学的になにかの意味があるというよりは、このポテンシャルの中での軌道の振る舞いが妙であるということで選ばれたかなり人工的な例ではある。

もちろん、最初の項は調和振動であり明確な意味がある。非線型の第**2**項の意味はポテンシャルの等高線を書いて見ると分かる。



# Hénon-Heiles 系のポテンシャル

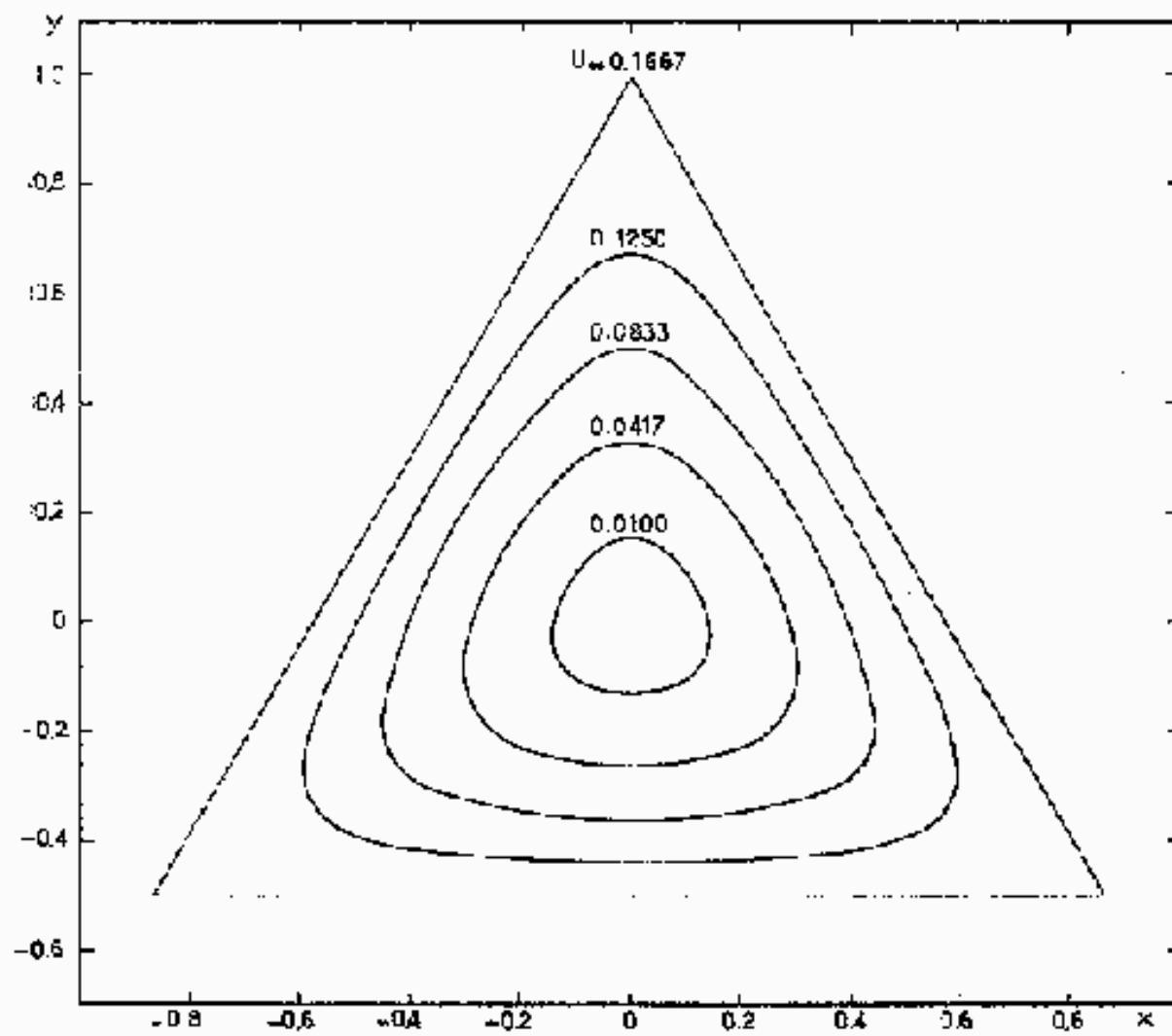


FIG. 2. Equipotential lines of (11).

このように、非線型項によりポテンシャルが三角形になっている。特に  $U = 1/6$  の等高線に注意すると、これは直線になっている。このことから、この三角形の頂点はポテンシャルの鞍点であり、力が **0** になることが分かる。

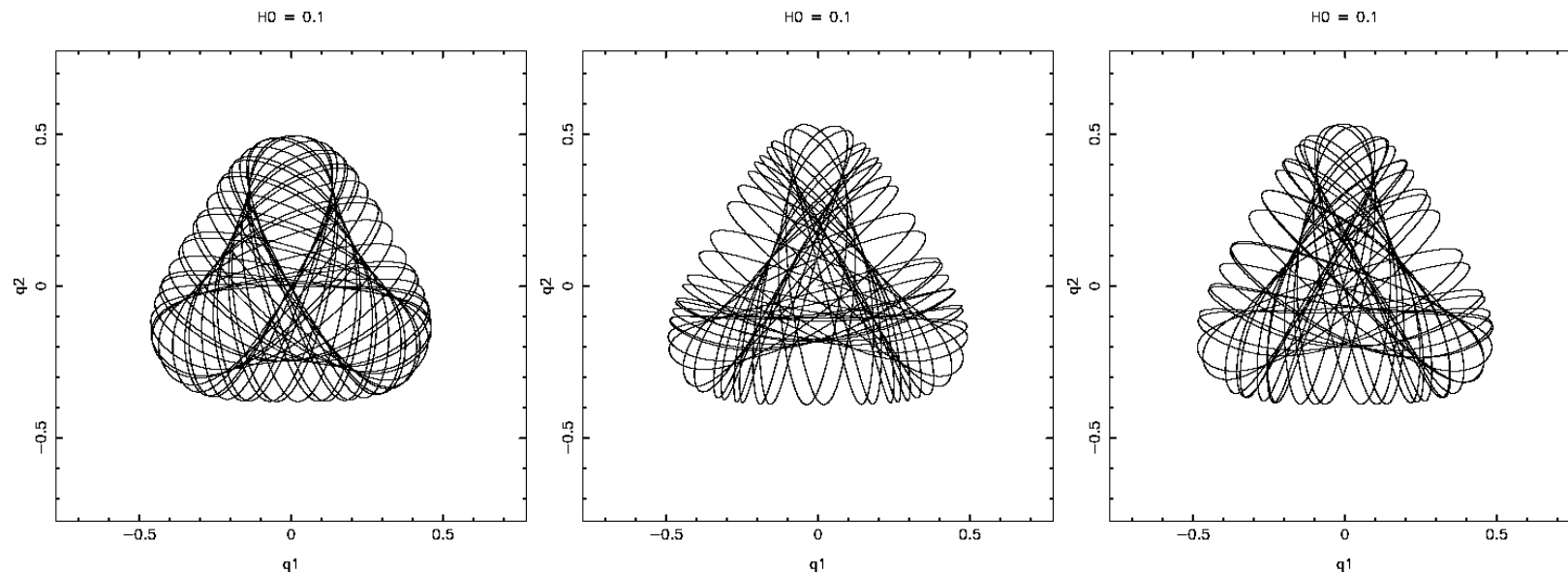
鞍点であるので、ポテンシャルが下がるのは三角形の内側を向いた方向とその反対側の方向だけであり、それに直交する方向ではポテンシャルは増えている。また、頂点以外では力は **0** でない。

# Hénon-Heiles 系での軌道

軌道は例えば次のスライド以降の図のようになる。これはエネルギー (ハミルトニアン)

$$H = \frac{v^2}{2} + U(x, y) \quad (37)$$

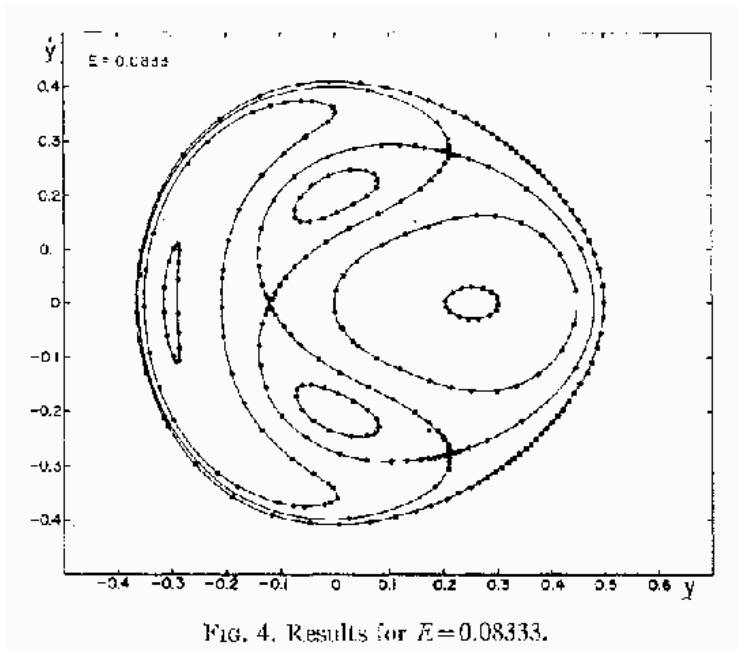
の値を  $H = 0.1$  とし、**3**つの違う初期条件から数值的に軌道を計算した結果である。



これだけを見ていると別にどうということはないが、ここでいわゆるポアンカレ断面というものを書いて見ると非常に面白いことになっていると分かる。ポアンカレ断面とは、この場合のような自由度が**2**のハミルトン力学系で、一方の変数、例えば  $x$  が **0** になる時に  $y, v_y$  の値を書いたものである。

# ポアンカレ断面

まず、 $H = 1/12$  の場合を示す。



ここで、つながって線になっているのは基本的には一つの軌道であり、分かれた曲線は別の初期条件からの軌道に対応している。エネルギー保存を考えると、 $x = 0$  で  $v_x^2 \geq 0$  なので、 $(y, v_y)$  はある閉領域の中にくる。

# 第三積分の問題

保存量がエネルギーだけであれば、任意の初期条件から出発した軌道はこの領域の全ての点をいつかは通ると考えられるが、このようにそうならないということは、なんだかわからない保存量のようなものがあるということを示している。元々の軸対称ポテンシャルに戻ると軸回り角運動量は保存しているが、これは有効ポテンシャルにして回転方向の速度を消去するのに使っているので、**2次元問題**になった後では無関係である。

軸対称ポテンシャル内での運動にエネルギーと角運動量以外の保存量があるかどうかという問題は、「**第3積分問題**」と呼ばれる恒星系力学上の現在でも完全には解決されているとはいえない問題の一つである。とりあえずこの場合には、**第3積分**が存在しているように見える。

# 軌跡の「交点」

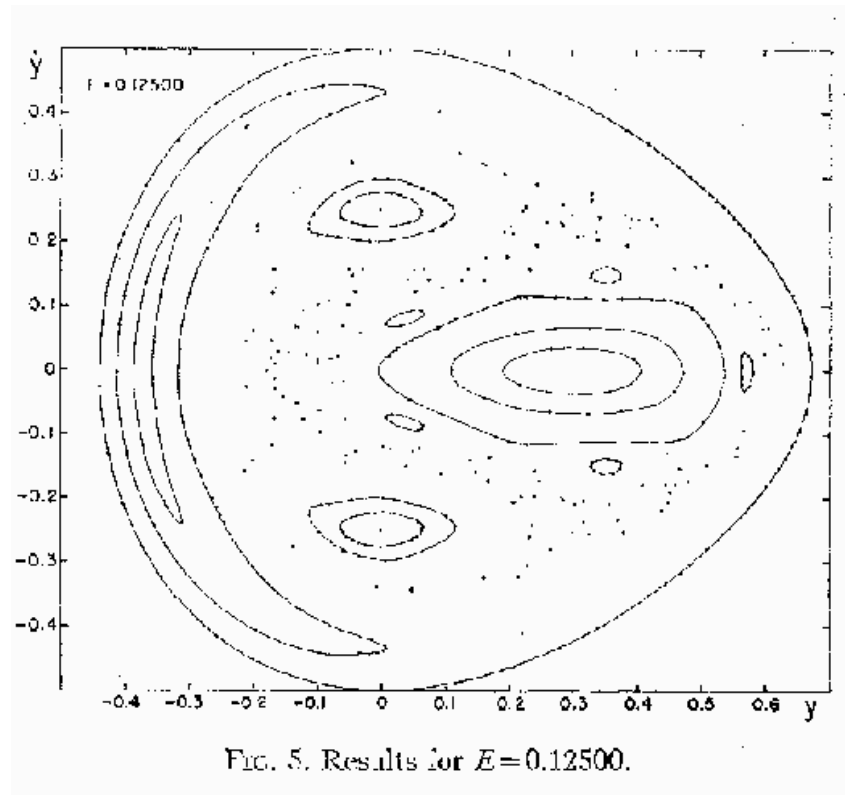
この図で妙なのは、ポアンカレ断面上の軌跡が交点をもつように見えることである。本来、保存量がある軌道はポアンカレ断面の上で閉曲線になり、他の軌道と交わることはない(交わる、ということは閉曲線であることと矛盾する)

実際には、この「交点」のところを精密に調べると、奇妙なことがわかる。交点近くの十分に狭い領域では運動の積分が無くなって、ある領域内を軌道が埋めているのである。



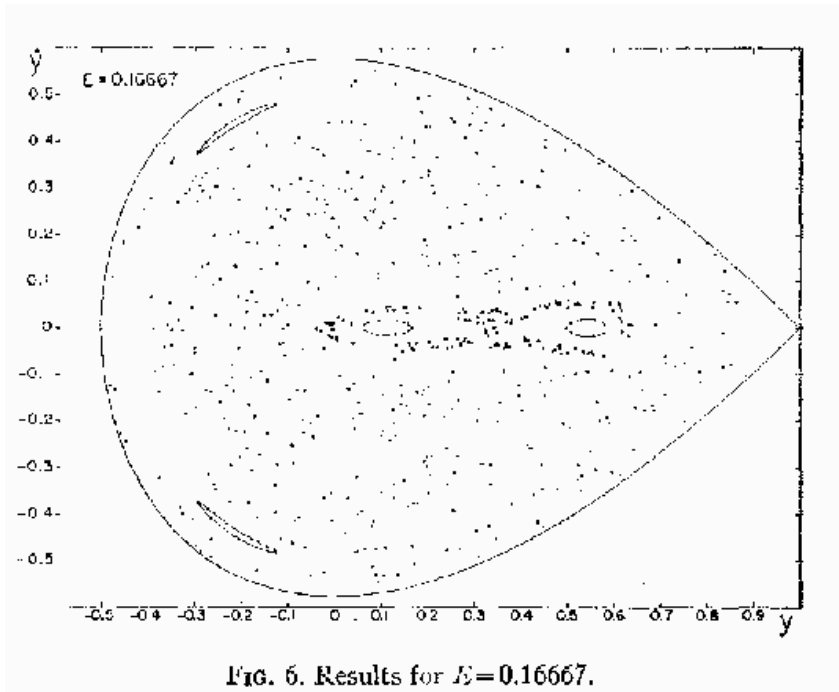
$$E = 1/8$$

この領域はエネルギーを大きくするとどんどん大きくなる。次は  $E = 1/8$  の場合である。



保存量を持つ、規則的な運動をする領域よりも、規則的ではない運動をする領域のほうが広がっていることが分かる。少なくとも恒星系力学では、このような場合に規則的な軌道を **regular orbit**, そうでないものを **irregular orbit** または **chaotic orbit** という。

$$E = 1/6$$



キャプションには  $1/6$  よりも大きいようなことが書いてあるが、気の迷いであろう。それはともかく、この場合にはほとんどの領域が規則的でない、つまり、第3積分をもたないような軌道になっていることが分かる。

# カオス

エノン-ハイレス系はカオス的な運動の典型的な例である。

ここではカオスかどうかを、エネルギー以外の積分がある(ように見える)かどうかで判断したが、実質的に同じことになるもうひとつの定義がある。それは、「十分に近い初期条件から出発した**2**つの軌道がどのように離れていくか」である。より厳密にはこれはリヤプノフ指数が正かどうかということになる。定義の詳細はここでは省くが、大雑把にはリヤプノフ指数が正なら十分近い**2**つの軌道が指数関数的に離れていく。このことは上の **Hénon-Heiles** 系でも観察され、周期的に見える領域では軌道は時間の**1**次で離れていくが、カオス的な領域では指数関数的に離れる。

このため、軸対称でも話は球対称の場合よりはるかに難しい。実際に理論的に軸対称な系、楕円銀河とか球状星団とかを扱う時には第三積分はないものとしてジーンズの定理を使って分布関数を構成することはできるが、多くの場合に第三積分的なものがあるのでそれ以外の解がないというわけではない。**2**次元円盤の場合は話が簡単で、全ての軌道は可積分である。なので、薄い円盤の場合にはほぼ可積分として扱うことができる。

# 軸対称でもない場合

多くの楕円銀河は実は軸対称でもなく、楕円の**3**軸の長さが全て違う。そうすると、角運動量の**3**成分が全て保存しなくなり、自明な保存量はエネルギーだけになる。

しかし実際にはその中で **regular orbit** と呼ばれる、エネルギー以外の保存量を持つ軌道があり、それによって**3**軸不等な形状を維持していると考えられている。

というわけで、今回の講義では球対称な系を中心に扱う。後半では円盤の話もする。

# 球対称モデル(続き) King Model (1)

等温モデルは、すでに述べたように熱平衡（エントロピーの変分が  $0$ ）という重要な意味を持つ定常解ではあるが、なにしろ質量が無限大であり現実に存在しないのでちょっと困るところがある。なにか適当な仮定を置くことで、「おおむね等温モデルであり、なおかつ有限の大きさをもつ」というものを考えることはできないだろうか？

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \quad (38)$$

上の分布関数で、質量が発散するのは、分布関数がエネルギー無限大 ( $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$ ) まで  $0$  にならないためである。

# King Model(2)

有限の質量のものが自己重力でまとまっているためには、すべての粒子のエネルギーが負でないといけないので、これでは自己重力系が表現出来ないのはある意味では当然のことといえる。

それならば、ある有限のエネルギー以上のものはないことにしてしまえばいい。そのやり方にはいろいろあり得るが、とりあえず **Lowered Maxwellian** と呼ばれる以下のようなものを考える

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} (e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1) & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & (\mathcal{E} \leq 0) \end{cases} \quad (39)$$

これは  $\mathcal{E} = 0$  で  $f = 0$  となるように、**1** を引いたというだけである。これしか方法がないというわけではないが、これは扱いやすいこともあってもっともよく使われている。

これはいかにも人工的な感じがすると思うが、等温モデルから有限質量で

なおかつ有限半径のモデルにするもっとも簡単な方法なので、まあ、そういうものと思って欲しい。

例によって、まず速度空間で積分すれば

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{2\Psi}} \left[ \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) - 1 \right] v^2 dv \\ &= \rho_1 \left[ e^{\Psi/\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\Psi}{\sigma^2}}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right) \right] \quad (40)\end{aligned}$$

ここで erf は誤差関数で、積分が有限区間であるために出てくる。最後の項は 1 引いている分の寄与である。ちなみに

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (41)$$

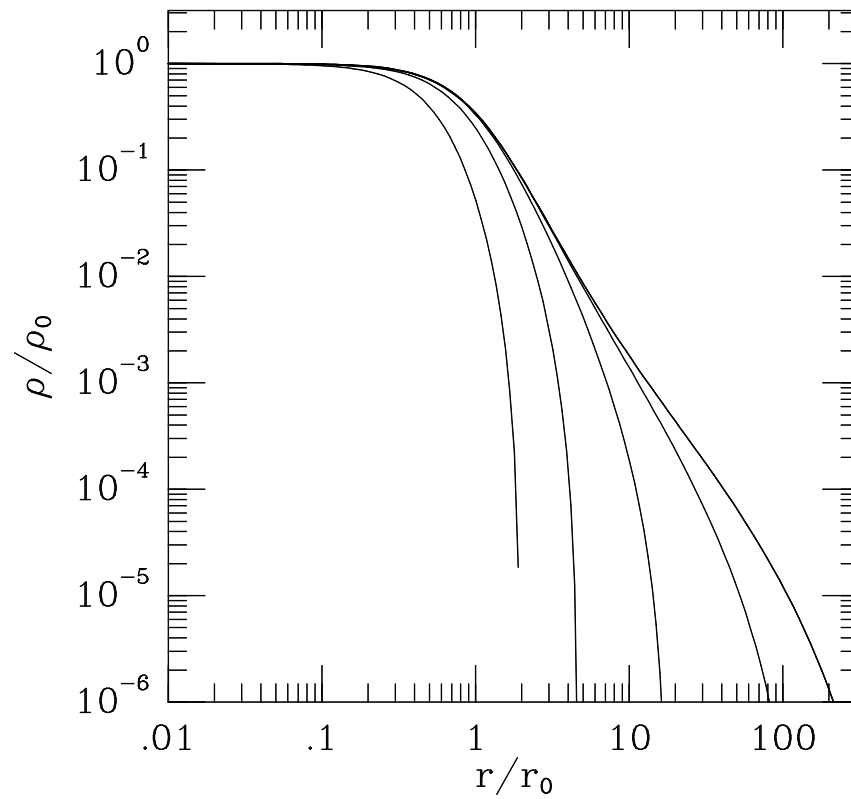
これでポテンシャルの関数として密度が求まったので、あとはポアソン方

程式に入れて数値的に解くだけである。ただし、**King model** の場合境界条件についてすこしきちんと考える必要がある。

半径方向の分布は、中心から無限遠まで与えられるわけであるが、実は外側の境界をどうとるべきかはちょっと自明ではないので、とりあえず中心から初期値問題として解くことを考える。

初期条件としては、まず  $d\Psi/dr = 0$  とする、すなわち、中心密度が有限の解を考える。  $\Psi_0$  は任意に選べるので、これの値によっていろいろな解がでてくる。





これは実際に数値的に解いてみたものの例である。速く落ちるものから、 $\Psi_0$  が **1, 3, 6, 9, 12** と変えてみてある。

なお、横軸のスケールの  $r_0$  は、

$$r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}} \quad (42)$$

として無次元化するのに使っている。これは、いわゆる「コア半径」というのとそこそこ一致するということになっている。通常、キングモデルのコア半径というときにはこれをさす。観測的には、中心の表面輝度の  $1/2$  になるところとするのが普通である。

グラフからわかるように、有限の半径  $r_t$  で  $\rho$  は  $0$  になる。これは、解いていったときに  $\Psi$  が  $0$  になってしまうためである。この半径のことを **King model** の **tidal radius** 潮汐半径という。このモデルのばあい、 $\Psi$  と本当のポテンシャル  $\Phi$  の間に以下のような簡単な関係が成り立つことに注意。

$$\Phi = -\frac{GM}{r_t} - \Psi \quad (43)$$

ここで  $M$  は系の全質量である。

**King Model** は、球状星団のプロファイルのモデルとして非常によく使われている。なお、 $c = \log(r_t/r_0)$  のことを **concentration parameter** といって、観測データにキングモデルを合わせた論文では普通これがパラメータになる。理論計算では  $\Psi_0$  が使われるので、ちょっとややこしいことが多い。

# ジーンズ方程式、ビリアル定理

# Jeans Equations

ここまでは、**Collisionless Boltzman** 方程式から出発して、**Jeans** の定理を使って球対称な恒星系のモデルをいろいろ見てきた。これからはしばらく **Collisionless Boltzman** 方程式のいろいろな平均（モーメント）をとることによって恒星系の性質を見ていくことにする。

まず、ジーンズ方程式を扱う。これは、形式としては流体の場合のオイラー方程式、要するに運動方程式にあたるものである。導出は結構面倒なので少し丁寧に進める。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (44)$$

**Collisionless Boltzman** 方程式は式 99 で与えられるが、これをまず速度空間全体で積分してみる。と、まず第 3 項は発散定理によって表面積分に置き換えられ、 $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$  の極限で  $f$  は十分速く 0 にいくので（普通は有限の  $|\mathbf{v}|$  で 0 になってないと、自己重力的にならない）、結局 0 になる。最

初の2項は

$$\nu = \int f d^3v; \bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int f v_i d^3v \quad (45)$$

と置いてやれば（密度と、局所的な平均速度）

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (46)$$

これは、流体の場合の連続の式と同じものである。さらに、速度の1次のモーメントをとるために **Collisionless Boltzman** に  $v_j$  を掛けて積分してみると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3v + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v = 0, \quad (47)$$

というような式が出てくる。但し、 $i$  についての和をとっていることに注意。

さて、 $v_j f$  について発散定理（1次元）を使えば

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 v = - \int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3 v = -\delta_{ij} \nu \quad (48)$$

となるので、結局

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (49)$$

但し、 $\overline{v_i v_j}$  は  $v_i v_j$  の局所平均である。もうちょっと見通しの立つ式にするために、まず連続の式を使って第一項から  $\partial \nu / \partial t$  を消すと

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (50)$$

さらに、

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} \quad (51)$$

を使って書き直すと

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial (\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (52)$$

これは、流体の場合のオイラー方程式（運動方程式）と大体同じ格好になっている。左辺は平均の流れに沿って見た平均速度の **Lagrange** 微分であり、右辺第一項はポテンシャルから力である。

最後の項は普通なら圧力の項が出てくる。流体と違うのは、ここが非等方的な **stress tensor**  $\sigma_{ij}^2$  になっているということである。

なお、いうまでもないが、速度分布が等方的であれば **stress tensor** は  $\sigma^2 I$  ( $I$  は単位行列) の形に書ける。さらに、等方的でない場合には、 $\sigma^2$  は対称テンソルなので適当な座標系の回転により対角化出来る。例えば  $f(E, L)$  で書ける時には、一つの軸を原点に向けてとれば対角化されるわけである。



# 例：球対称恒星系の $M/L$

密度分布が球対称で平均の流れがない場合、極座標系での **Jeans equation** は以下の形に書き直せる：

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r} \left[ 2\overline{v_r^2} - \left( \overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2} \right) \right] = -\nu \frac{d\Phi}{dr} \quad (53)$$

(証明は、、まあ、面倒なだけなので省略) もうちょっと話を簡単にするために、等方的な場合を考えると、結局

$$\frac{1}{\nu} \frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (54)$$

すなわち

$$M(r) = -\frac{r \overline{v_r^2}}{G} \left( \frac{d \ln \nu}{d \ln r} + \frac{d \ln \overline{v_r^2}}{d \ln r} \right) \quad (55)$$

つまり、密度と速度分散の半径方向の分布がわかれば、質量分布が決まるということになる。

ここで注意してほしいのは、 $\nu$ は質量を反映していないもの、例えば星の数とか、あるいは単位体積あたりの **luminosity** の分布でも構わないということである。これは、もともとの **Collisionless Boltzman** 方程式は保存する量であればなんでもなり立つからである。さらに、球対称、等方を仮定したので、表面輝度分布や視線方向速度分布から輝度密度と速度分散の空間分布を求められるので、これらから「実際にどれだけの質量があるはずか」を求められるわけである。これから、 $M/L$ の空間分布が決まることになる。楕円銀河の中心に大質量ブラックホールがあるというような話は、もっとも簡単にはこのようにして質量を推定する。

なお、逆に、 $M/L$ を一定として、速度の非等方性の空間分布を求めることもできる。多くの、中心に大質量ブラックホールがあるとされている楕円銀河で、非常に非等方性の高い速度分布を作れば観測された密度と速度分散の分布が説明できないわけではないということが示されている。

# 例の続き:球状星団の中心にブラックホールはあるか？

2002年の9月に、球状星団 **M15** の中心に太陽質量の **3000** 倍の質量のブラックホールを発見したという論文が発表され、**STScI** がプレスリリースを大々的に行ったので日本の新聞でも報道された。

# 新聞発表

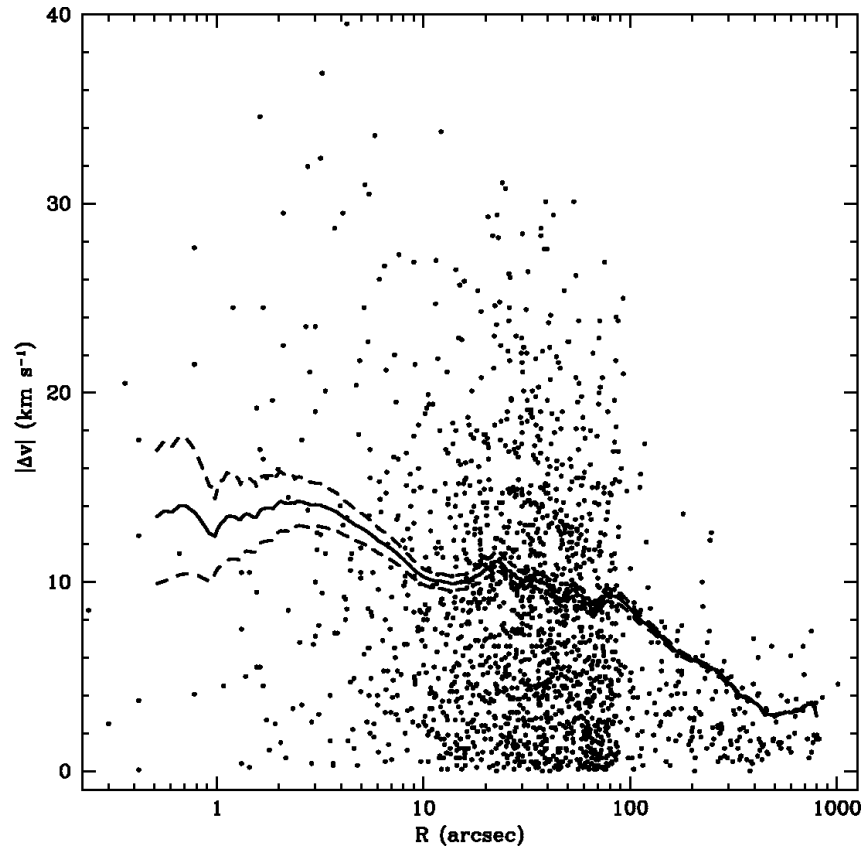
新聞発表はこんなの:

宇宙望遠鏡科学研究所のファン・デア・マレル博士が率いるチームは、ペガサス座の方向、**3万2千光年**の彼方にある球状星団 **M15** にブラックホールを発見しました。彼の協力者で、やはり宇宙望遠鏡科学研究所のゲルセンは、ブラックホールの質量が太陽の **4000倍**だということを突き止めました。

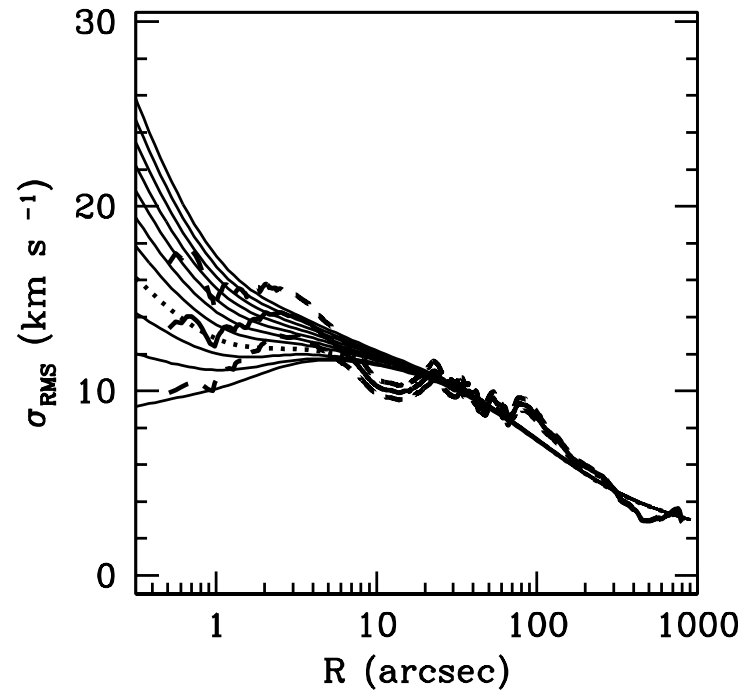
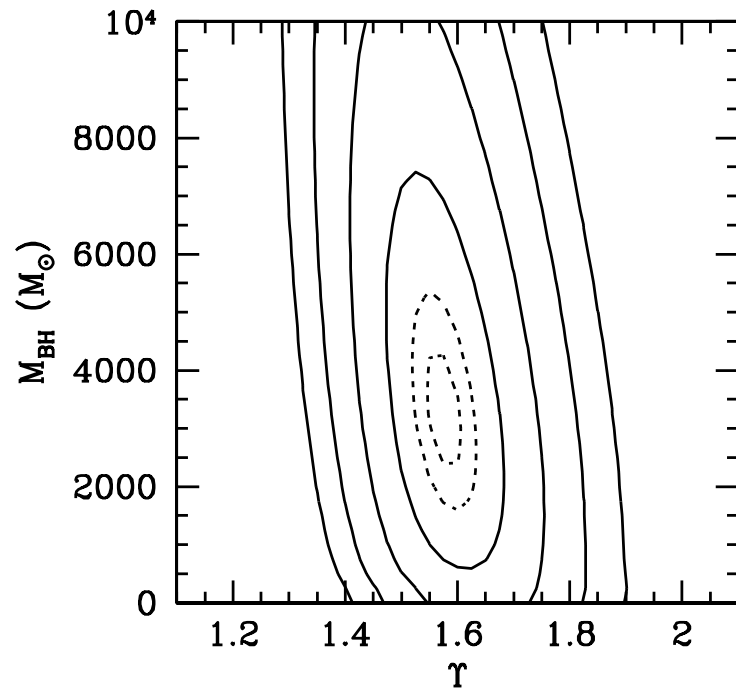
これまで、**X線**での観測で .... 星形成銀河に非常に明るい **X線源**が見つかっていました。これは中間質量ブラックホールとも解釈できるものでしたが、他の解釈もできるものでした。これに対し、ハッブル (宇宙望遠鏡) による測定は、個々の星の速度に基づくもので、直接ブラックホールの質量を与えるものです。

これは、ジーンズ方程式の利用のいろんな意味で教育的な例になっているので、少し詳しく見ていこう。

まず、観測はどういうものかというところの図



が基本である。ハッブル宇宙望遠鏡の分光器を使って、球状星団の中心部のいくつかの星の視線速度を測定し、それから速度分散を求める。で、何故ブラックホールがあることになるかということ、次のページの図のような話である。

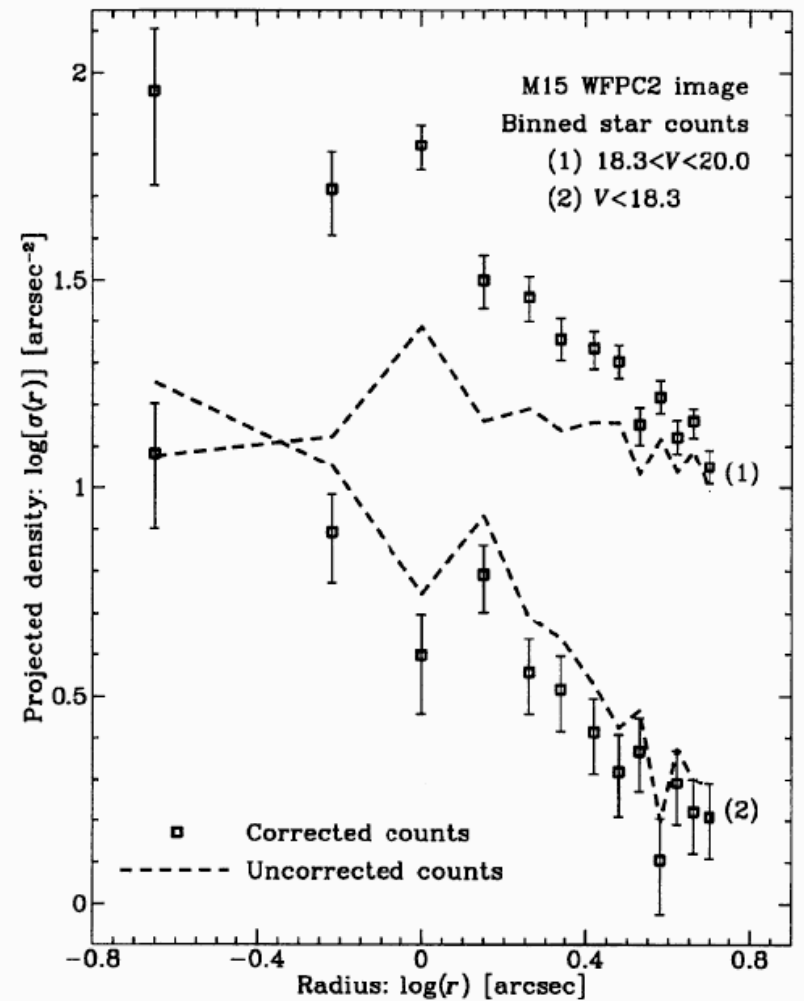
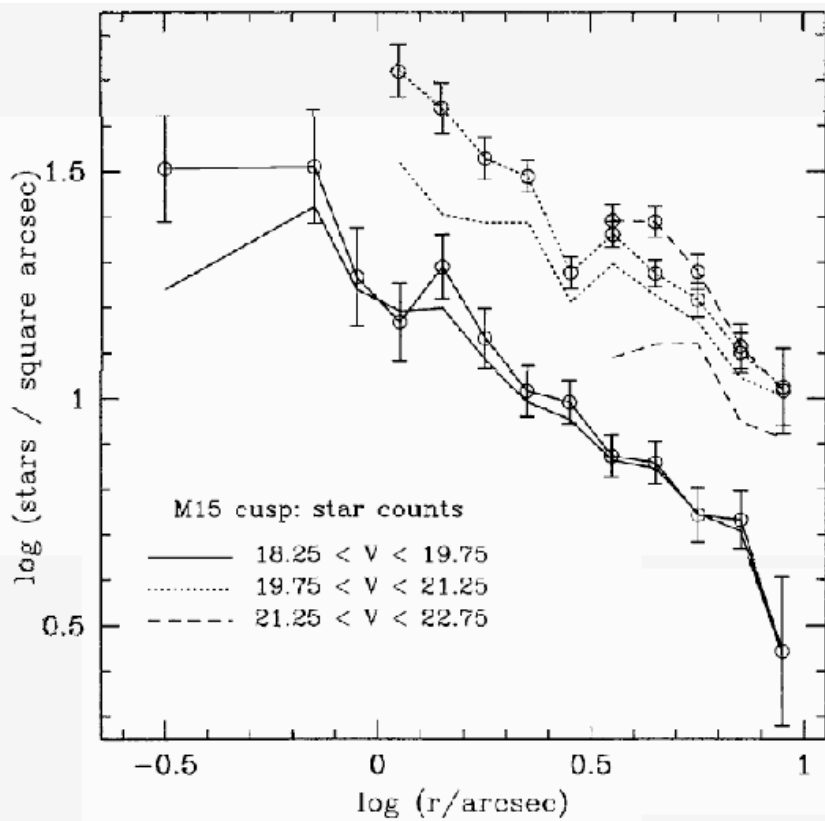


つまり、

1.  $M/L$  が一定と仮定して、表面輝度の分布から質量分布を求める。
2. 質量分布からジーンズ方程式を使って速度分布を求めてみる。

3. これは、定数をふってみても速度分布の観測結果とあわない
4. 中心にいろいろな質量のブラックホールを仮定して、速度分布を計算しなおす
5.  $\chi^2$  残差が最小になったところで、「ブラックホール発見!」

まあ、今までに説明した通りの解析である。表面輝度はこんな感じである。





(左: Sosin & King 1997, 右: Guhathakurta *et al.* 1996.)

教科書通りの解析でブラックホールがあって論文になるならそれは結構なわけだが、この場合世の中はそんなに甘くない。何故かという、球状星団では(あとで述べるように)系が熱力学的に進化しており、 $M/L$ が一定という仮定が成り立たないからである。

熱力学的な進化を簡単にいうと、星の系も普通のガスと同じようにエネルギー等分配を成り立たせようと方向に局所的な速度分布が進化する。このため、速度分散が初め同じだとすると、重い星は軽い星にエネルギーを与えて速度を小さくしようとする。

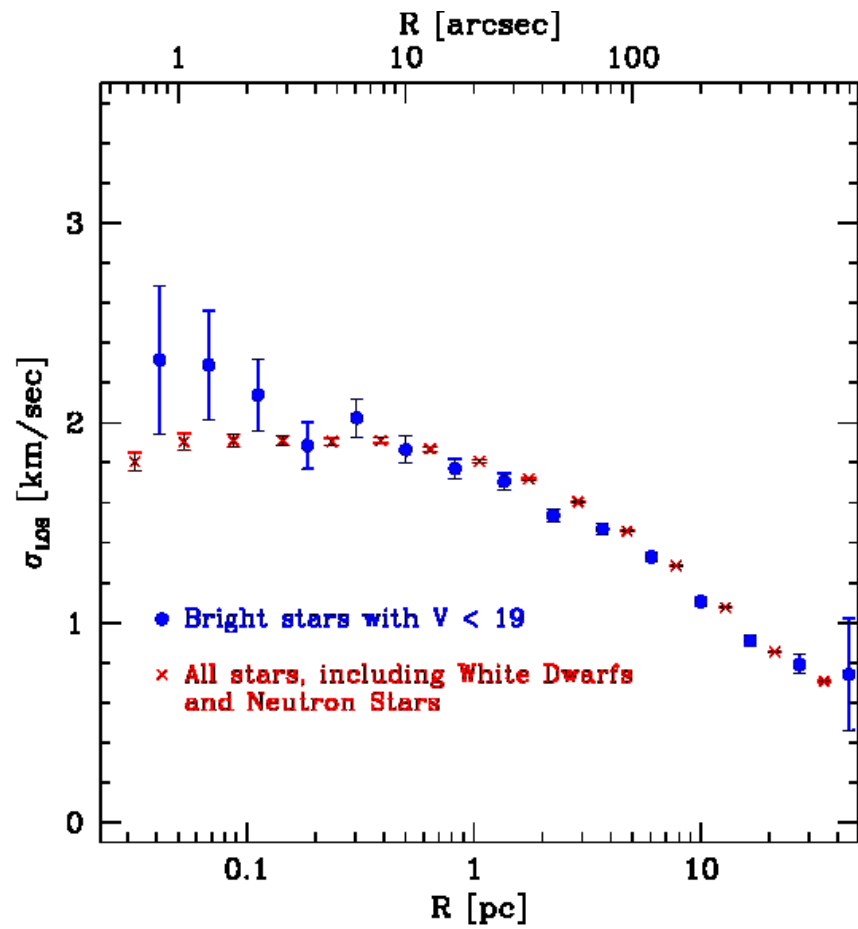
ガスなら速度が小さくなって終わりだが、恒星系ではジーンズの定理というものがあるので話はそんなに簡単ではない。つまり、重い星が軽い星にエネルギーを与えるということは、分布関数  $f$  が星の質量に依存するようになって、重い星はエネルギーが低いところに動くということになる。

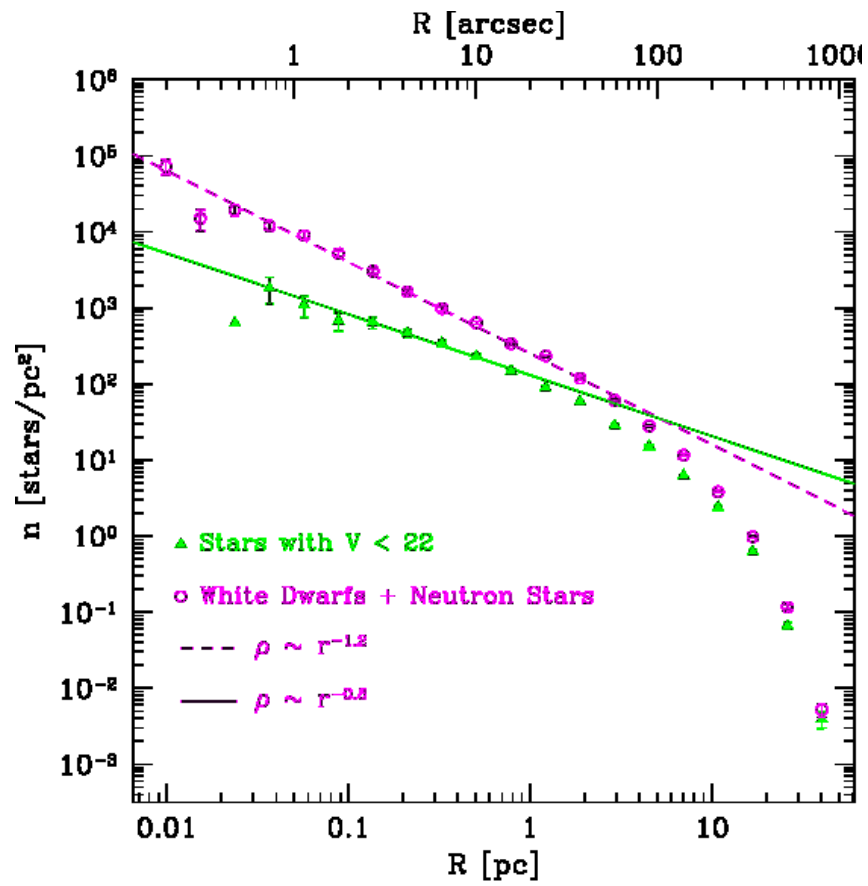
これはつまり、エネルギーが低い、より中心近くを運動する軌道に移るということである。つまり、星の質量分布がある恒星系が熱力学的に進化すると、重い星が中心に集まってくる。球状星団では最も重い星は初期に大質量星が超新星爆発してできた中性子星や、もうちょっと軽い星が進化し

てできた比較的重い白色矮星であり、どちらも暗い。つまり、球状星団の  $M/L$  が半径によらないと考えるのはかなり無理がある。というわけで、このブラックホールは怪しいのでは？と私を含めていろんな人が思った。

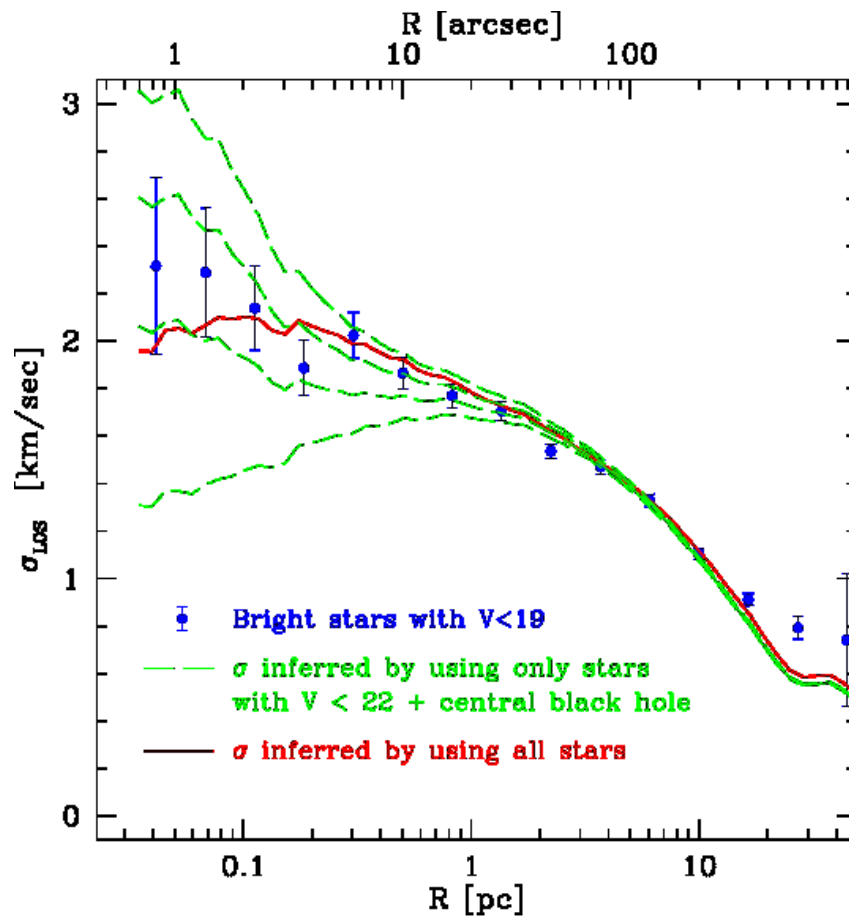
とはいっても、「間違ってるかもしれない」というだけでは人は納得しないので、数値シミュレーションで球状星団を生まれた時から現在まで進化させて、速度分散と輝度分布がどうなるか見てみることにした。**M15** は「コア崩壊型」と呼ばれる、中心に向かってどこまでも密度が上がるタイプの星団なので、現在ちょうどそのような密度(輝度)分布になるように初期条件を選んでみた。星の質量分布とかは普通に太陽近傍の観測から示唆されているものを使う。

結果は **Baumgardt et al., ApJ 2003, 582, L21** になって論文にしたわけだが、速度分散と輝度分布はそれぞれこんな感じになる。





で、観測の人達と同じように  $M/L$  一定を仮定して解析すると

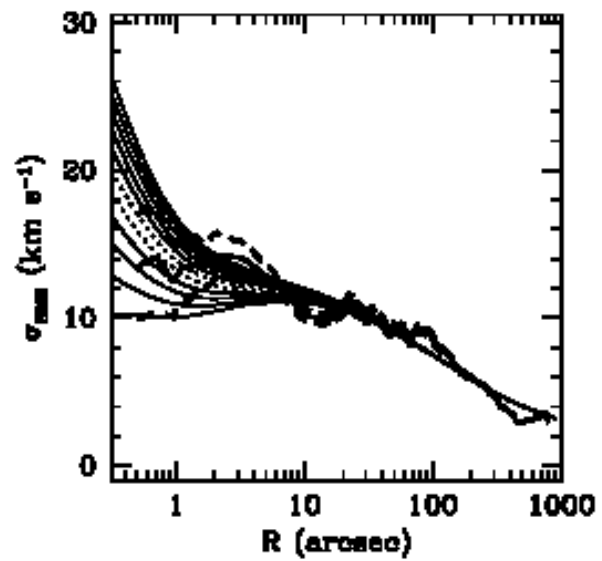
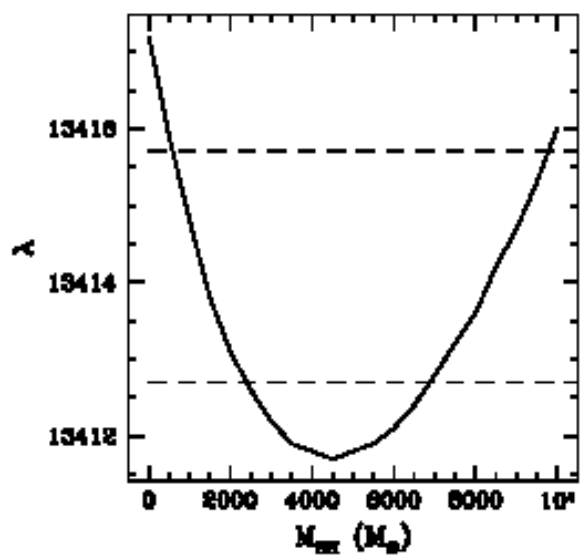


星だけでは中心で質量が足りなくて、ブラックホールが必要という結果に

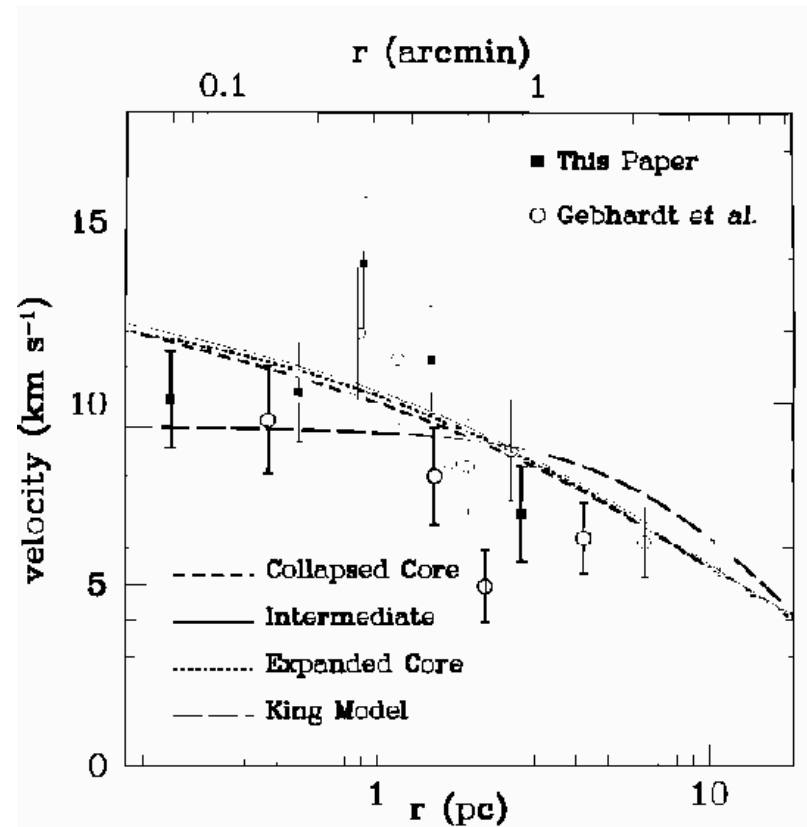
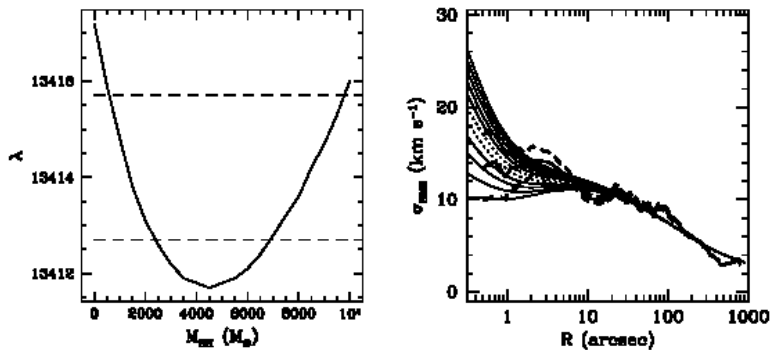
なる。モデル星団は **M15** より軽いので、その分をスケールすると、大体 **3000** 太陽質量くらいのブラックホールがあるという結論になる。

まあ、そういうわけで、多分ブラックホールではなくて普通に熱力学的な進化の結果中性子星等が中心に集まっているだけであろう。

という話で終わると、観測で論文書いた人が間抜けな感じがするが、実はもうちょっと話は複雑である。彼らは、 $M/L$  が一定ではない解析もしていて、それは別の人 (**Dull et al. ApJ 1997**) の、我々のと同じような数値シミュレーションの結果を使ったものであった。



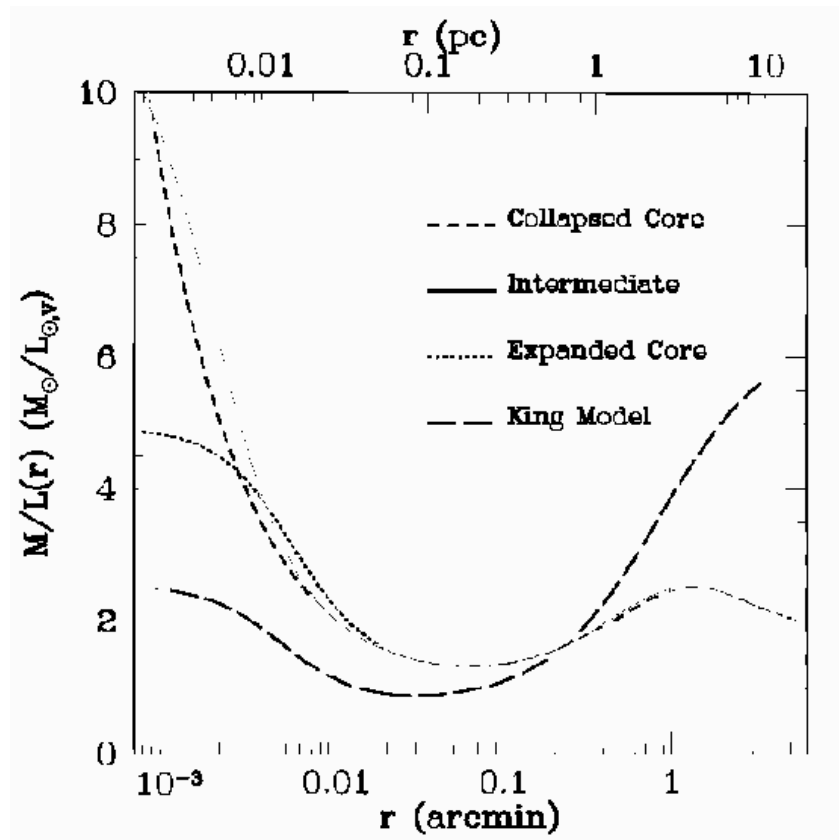
これであまり結果が変わらなかったから、彼らは安心して「ブラックホールがある」という結果を発表した。しかし、これはおかしな話で、実は **Dull et al.** のモデル星団はハッブルのグループの解析より高い速度分散を与えていた。

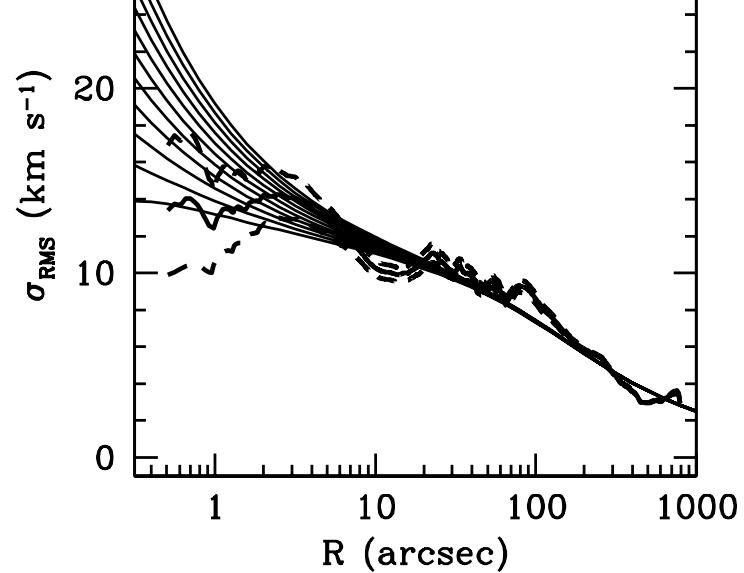
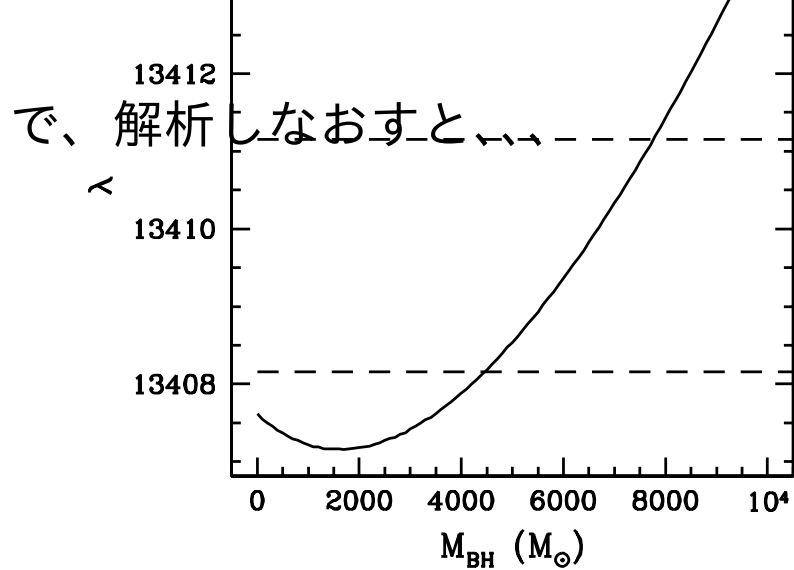




使っている輝度分布は同じなので、同じジーンズ方程式と同じ  $M/L$  プロファイルを使えば同じ速度分散が求まらないといけないのに、違う。

これは実は、**Dull et al.** の  $M/L$  プロファイルのグラフが大嘘で、横軸が **3** 倍間違っていたからだということが後で明らかになった。





ブラックホールはなくてもいいという、真っ当な結果になってしまった。  
 この結果については、**STScI** ではなく **NASA HQ** からプレスリリースが  
 でした。

「ブラックホールがある」という結論を出した人達の解析方法には間違ったところがあったわけではないが、彼らが使った、他の人 (**Dull et al.**) の計算結果の論文のグラフの1つの横軸が間違っていた。こんな間違いは避けようがない、と思うかもしれないが、この場合はそうでもない。というのは、**Dull et al.** の理論モデルの速度分散と、彼らが求めた速度分散がそもそもあってなかったので、解析の過程のどこかに間違いがあるのは明らかだったからである。

プレスリリースになるような研究でも、結構間違いというものはある、というのが一つの教訓である。あと、間違ったらそう認める、というのは大事だが、非常に難しい、ということでもある。

# もうちょっと余談

一昨日、「電波干渉計で **M87** 銀河の中心ブラックホールの撮像に成功した」という国際共同研究グループの発表があった



# 発表の概要

- 観測波長は **230GHz**。地球各地にあるミリ波望遠鏡で構成する「**EHT**」による観測。
- 観測した銀河は **M87**。距離は **16 Mpc**。おとめ座銀河団の中心天体。
- ブラックホール質量は **65 億太陽質量**

# 発表の概要

- 観測波長は **230GHz**。地球各地にあるミリ波望遠鏡で構成する「**EHT**」による観測。
- 観測した銀河は **M87**。距離は **16 Mpc**。おとめ座銀河団の中心天体。
- ブラックホール質量は **65** 億太陽質量

これについては、上と同じグループが同じ手法で決めた質量と撮像して決めた質量はよく一致していた。

# 余談の余談

但し、この「リング構造」はデータ解析のミスによるものである可能性も指摘されている。(Miyoshi 他 2019, 2020)

# ビリアル定理

ここまでで、**Collisionless Boltzman** 方程式の速度空間でのモーメントを考えて **Jeans** 方程式を導いた。ここではさらに空間全体のモーメントをとる。

式 **49** において、密度  $\nu$  を質量密度  $\rho$  で置き換え、さらに  $x_k$  を掛けて空間全体で積分する。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} d^3 x = - \int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{x_i} d^3 x - \int \rho x_k \frac{\partial \Phi}{x_j} d^3 x \quad (56)$$

右辺の最初の項は、例によって発散定理を使って書き直せる。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{x_i} d^3 x = - \int \delta_{ki} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 x = -2K_{kj} \quad (57)$$

これは、運動エネルギーテンソル  $K$  の定義を与える。



ついでに第二項はポテンシャルエネルギーテンソル  $W$  と呼ばれるものである。

さらに、 $\sigma^2$  の定義を使って、

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \quad (58)$$

但し

$$T_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3x, \quad \Pi_{jk} = \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3x, \quad (59)$$

さらに、 $j, k$  についての式と  $k, j$  についての式を足してやると

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3x = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (60)$$

さらに、慣性モーメントテンソル

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3x \quad (61)$$

を導入して、連続の式とか発散定理とかを使うと

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \rho(x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3x \quad (62)$$

で、結局

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (63)$$

これをテンサービリアル定理という。

さて、今定常状態 ( $I$  の時間微分が  $\mathbf{0}$ ) を考え、さらに上の式のトレースをとってみると、 $T, \Pi$  の定義からこれらの寄与は全運動エネルギー  $K$  の2倍になる。 $W$  の方は、 $\Phi$  の定義を使えば

$$W = \int \rho \sum_k \mathbf{x}_k \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_k} d^3 x = \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{\mathbf{x}_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x d^3 x' \quad (64)$$

ここで  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$  を入れ換えた積分を書き、両方を足すと

$$W = \frac{1}{2} \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x d^3 x' = \frac{1}{2} \int \rho \Phi d^3 x \quad (65)$$

というわけで、 $W$  は系の全ポテンシャルエネルギーである。

結局、

$$2K + W = 0 \quad (66)$$

が成り立つ。これを、スカラービリアル定理、または単にビリアル定理という。

今、系の全エネルギーを  $E$  とすれば、 $E = K + W$  であるから、

$$E = -K = W/2 \quad (67)$$

ということになる。つまり、定常状態にある自己重力恒星系では、必ず全エネルギーはポテンシャルエネルギーのちょうど半分であり、絶対値が運動エネルギーに等しい。これは球対称とかそういう仮定なしに常に正しい。

# ビリアル定理の応用

# 系の「比熱」

これまで何度か強調してきたように、無衝突ボルツマン方程式 **CBE** で記述されるシステムの力学平衡状態は熱平衡ではないし、自己重力系は熱平衡ではありえない。しかし、**King model** のように近似的に熱平衡なものもあるので、ここでエネルギーの出入りに対する系全体の応答、つまり比熱というものをちょっと考えてみることにする。

ビリアル定理から  $K = -E$  であったので、すぐにわかるように「エネルギーを奪うと運動エネルギーが増え、逆ならその逆になる」ということになっている。つまり、見かけ上比熱が負になっている。

これは重力が効く系では普通のこと、例えば地球を回る人工衛星といったものでも同様のことが起こっている。

この、「見かけ上比熱が負」ということが、熱力学的不安定を通して構造形成（自己組織化）が起きる基本的な理由である。

# 系の質量、 $M/L$

まず、系の「大きさ」についてどんなことがいえるかということをおさらいしておく。 $W$  は全ポテンシャルであったので、定義により以下のように書ける：

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (68)$$

今、粒子の質量がすべて等しい場合（あるいは、分布関数が質量によらない場合）を考えると、

$$r_v = \left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right\rangle^{-1} \quad (69)$$

を導入して、

$$W = \frac{-GM^2}{2r_v} \quad (70)$$

と書ける。この  $r_v$  を普通ビリアル半径という。なお、 $r_g = 2r_v$  のことを **gravitational radius** 重力半径ということもあるが、「重力半径」というと時と場合によってはシュワルツシルト半径だったりすることもあるので注意すること。とにかく、この  $r_v$  を使って、 $K = -W/2$  を書き直せば

$$|v^2| = \frac{GM}{2r_v} = \frac{GM}{r_g} \quad (71)$$

したがって、速度分散（系全体の平均）とビリアル半径がわかれば質量を決められる。



観測的には、球対称を仮定すれば、**3**軸方向の速度分散は等しいので、視線方向の速度分散の**3**倍が**3**次元速度分散ということになる。問題はビリアル半径のほうであるが、もちろん球対称（だけでは本当はだめで、さらに  $M/L$  が半径によらずに一定であるという仮定も必要）を仮定すれば表面輝度分布から **deprojection** して計算できる。

大雑把な見積りでよければ、例えば **half mass radius**（質量の半分が入っている半径） $r_h$  を適当に見積もって、それで  $r_v$  の代わりにしてもそれほど大きな誤差はない。典型的には

$$r_h \simeq 0.8r_v, \quad (72)$$

程度である。具体例をあげれば、プラマーモデルでは

$$r_h = \frac{3\pi}{16\sqrt{2^{2/3} - 1}}r_v = 0.77r_v, \quad (73)$$

ハーンキストモデルでは

$$r_h = \frac{(1 + \sqrt{2})}{3}r_v, \quad (74)$$

であり、仮想的な密度一様の球というものを考えると

$$r_h = \frac{3 \times 2^{2/3}}{5} r_v = 0.95 r_v. \quad (75)$$

というようなことになる。実際に観測から直接決められるのは、多くの場合  $r_h$  ではなく有効半径 **effective radius**  $r_e$  であり、これは質量ではなくて投影した輝度の半分が入っている半径である。一般に  $r_e < r_h$  であることはいうまでもないが、まあ、それほど大きな差にはならない。

# 回転系の偏平度（あるいは楕円銀河の回転）

今、 $z$ 軸まわりに対称な、回転している銀河を考えると、ポテンシャルテンソルについては対称性から

$$W_{xx} = W_{yy}; \quad W_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (76)$$

で、運動エネルギーについても同様にクロスタームは消えるので、結局テンソルビリアル定理で残るのは

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0; \quad 2T_{zz} + \Pi_{zz} + W_{zz} = 0 \quad (77)$$

の**2**つだけである。この**2**つから、

$$\frac{2T_{xx} + \Pi_{xx}}{2T_{zz} + \Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}} \quad (78)$$

となる。今、子午面環流みたいなものはないとすれば、 $T_{zz} = 0$ で、

$$2T_{xx} = \frac{1}{2} \int \rho v_{\phi}^2 d^3x = \frac{1}{2} M v_0^2 \quad (79)$$

(これは  $v_0$ 、つまり平均の回転速度の定義と思って下さい)。同様に

$$\Pi_{xx} = M\sigma_0^2 \quad (80)$$

これは視線方向（横から見ているとして）のランダム速度の平均 (**r.m.s**) である。あと、 $z$  方向についてはなにかいえないかという、 $x$  方向との速度分散の異方性パラメータ  $\delta$  を導入して

$$\Pi_{zz} = (1 - \delta)\Pi_{xx} \quad (81)$$

と書いておくことにする（これは、球対称な系の速度分散の異方性とはまったく違ったものであることに注意）。これらをまとめると、

$$\frac{v_0^2}{\sigma_0^2} = 2(1 - \delta)\frac{W_{xx}}{W_{zz}} - 2 \quad (82)$$

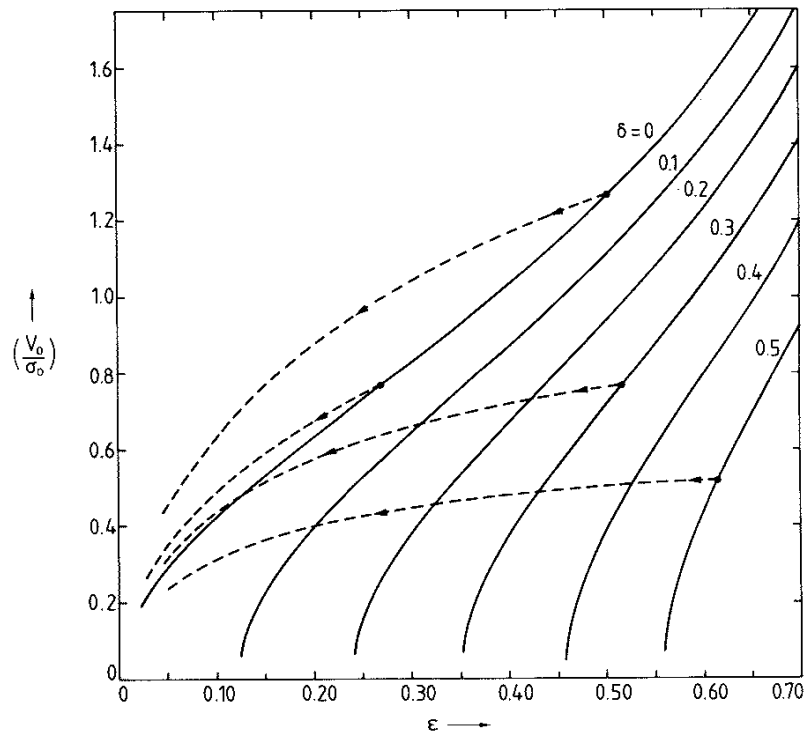
ということになる。

さて、 $W_{xx}/W_{zz}$  と、銀河の「形」の関係についてであるが、一般に密度が以下のように書ければ

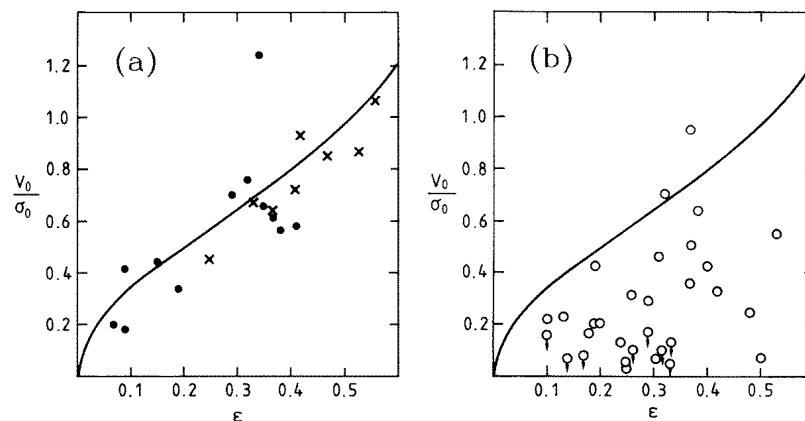
$$\rho = \rho(m); \quad m^2 = a_1^2 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \quad (83)$$

言い換えれば、密度が軸比一定の楕円体の表面上で一定なら、 $W_{ii}/W_{jj}$  は  $a$  だけの関数で  $\rho(m)$  の関数形によらないということがわかっている。実際に書くとかなり面倒な形をしているので、具体的な形は **BT** をみてもらうことにして、結果だけを使うと、要するに速度の非等方性  $\delta$  と扁平度  $\epsilon 1 - b/a$  を決めれば  $\frac{v_0}{\sigma_0}$  が決まるということになる。どんな感じかを **BT**

の図から示すと



**Figure 4-5.** The relationship between the rotation parameter  $v/\sigma$  and ellipticity  $\epsilon$  predicted by (4-95) for elliptical galaxies whose isodensity surfaces are similar coaxial oblate spheroids. The dashed curves show the movement of the point corresponding to the observable quantities  $\tilde{v}/\tilde{\sigma}$  and  $\tilde{\epsilon}_a$  when the galaxy's inclination angle  $i$  is decreased from  $i = 90^\circ$ .



**Figure 4-6.** (a) The positions in the  $(v/\sigma, \epsilon)$  plane of elliptical galaxies (dots), and of spheroids (crosses), that have luminosities smaller than  $L = 2.5 \times 10^{10} L_{\odot}$ . (b) The same as (a) but for elliptical galaxies brighter than  $L = 2.5 \times 10^{10} L_{\odot}$ . (After Davies et al. 1983.)

まあこんな感じになる。上の図は、 $\epsilon$  の関数として  $\frac{v_0}{\sigma_0}$  がどう変化するかを、 $\delta$  のいくつかの値について示したものである。破線は、真横でない方から見たらどういうふうになるかを、いくつかの場合について示したものである。下の図は、実際の観測結果と  $\delta = 0$  の線を重ねて書いてみたものである。暗い楕円銀河は  $\delta = 0$  の線に近いところに集まっているのに対し、明るいものは可能な範囲全体にあり、どちらかというとな下の方（回転が小さく、おそらく異方性が大きいほう）に集まっているということが見てとれる。このような構造の違いは、それぞれの銀河がどうやってできたかということになにか重要な手がかりを与えているはずである。

とはいうものの、どうやってできたかということに対する標準的な理解というものがあるわけでは必ずしもない。ここでは、せっかくなので一つの考え方として、合体説（楕円銀河のうち、特に大きいものは銀河同士の合体でできた）をとった場合にはどのような説明が可能かということを見てみる。これ以外の解釈がないというわけではない。

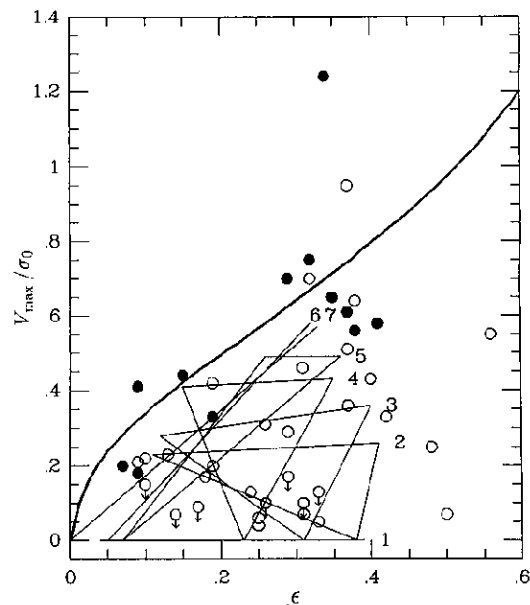


Fig. 6. Ratio of the maximum rotation velocity to the central velocity dispersion ( $V_{\max}/\sigma_0$ ) plotted against the ellipticity ( $\epsilon$ ). Three vertices of triangles indicate the numerical results observed from the  $a$ -,  $b$ -, and  $c$ -axes. The open circles indicate observational luminous ellipticals ( $M_B < -20.5$ ); the filled circles indicate less luminous ellipticals ( $M_B > -20.5$ ). The data were taken from Davies et al. (1983).



これは **Okumura et al. (1991, PASJ 43, 781)** によるシミュレーションの結果と上のグラフを重ねたものである。シミュレーションはすべて**2**つの等方的で回転を持たないプラマーモデルを2つ放物軌道でぶつけたもので、番号順に最初の軌道の近点距離が大きくなる（**4**で  $r_p/r_h = 2.6$  である）。

大雑把にいうと、番号の大きいものほど軌道角運動量が大いので、 $v_0/\sigma_0$  が大きくなる。もっとも、ある程度より大きくなっていないことに注意してほしい。これは要するに合体するためにはかなりの軌道角運動量を捨てないといけないので、残った系が持つ角運動量には上限があるためである。

合体後の銀河は特別な場合**(1,7)**を除いて3軸不等なので、その3方向からみてグラフ上に点を取り、それを結んで**3**角形を書いている。大雑把に言って、適当な方向から見たときにはこの**3**角形の中にあると思ってい（実際にある方向から見た時にどう見えるかというのはもうちょっとややこしいが、いまはそのあたりの議論は省く）。

シミュレーションの結果からわかることは、仮に楕円銀河が合体で出来たとすれば、暗いものは初期に近点距離の大きな軌道（おそらく楕円軌道）

をもち、明るいものは近点距離の小さな軌道から合体したものが比較的多いということになる。

まあ、もうちょっと素直な解釈は、暗いものは合体ではなく、円盤銀河からガスがなくなったり円盤が摂動を受けて厚くなったりしてできた、というものかもしれない。

# ジーンズ不安定

ここまで、自己重力多体系の平衡形状を（ごく簡単な場合だけ）扱ってきたが、ここからしばらくは平衡形状ではなく時間発展について考えることにしたい。

時間発展といっても、もとの方程式が強い非線形性を（加速度の項に）持つので、一般的な場合を解析的に扱うことはほとんど出来ない。そこで、まず、平衡状態から無限小だけずれている場合に対して線形化した発展を考えるとということにする。さらに、話を簡単にするために、「無限一様」な平衡状態とし、まず無衝突ボルツマン方程式ではなく流体の話を考える。

# このへんまでのまとめ

- 恒星系 (重力だけで相互作用する多数の粒子からなるシステム) の進化は位相空間での **6** 次元分布関数に対する無衝突ボルツマン方程式で記述される。
- 特に、時間定常解については「ジーンズの定理」から分布関数は「運動の積分」の関数であることが導かれる
- 球対称な系の分布関数はエネルギーと全角運動量だけに依存する
- 軸対称な系では、エネルギー、角運動量の他に「第三積分」があるかどうかは一般的にはわかっていない。簡単なポテンシャルで、「第三積分」があるように見える領域とない領域が現れる。
- **3** 軸不等では、「積分があるポテンシャル」もあるが一般にはわからない。
- 無衝突ボルツマン方程式の速度でのモーメントをとることで、ジーンズ方程式が導かれる。これは流体のオイラー方程式 (運動方程式) に相当する。

- これから、観測される速度分散から系の構造・質量を決めることができる。
- さらに全空間でのモーメントをとって、テンソルビリアル定理が導かれる。これから、系の球対称からのずれ等を議論できる。

# ジーンズ不安定

良く考えると、宇宙膨張と構造形成の関係はあんまり簡単ではない。

- ビッグバン直後の宇宙は熱平衡、一様密度
- 今の宇宙は全く一様ではない(少なくとも「小さな」スケールでは。メガパーセクとか)
- 理論的にはどうやって一様でなくなったか？

理解する枠組み: 重力不安定(ジーンズ不安定)

# ジーンズ不安定(続き)

- 「理論的」枠組み:大抵、摂動論(解けるものからの無限小のずれを扱う)
- ここでもそういう話
- で、ダークマター(無衝突ボルツマン方程式に従う)だと面倒なので断熱のガスで考える(あとで述べるが、安定性条件は同じになる)

# 流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (84)$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (85)$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (86)$$

で記述される。

さらに状態方程式がある。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいい)



# 記号のリスト

$\rho$ : 密度

$t$ : 時間

$v$ : 速度

$p$ : 圧力

$\Phi$ : 重力ポテンシャル

$G$ : 重力定数

# 線型化

- 平衡状態からの無限小のずれの変化を見るため、ベースの解とずれの部分にわけると。
- $\rho, p, v, \Phi$  をそれぞれ  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  という格好
- 添字 **0** がつくものはもとの方程式の平衡解であり、**1** がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）とする。

で、方程式を書き直す。

# 線型化した方程式

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (87)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (88)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (89)$$

$$p_1 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho_1 = v_s^2 \rho_1 \quad (90)$$

ここで  $v_s$  は音速である。

# ベースが無限一様の場合

ベースは無限一様でいたるところ密度、圧力が等しく、速度も  $\mathbf{0}$  とすると、連続の式とオイラー方程式が

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (91)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (92)$$

となる。下 **2** 本は見かけはかわらない。

これを、 $\rho_1$  だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \quad (93)$$

# この方程式の振舞いは？

- 最初の2項をみれば普通の波動方程式、
- 最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。
- 波長が短い極限では普通の波動方程式
- 波長が長い極限では空間2階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

# 分散関係 (空間波長と時間振動数の関係) を求める

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\rho_1 = C e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (94)$$

として代入すれば

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (95)$$

ということになる。したがって、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \quad (96)$$

と書くことにする。

# 分散関係

- $k > k_J$  なら  $\omega$  は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $k = k_J$  なら  $\omega = 0$  で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $k < k_J$  なら  $\omega$  は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

なお、一応念のために書いておくと、式 **(94)** の形の解だけを考えるのは任意の初期条件からの解が（連続性とかを仮定すれば）この形の解の線形結合で表現できるからである。解の線形結合が解であるのは方程式が線形だからであり、任意の解が表現できるのは要するにフーリエ変換が完全系をなすからである。

# 分散関係からいえること

- 波長が短ければ普通の音波
- 波長が  $1/k_J$  より長いと時間の指数関数で進化
- つまり、長い波長のモードは密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）

いいかえると

- 十分に波長が長いと必ず不安定になる
- 重力があると無限に一様な状態というのは温度無限大でない限り必ず不安定



# ジーンズ波長

$k_J$  に対応する波長: ジーンズ波長  $\lambda_J$

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} v_s \quad (97)$$

ジーンズ波長くらいの半径の球を考えると、

- 運動エネルギー:  $M_J v_s^2$  の程度
- 重力エネルギーは  $GM_J/\lambda_J$  の程度、
- $M_J$  はジーンズ質量で (半径  $\lambda_J$  の球の質量)

計算すると、運動エネルギーと重力エネルギーが大体等しい。ジーンズ波長はそういう長さ。

# ここまでの解析でごまかしたところ

- 一様密度の物質があれば、ポアソン方程式の右辺が**0**じゃないから重力ポテンシャルは一様な値というのは何かおかしい
- が、一様で無限にひろがっているなら、重力ポテンシャルが場所によって違うのも何か変

宇宙膨張にのった座標系にすればこの問題は解消はする。

さて、 $k_J$  というのは直観的にはどういうものかというのを考えてみる。 $k_J$  は波数なので、その逆数に  $2\pi$  を掛けると波長になる。これをジーンズ波長  $\lambda_J$  といって、式にすると

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} v_s \quad (98)$$

である。

今、半径がジーンズ波長くらいの球を考えてみる。この単位質量当りの運動エネルギー(熱エネルギー)は、もちろん  $v_s^2$  の程度である。これに対して重力エネルギーは  $GM_J/\lambda_J$  の程度、ここで  $M_J$  はジーンズ質量で半径  $\lambda_J$  の球の質量である。 $\lambda_J$  に上の式を入れて計算すると、結局重力エネルギーが定数を別にして  $v_s^2$  の程度になることがわかる。

つまり、熱エネルギーより重力エネルギーが大きくなるような長さの摂動は成長するということになる。

# 恒星系でのジーンズ不安定とランダウ減衰

恒星系の場合を考えることにしよう。

# CBEの線形化

何度も出てきたがもう一回式を書いておく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (99)$$

ここで  $f$  は **6**次元位相空間での分布関数である。 $\Phi$  は重力ポテンシャルであり、以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho. \quad (100)$$

$G$  は重力定数であり、 $\rho$  は空間での質量密度

$$\rho = m \int d\mathbf{v} f, \quad (101)$$

である。これを流体の時と同様に線形化して、その振舞いを調べる。分布関数を  $f_0 + f_1$ 、ポテンシャルを  $\Phi_0 + \Phi_1$  とし、添字 **0** がつくほうは定常

解であるとして式を整理すれば

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (102)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = -4\pi G \int f_1 d\mathbf{v}. \quad (103)$$

ということになる。これが線形化された無衝突ボルツマン方程式である。

# ジーンズ不安定

上の線形化されたボルツマン方程式は、平衡解の回りならば何でも使えるが、ここではもっとも簡単に解析できる場合として空間分布が一様な場合を考える。これから  $f_0$  は速度だけの関数であり、 $\Phi_0$  は定数としていいことになるので

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (104)$$

と少し式が簡単になる。まず、流体の場合と同じような平面波型の解を考えてみよう。

$$f_1 = f_a(\mathbf{v}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (105)$$

$$\Phi_1 = \Phi_a \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (106)$$

速度空間の方にも伝わっていく波とかいうのも考えられないわけではないが、とりあえずそういうのは考えない。これらを上の線形化した式に入れ

れば

$$(-\omega + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})f_a(\mathbf{v}) - \Phi_a \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (107)$$

$$-k^2 \Phi_a = 4\pi G \int f_a d\mathbf{v} \quad (108)$$

となる。これらから  $f_a$  を消せば、 $\Phi_a$  も落ちて

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{k \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v} = 0 \quad (109)$$

となって、 $f_0$  が与えられていれば  $k$  と  $\omega$  の関係、すなわち分散関係を与える。

もっとも、これはちょっと困った式で、 $k \cdot \mathbf{v} - \omega = 0$  が特異点になっている。したがって、実数の振動数を考えるのはすこし厄介な話になる。まず、臨界点、すなわち振動数が 0 の場合と、不安定、すなわち振動数が純虚数の場合を考えよう。



# 臨界点

式が繁雑なので、いま、波数ベクトルを  $x$  軸方向にとることにすると、分散関係は

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{k v_x - \omega} d\mathbf{v} = 0 \quad (110)$$

臨界安定で  $\omega = 0$  とすれば、結局

$$k_J^2 = -4\pi G \int \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{v_x} d\mathbf{v} \quad (111)$$

となる。 $f_0$  が  $v_x = 0$  で有限で微分可能なら積分は求まるので、これから  $\omega = 0$  となる波数  $k_J$  は決まる。

流体の場合と対応をつけるために、速度分布  $f_0$  をマックスウェル分布

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \quad (112)$$

にしてみる。これは例によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv = \sqrt{2\pi\sigma^2} \quad (113)$$

を使って全部積分できて、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{\sigma^2} \quad (114)$$

となる。これは、流体の場合と同じになっている。つまり、中立安定な波長（ジーンズ波長）は、恒星系と流体で同じである。

# 不安定な場合

次に、振動数が純虚数の場合を考えてみる。この時は、 $\omega = i\gamma$  として元の式にマックスウェル分布を入れて整理すると

$$1 + \frac{2\sqrt{2}\pi G\rho_0}{k\sigma^3} \int \frac{v_x e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{kv_x - i\gamma} dv_x = 0 \quad (115)$$

ここで、被積分関数の分母を実数にするために

$$\frac{v_x(kv_x + i\gamma)e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{k^2v_x^2 + \gamma^2} dv_x = 0 \quad (116)$$

と書き直すと、虚部は奇関数なので落ちる。実部は

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2}}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\pi\beta e^{\beta^2} [1 - \text{erf}(\beta)] \quad (117)$$

なる関係を使って

$$k^2 = k_J^2 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}\gamma}{\sqrt{2k\sigma}} \exp\left(\frac{\gamma^2}{2k^2\sigma^2}\right) \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2k\sigma}}\right) \right] \right\} \quad (118)$$

なんだかよくわからないが、まあ、 $k$  と  $\omega(\gamma)$  の関係を与えてはいる。 $k < k_J$  なら、ある実数  $\gamma$  (正負どちらでも) があって上を満たす。ただし、 $k = k_J$  の場合と  $k = 0$  の極限を除いては、値は流体の場合とは一致しない。

というわけで、波長がジーンズ波長よりも長いモードは流体と同様不安定で、勝手に成長することになる。

# van Kampen mode

さて、それでは、音波に当たるような振動数が純実数のモードというものはあるのだろうか？これについては、標準的な教科書でも若干混乱した記述がなされていることがある。以下、**van Kampen** の論文 (1955, **Physica**, 21, 949) に沿った理解を試みることにする。分散関係の一つ前の式に戻ってみると、

$$(-\omega + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) f_a(\mathbf{v}) + \frac{4\pi G}{k^2} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \int f_a d\mathbf{v} = 0 \quad (119)$$

となっている。面倒なのでまた  $y, z$  方向についてはあらかじめ積分すると、

$$(-\omega + k v_x) g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x}{k} f_0(v_x) \int g dv_x = 0 \quad (120)$$

ただし、 $g$  は  $f_a$  を  $y, z$  方向に積分したものである。また、 $f_0$  は等方的

であるとし、さらに

$$\int \int v^{-1} \frac{df_0}{dv} dv_y dv_z = -2\pi f_0(v_x) \quad (121)$$

なる関係を使った。これは、 $v_x$  一定の平面上で極座標に変換すればすぐに出てくる。上の式は  $g$  についての線形斉次な方程式で、

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x f_0(v_x)}{k \omega - kv_x} \quad (122)$$

という解を持つ。ここでは、 $\int g dv_x = 1$  となるように規格化した。ただし、意味のある解であるためには

$$-\frac{8\pi^2 G}{k} \int \frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - kv_x} dv_x = 1 \quad (123)$$

を満たすようになっている必要がある。これは、最初に出した分散関係と実は同じ式である。

最初にもいったように、この式がよろしくないのは  $v = \omega/k$  で積分が特異になるからである。意味のある解を求める一つの考え方は、 $g$  を超関数に拡張してしまうことである：

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x f_0(v_x)}{k} \left[ \mathcal{P} \frac{1}{\omega - kv_x} + \lambda \delta(\omega - kv_x) \right] \quad (124)$$

ここで  $\mathcal{P}$  は主値をとるということで、要するに積分の不定性を  $\delta$  関数のほうに押しつけてみたというだけである。実際に、規格化を満たすという条件から  $\lambda$  の値を決めることができる。この「モード」は、任意の  $\omega$  と  $k > k_J$  なる  $k$  のすべての組合せに対して存在する。これを **van Kampen mode** という。

これがいったいどういうものかを少し考えてみよう。まず、 $\delta$  関数の分は、 $v_x = \omega/k$  のところにだけ値があるということを示している。つまり、位相速度が摂動を受けていないもともとの速度と等しい、いかえれば与えたものがそのままラグランジュ的に動いていくようなものである。これは、いま重力がまったくない極限を考えれば、単に摂動がまわりと相互作用することなくそのまま動いていくというものであると考えられる。これにたいして、もう一つの項は重力による応答を示していると考えていい。

このへんはちょっとお話しになって申し訳ない（詳細を知りたいひとは **van Kampen** の原論文に当たってほしい）が、**van Kampen** モードは完備であることがわかっている。つまり、任意の摂動を **van Kampen mode** の組合せとして表現できる。



# Phase Mixing

さて、任意の摂動が、減衰しないモードの組合せとして表現できるのなら、それはなにか音波のような伝わっていく波になっているのであろうか？実はそんなことはない。これは、以下の簡単な例で示すことができる。1次元で、重力がない系である有界な領域に摂動 (**overdensity**) を与えたとする。で、簡単のために周期境界で、右から出ていったものが左から入ってくるとしよう。もちろん、ちゃんと適当なポテンシャルを考えると、無限一様な場合を考えると、かしても本質は同じである。(無限一様な場合は、単に周期的な摂動を与えたというのに対応する)

すると、時間がたつに従って摂動が引き延ばされていくということがわかる。このために、例えば密度の変化といった量は時間がたつにしたがって減衰していく。

つまり、**singular** な **van Kampen mode** 自体は減衰しないが、それを重ね合わせた有限の広がりを持つ摂動は減衰するように見える。これが通常 **phase mixing** と呼ばれるものである。

# Landau Damping

さて、モードがあって、世の中はその重ね合わせであるというのなら、それで話はおしまいではないかとおもうのが人情だが、普通はそういう話にはなっていない。というのは、**Landau Damping** という難しいものがあるということになっているからである。これはどういう原理ででてくるかというと、要するに複素数の  $\omega$  があると信じて、そういう解を求めると、ちゃんとそういうものが見つかるというものである。つまり、摂動の速度方向の分布  $f_a$  をうまくとってやると指数関数的に減衰するモードがでてくる。ただし、注意して欲しいのは、これは、 $f_a$  に制限をつけないと出てこないということである。不連続な  $f_a$  を仮定すれば、時間のベキでしか減衰しないような解を構成することも出来る。ただし、そういった解はモードの形、つまり位置、時刻の指数関数の形に単純に書けるとは限らない。

逆にいえば、解が指数関数の形に書けると仮定すれば、ジーンズ波長より短ければそれは指数関数的に減衰するわけである。

今、簡単のために重力がない一次元系を考える。この時 **van Kampen**

**mode** は単なる  $\delta$  関数なので、初期の波数が  $k$  であるような摂動は

$$f_1(x, v, t) = g(v) \exp[ik(x - vt)] \quad (125)$$

という形をしている。これは、自明な解になっているということは式を良く見ればわかる。

しかし、注意して欲しいのは、これは最初に安定性解析の時に仮定した  $f_a(v) \exp[i(kx - \omega t)]$  という形とは違うということである。これは、振動数  $\omega$  が  $v$  そのものであり、速度空間のなかでの位置に依存するためである。

このことをいいかえると、上のような「自然な」解があるにもかかわらず、モード解析をすると **van Kampen mode** のような **singular** なものが出てくるのは、モード解析の仮定として位相速度が粒子の速度に寄らないようなものを考えたからであるともいえる。

さて、上の「自然な」解はどのように振舞うかをちょっと見てみよう。密度は、

$$\rho_1(x, t) = e^{ikx} \int g(v) e^{ivt} dv \quad (126)$$

これから、例えば  $g(v)$  が

$$g(v) = \begin{cases} 1/2v_0 & |v| < v_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (127)$$

みたいなものだと、 $1/t$  で減衰するという解がでてくる。

このような減衰が起きるのは、初期条件が非常に特別なものであるためであるということに注意してほしい。つまり、速度ごとに波の位相速度が違うのに、初期条件としてその空間位相がすべてそろったものを考えたわけである。そうすると、時間がたてば位相はずれていくので速度方向に積分して見た波の振幅は小さくなっていくことになる。これは、速度方向の「波数」に時間が生で入ってくるためである。

なお、 $g(v)$  に適当な形を仮定すれば、もっと速く減衰するものも作れる。

もちろん、無衝突ボルツマン方程式にしたがった進化は可逆過程である（エントロピーを生成しない）ので、原理的には逆に振幅が大きくなるような初期条件も存在していないといけない。実際、減衰していく解で、どこかで時間反転すればそういう解が作れるわけである。

なお、今日の話で要領を得ないと思った人は、、、この辺は基本的で大事な問題であるわりにはあまり良いテキストも論文もないので、なかなか難しい。

粗視化エントロピー、 **violent relaxation**

# 粗視化エントロピー

前節で扱った、ジーンズ波長より短い摂動の（線形での）減衰は、無衝突系に固有の現象であり、流体ではこれに対応するものはない。ここでは、まず、その物理的意味についてもう一度考え直して置こう。

$$f_1(x, v, t) = g(v) \exp[ik(x - vt)] \quad (128)$$

初期の摂動の位相が  $v$  によらないとすれば、その時間発展は上式で与えられる。したがって、密度はこれを  $v$  で積分したものであり、式をじっとみればわかるように  $g(v)$  のフーリエ変換になっている。したがって、 $g(v)$  を選べばいろんな時間依存を持つものが作れることになる。

さて、無衝突系では普通の意味ではエントロピー生成はない。これは、分布関数  $f$  が軌道にそって保存するからであった。しかし、上の式からわかるように、速度方向の構造は、時間がたつにしたがってどんどん細かくなっていってしまう。これに対して、実際の系では粒子数が有限であり、分布関数に無限に細かい構造をつくることが出来るわけではない。また、観測するとか、数値計算するとかいうことを考えると、どこかで分解能よ



りも構造が細かくなってしまふことになる。

つまり、通常のエントロピーは

$$S = \int f \ln f dx dv \quad (129)$$

であるわけだが、これを適当な分解能で荒く見たものを考えてみよう。それにはいろいろな考え方があるが、ここでは適当なフィルタ  $g(x, v; h)$  というものを考え、

$$\int g(x, v; h) dx dv = 1 \quad (130)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int f g(x_0 - x, v_0 - v; h) dx dv = f(x_0, v_0) \quad (131)$$

というようなもの、つまり、適当な極限で  $\delta$  関数になるようなものを考える。

で、粗視化された分布関数  $\hat{f}_h$  というものを

$$\hat{f}_h = \int f g(x - x_1, v - v_1; h) dx_1 dv_1 \quad (132)$$

と定義する。

ちゃんと計算して見せた方がもちろんいいんだけど、結局どういうことか  
いえるかっていうと、粗視化されたエントロピー

$$\hat{S} = \int \hat{f} \ln \hat{f} dx dv \quad (133)$$

というものを考えると、これは増えるということである。

というわけで、どういう風に増えるかってのは計算練習。

さて、ここで重要なのは、この「粗視化されたエントロピーは増える」という性質は、平衡からのずれが線形でも非線形でも変わらないということである。言い換えれば、仮にいま平衡状態から遠くはなれたものをなにか考えたとして、その時間進化を適当に粗視化したエントロピーで見たとし

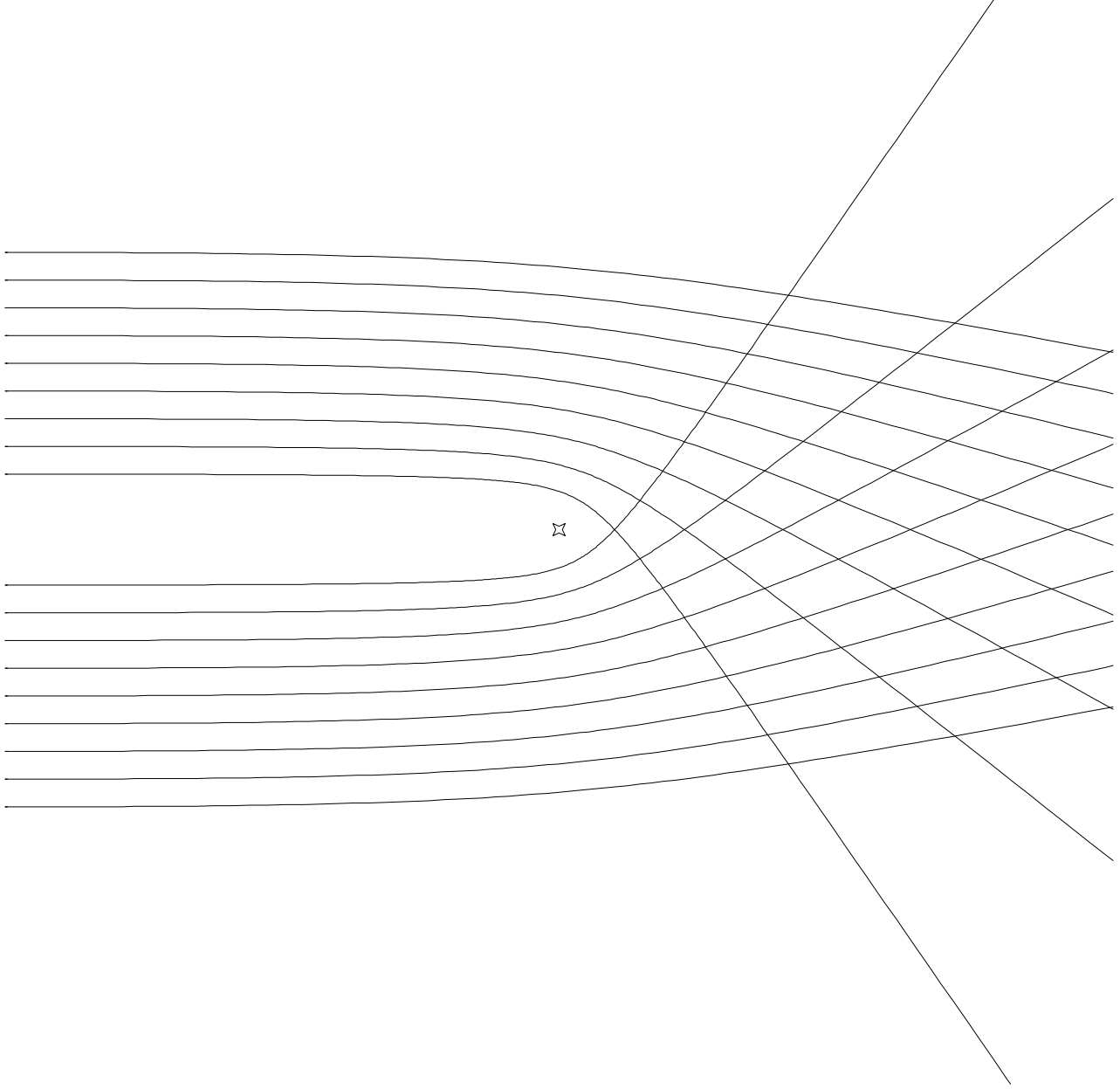
よう。そうすると、 $\hat{S}$ は時間がとともに増えて、そのうちにある定常値に達する。しかし、これは、あくまでも速度空間での分布関数の構造が粗視化のために分解できなくなったというだけで、系が物理的に平衡状態に向かって進化しているわけではないことに注意しなければならない。

# Dynamical Friction

さて、ここで少し違った状況を考えてみる。今、温度  $0$ （だと、本当はジーンズ不安定が起きるわけだがこれはとりあえず考えない、すなわち自己重力は無視する）の、無限に一様な物質分布の中を、適当な大きさを持った球対称なポテンシャルの摂動（質点によるものでも **OK**）が動いているとしよう。

座標系はこの質点の運動の方向を対称軸にとった円筒座標で考えていい。この時、バックグラウンドの物質がどう動くかを考えると、質点の方に固定した座標系では図のようになる。つまり、平行に入ってきたものが散乱されるだけである。

ここで、しかし、もともとの止まっていた物質分布に固定された座標系で考えると、散乱されたものは、左向きと中心向きの速度をもらうことになり、ネットに加速されている。つまり、エネルギーをもらっているのである。



回りがネットにエネルギーをもらっているので、動いている質点のほうは減速されなければならない。これが **dynamical friction** と呼ばれるものである。この効果は、別に動いているものが単純な質点のポテンシャルとかでなくても、**3次元空間**のなかで有界なものが動いていれば常に働くということに注意してほしい。

すなわち、一方向に進む平面波というようなものを考えるとネットにエネルギーのやりとりは出来ないことになるが、孤立波とか非周期的な摂動とかを考えるとちゃんとそれが非線形なダンピングを受けることになる。

もうちょっと別な例としては、サイクロトロン加速をあげることができる。この場合、加速される粒子はエネルギーをもらっても周期が変わらないため、電場を周期的に掛けることで（非相対論的な範囲で）加速を続けることができる。

このように、摂動と回りの相互作用を考えれば、実際にエネルギー交換がおきてそれが摂動のエネルギーを回りに伝えるということ自体は起こり得る。

ただし、この場合でも、やはりエントロピー生成はないということは依然として注意が必要である。 **Dynamical Friction** の例では、質点の運動エ

エネルギー（これはエントロピーを持たない）が回りの粒子の運動に変換されたわけだが、回りの粒子の運動は依然としてシステマティックなものでありランダム成分を持たないので、エントロピーは生成されていないのである。

# Violent relaxation 理論

ここまで述べてきたことは、

- 無衝突過程では (**phase mixing** では)、粗視化エントロピーを増やすことができる。
- 重力があっても、線形の **phase mixing** 以外の要因で粗視化エントロピーが増えるわけではない。

とまとめることができる。



# Violent relaxation 理論

**phase mixing** では粒子のエネルギーが変わらないので、通常の意味で熱平衡に近付いているのではないということはおそらくであろう。しかし、重力がある場合はどうだろうか？エントロピーが生成されていないからといって、なんらかの意味で熱平衡に近付いていないと断言できるだろうか？

このような問題意識には、観測的な理由もないわけではない。それは、楕円銀河というものの存在である。

楕円銀河の、半径方向の密度（表面輝度）分布は比較的に通性が高いということがわかっている。具体的には、いわゆる  $r^{1/4}$  則、あるいは **Hernquist Profile** で良く近似できている。(最近の論文だともうひとつパラメータがある **Sersic profile** が使われることも多い)

橿円銀河がどういうふうにして出来たかは良くわかっていないが、初期条件がどれもこれも非常に良く似ていたというのはあまりありそうにない。それにも関わらず、みんなが良く似た形をしているというのは、なんらかの熱平衡にむかうような緩和過程の存在を示唆しているのかもしれない。

というようなことを考えて、**Lynden-Bell (1967)** は **violent relaxation** というものを提案した。彼の論理は、大雑把にいうと以下のようなものである

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 粒子のエネルギーの変わり方は初期の位置（位相空間内での）によって決まるので、エントロピーが変わるとか、ランダム化されるとかいうことはないが、粗視化してみれば粒子のエネルギーの変わり方はランダムとみなせるはずである。
- 従って、このランダムな変化に対する熱平衡が存在するはずである。これを **Lynden-Bell** 統計と名付ける。
- 力学平衡に向かう間は、単に **phase mixing** だけが起きているわけではなくこの **Lynden-Bell** 統計に向かう進化も同時に起きているはずである。

なお、**Lynden-Bell** 統計であって普通の **Maxwell-Boltzman** 統計には従わない理由は、 $f$  の値に制約がある（初期の分布の最大値を超えられない）からであるそうである。

**Lynden-Bell** は大変偉い先生であるので、この提案は大きな影響力を持った（現在も持っている）。

# 帰結

上の、**violent relaxation** が本当に有効に働くとすると、どんなことがおきることになるかをちょっと考えてみる。これによって起きる緩和は、いくつかの点で通常の熱平衡に向かうものと異なっている。

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 等分配が働かない。これは、(単位質量当たりの) エネルギー変化が位置だけで決まるからである。
- 通常の意味で平衡に近付くかどうかは本当はわからない。普通の緩和過程では、エネルギーの高い粒子はそれを失う傾向があるし、低いものはもらう傾向があるが、そういう傾向は特にないためである。
- 緩和がどの程度進むかはわからない。力学平衡に落ちつけばエネルギー変化は止まってしまうからである。

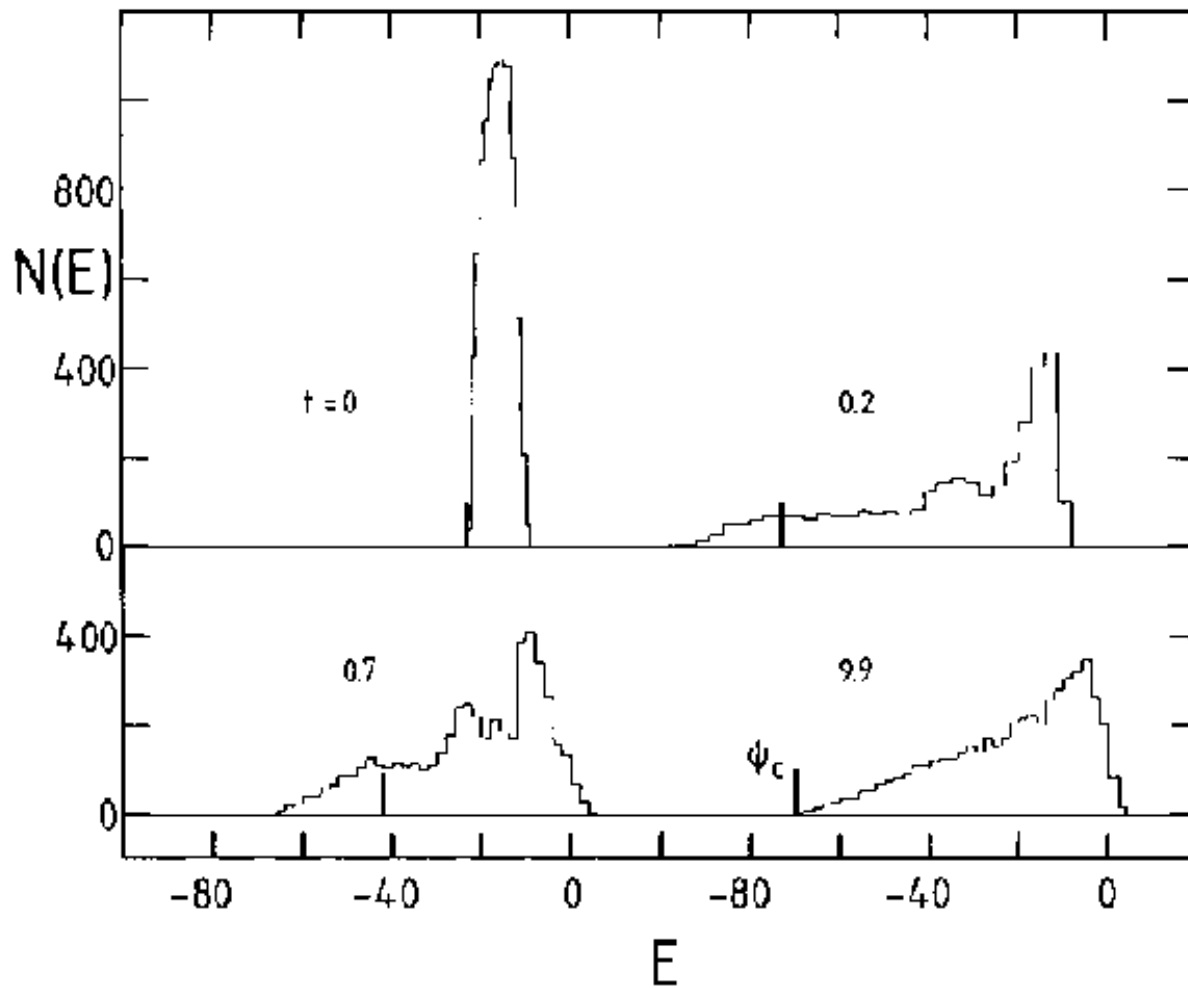
# 数値実験とその解釈

**Violent relaxation** というのは、いろいろな意味で魅力的な提案であったので、数値実験によって実際にそんなにうまくいくかどうか調べようという試みが多数なされている。ここでは、その代表的なものである **van Albada (1982, MNRAS 201, 939)** を取り上げて、どんな結果になったかをまとめる。

計算は極座標でポアソン方程式を球面調和関数展開してポテンシャルを求める計算法によっている。このために、**1982** 年というかなり昔でありながら、**5000** 粒子というこの目的には十分な数の粒子（粒子の数の意味についてはあとで扱う）を使うことができた。

初期条件は、粒子に少しだけランダム速度を与えて、大体球状（実際には、いろいろ変化させているが）に分布させ、手を離してどうなるか見るというものである。

*Galaxy formation and the  $r^{1/4}$  law*



この図は、あるケースについて  $N(E)$  をプロットしたものである。

$N(E)$  は分布関数ではなく、 $N(E)dE = dN$  を満たすような、つまりはあるエネルギー範囲にある粒子の数である。これを使うのは、数値計算で実際に分布関数  $f$  を求めるのはいろいろ困難があるのにたいし、理論計算では  $f$  から  $N$  を出すのは機械的だからである。

初期には狭いところに集まっているが、落ちついたあとでは広がっている。これは、ある程度まで **violent relaxation** というものが起こっているということを示している。



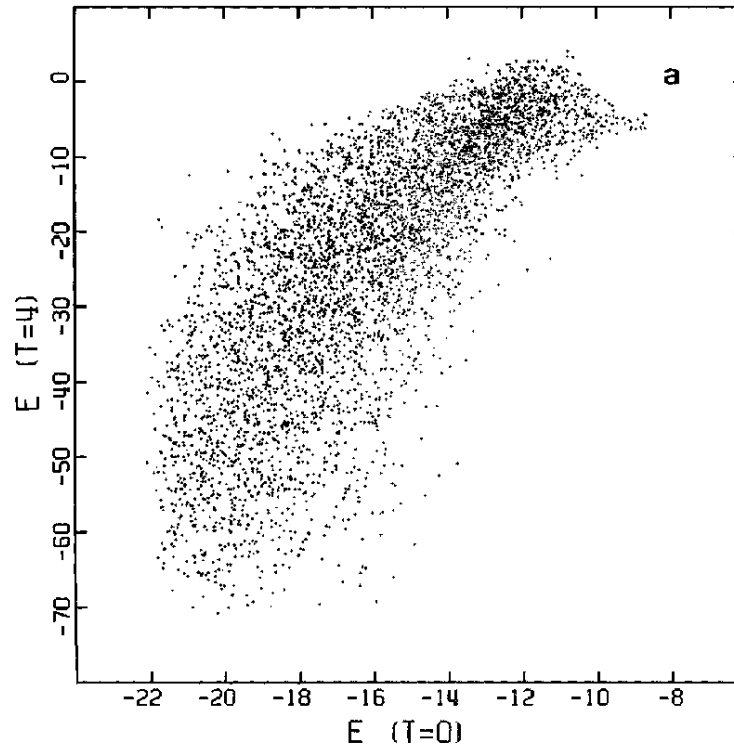


Figure 3. Relation between values of the binding energy before ( $t = 0$ ) and after the collapse ( $t = 4$  and  $8$ ). Note difference in scale of factor 5. This figure shows that all information concerning the initial state is not wiped out during the violent relaxation phase.

これは、初期のエネルギーと落ちついた後のエネルギーの関係を示している。明らかにわかることは、非常に強い相関が残っているということである。つまり、もともとエネルギーが低かったものは相対的に低いまま、高いものは高いままに留まる傾向がある。

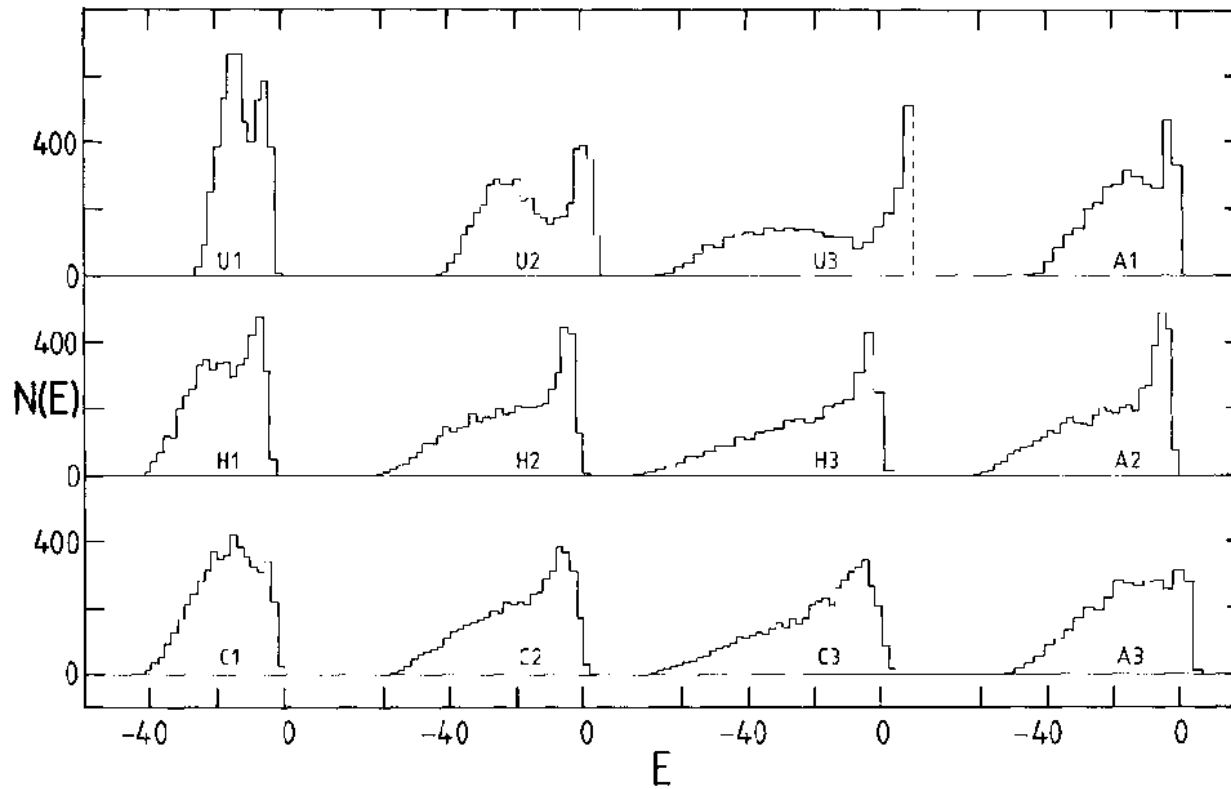


Figure 7. Histogram of binding energies for the final equilibrium models.

これはさまざまな初期条件からの結果をすべてまとめたものである。  
 ( $N(E)$  をプロット) 初期条件によって、 $N(E)$  はいろいろであり、とて  
 もある一つのものに向かうといえるようなものではないということが見て  
 とれるであろう。

# まとめ

結局のところ、**Lynden-Bell** が主張したような **violent relaxation** は、全く働かないというわけではないが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけでもない。このために、無衝突系の最終状態は初期条件の記憶を強く残している。

例えば楕円銀河が合体で出来たという説に対する反論として、「合体したら **violent relaxation** によってよく混ざるはずであるから、**color gradient** などの構造があるのはおかしい」という主張がなされたことがあったが、現在ではこれは合体説に対する反証とは考えられていない。

**Violent relaxation** の主張というのは、要するにシステムが力学平衡から遠く離れていれば、全体として振動する。その振動が系の各粒子のエネルギーを位相に依存する複雑な方法で変化させるので、これはランダムな変化と同様になり、系をある平衡状態に導くというものであった。しかし、数値実験の結果はそうになっていないし、それは基本的には上のメカニズムが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけではないということから理解できる。

それならば、楕円銀河がそれなりによく似ているということには、さらにまた別の説明が必要であるということになる。ここでは、2つの考え方を紹介する。

# N(E) の連続性

**Violent relaxation** で「平衡状態」に行くというわけではないにしても、楕円銀河が円盤銀河とはちがった何らかの力学的な進化、すなわち **Lynden-Bell** が想定したような系全体の振動のようなものを経験したと考えるのはそれほど不自然ではないであろう。

では、そのような系全体の振動というものを考えた時に、分布関数についてなにかいえることはないだろうか？実は、問題が3次元であるということから、分布関数が特徴的な性質をもつであろうということが直接にいえる。

80年代以降、このことは「何となく」理解されていたようであるが、ある程度明確に述べたのは、**IAU Symposium 127 “Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies”**での**Scott Tremaine (Conference Summary)**と**W. Jaffe (Poster)**の発表であったようである。**Tremaine**の記録に残っている集録原稿は要領を得ないものであるので、以下**Jaffe**にしたがって簡単にまとめる。

何らかの原因、例えば他の銀河と合体するとか、合体しないまでも近くを通り過ぎるとかで大きな振動が励起されたとする。すると、それが構成する各粒子のエネルギーを変化させることになる。

エネルギーが変化した粒子のなかには、もちろん、エネルギーが正、すなわち系に束縛されなくなってしまうものもある。また、そうでなくても、エネルギーがある程度**0**に近ければ、一旦遠くにいった、また戻ってくる頃には系はほとんど落ちついているので、それ以上エネルギーが変化するということはない。

このような、エネルギーが**0**に近い粒子の分布というものを考えてみる。なんらかの熱平衡のようなものを考えると、このあたりに粒子がたくさんないといけないことになる。というのは、エネルギーが高いほど空間的な

体積が大きいので、熱平衡になるためにはその体積にくまなく粒子を分布させる必要があるからである。熱平衡とすれば、結局エネルギーが高くなるほど粒子が多いことになって質量が発散してしまうのは前に述べた通りである。

しかし、実際にこのようなエネルギーが  $0$  に近い粒子が形成されるプロセスを考えてみると、このような熱平衡にいくとか質量が発散するとかいうことは起こらない。これは、このプロセスが、エネルギー  $0$  の平衡状態に相当する遠く離れたところで起きるのではなく、系の中心付近でしか起こらないからであり、また、このプロセスがすぐに止まってしまうからでもある。

結果として、エネルギーが  $0$  に近い粒子というものは確かに作られるが、その分布は熱平衡を満たすようにはならない。ではどうなると考えられるであろうか？実際にそういった粒子が出来るところを考えてみると、例えばエネルギーが正になってしまうかどうかを知っているわけではないし、どれくらいの **phase volume** があるかどうかということを知っているわけでもない。従って、エネルギーが  $0$  に近い粒子の分布は、 $N(E)$  が特異でない（発散したり  $0$  にいたりしなくて、おそらく微分可能である）ということによって特徴付けられると考えていいと思われる。

実際、例に出した **van Albada** の数値実験では多くの場合にそうになっていたわけである。

これは、 $N(E)$  が、 $E = 0$  の付近、すなわち、大雑把にあって  $r \rightarrow \infty$  の極限で、 $N(E) = N_0 + N'_0 E \dots$  の形の展開を持ち、特に  $N_0 > 0$  であるということを意味する。



# N(E) から分布を？

さて、 $N(E)$  について何かわかったとして、それから直ちに分布関数  $f$  なり密度  $\rho$  についてなにかいえるわけではない。仮に球対称を仮定したとしても、角運動量分布の自由度があるからである。以前にジーンズ方程式について議論した際に、系の中心にカスプがあるというような観測から分布関数やポテンシャルについてなにかをいうことは必ずしも可能ではないということがわかった。今回も同じような困難があるのではないだろうか？

とりあえず、困難はおいておいていろいろやってみることにしよう。定義により「十分外側」を考えるので、ポテンシャルは

$$\Phi = -M/r \quad (134)$$

で与えられるとする。単純な例として、すべての粒子が円軌道を回る、すなわち最大の角運動量を持つ場合を考える。もちろんこんなことは現実にはあり得ないが、とりあえず計算は簡単なのでいいことにしよう。円軌道の式からすぐにわかるように、

$$E = -\frac{M}{2r} \quad (135)$$

である。つまり、エネルギーが決まれば中心からの距離が決まる。したがって、密度を求めるにはヤコビアンを計算すればいい。つまり

$$dM = |4\pi r^2 \rho dr| = |N(E)dE| \quad (136)$$

と、式 **135** からでる

$$\frac{dE}{dr} = \frac{M}{2r^2} \quad (137)$$

から、

$$\rho = \frac{MN(E)}{8\pi r^4} \quad (138)$$

を得る。

円軌道は特殊なので、もうちょっと違うことを考えれば違う答がでるのではないかと心配になるが、たとえば **Jaffe (1987)** は、等方的な場合にもやはり  $\rho \propto r^{-4}$  を示している。もちろん、これもあまり信用できるわけではない、というのは、実際の粒子の分布は、角運動量に強く依存するものになっていると考えられるからである。

それなら、逆の極限、すなわち、すべての粒子が角運動量を全く持たない場合はどうであろう？実は、この場合にも円軌道と同じ結果になることがわかる。これは、実際に軌道が解けるので、エネルギーごとにある位置への滞在確率を求めて積分すれば密度が求まるが、その式から結局滞在確率が外にでてしまうからである。

もうちょっと厳密に示そう。あるエネルギー  $E$  の粒子が、中心からの距離がある範囲  $(r, r + dr)$  にいる確率が  $P(E, r)dr$  で書けるとすれば、密度は

$$4\pi r^2 \rho = \int_{E_r}^0 P(E, r) N(E) dE \quad (139)$$

で与えられる。ここで  $E_r$  は距離  $r$  に到達できるエネルギーの最小値であり、 $-M/r$  で与えられる。いま、ケプラーポテンシャルのなかでの直線軌道を考えているので、 $P(E, r)$  は書き下すことができ、特に

$$P(E, r) = P_0(r/r_E)/r_E \quad (140)$$

の形に表現できる。ここで  $r_E = -M/E$  である。さらに  $x = rE/M$  と

いう変数変換を行なって適当に整理すると、

$$\rho = \frac{M}{4\pi r^4} \int_{-1}^0 -P_0(x)xN(Mx/r)dx \quad (141)$$

これから、 $r \rightarrow \infty$  の極限で、積分の中が収束することがわかる。従って、すべてが **radial orbit** の場合も円軌道の場合もおなじことになる。

それでも一般に  $J$  に分布があったら違うのではと心配になる向きは、実際に計算してみよう。つまり、 $N(E, J)$  の形で実際に分布を与え、 $J$  についての依存性にどのような制約があれば上と同様の結果が得られるか調べてみよう。ここでは結論だけを述べておくと、かなりゆるい条件のもとで **OK** であることがわかっている。

# N(E) についてのまとめ

結局、比較的一般的な条件として、自己重力系で力学平衡から大きくずれた振動などを経験した場合には、 $N(E)$  が  $E \sim 0$  で連続という条件から、 $\rho \sim r^{-4}$  という結論が出せる。これは、前にモデルのところででてきた **Hernquist model** や **Jaffe model** に共通な性質であり、これらは、(中心部の構造が全く違うにも関わらず) どちらも楕円銀河に良く合うとされている。「観測的に楕円銀河の性質が共通である」というのはその程度の意味であると考えられるべきかもしれない。つまり、基本的には外側のほうで  $\rho \sim r^{-4}$  に漸近していくような構造というのが本質ではないかと考えられる。

ちなみに、惑星形成過程においても、オールト雲やカイパーベルト天体の起源については同様なメカニズムが働いている可能性がある。

# 中心部の構造

今回は、**Violent relaxation** の結果として自己重力系の外側 (**virial radius** のずっと外側) については、

- $N(E)$  が  $E = 0$  で有限値をとる。
- その結果、密度分布は  $\rho \propto r^{-4}$  になる。
- これは **Hernquist model, Jaffe model** 等に共通の性質であり、楕円銀河がいわゆる  $r^{1/4}$  則でよく表現できる理由の一部ではある。

というような話をした。

さて、それでは、中心部の構造についてはなにもいえないのであろうか？  
これは実はまだ良くわかっていない問題である。**20**年前に、**Navarro** たち (**ApJ 1997, 490, 493**) は、数値計算の結果をもとに以下のような主張をした

- **CDM** シナリオによる構造形成を考えた時、**CDM** が作る自己重力系（ガスとか星を考えない）は

$$\rho \propto \frac{1}{r_* (1 + r_*)^2} \quad (142)$$

の形に書ける

- この形はユニバーサルで、例えば一つの銀河でも銀河団でも同じである

これは、極めて有名になった **NFW** プロファイルである。

彼らはなぜそのようなことが起きるかについての解釈とか説明は特に与えていないが、例えば **Syer and White (MN 1998, 293, 337)** といった人達が説明を考えてはいる。

しかし、実は、**Navarro** たちの結果の解釈は割合すぐに異論がでており、**CDM** と初期条件を制限しても、例えば **Fukushige and Makino (ApJ 1997, 477 L9)** とか **Moore et al. (ApJ 1998, 499, 5L)** を見ると、上の

「ユニバーサル」な形になったのは数値誤差のせいという主張がなされている。これらの結果では **Navarro** たちのものより中心で等温に近くなっている。**Navarro** らの結果は 1 万粒子程度であるが、**Fukushige** ら、**Moore** らは 100 万粒子程度であり、数値誤差の影響が小さくなっていることは間違いない。「真の」のスロープがどうなるかについては現在も活発な研究が続いているが、現時点では、**CDM** からの数値実験でできるハローの中心部は **NFW** よりもスロープの傾きが大きいということはほぼ万人の認めるところになったようである。

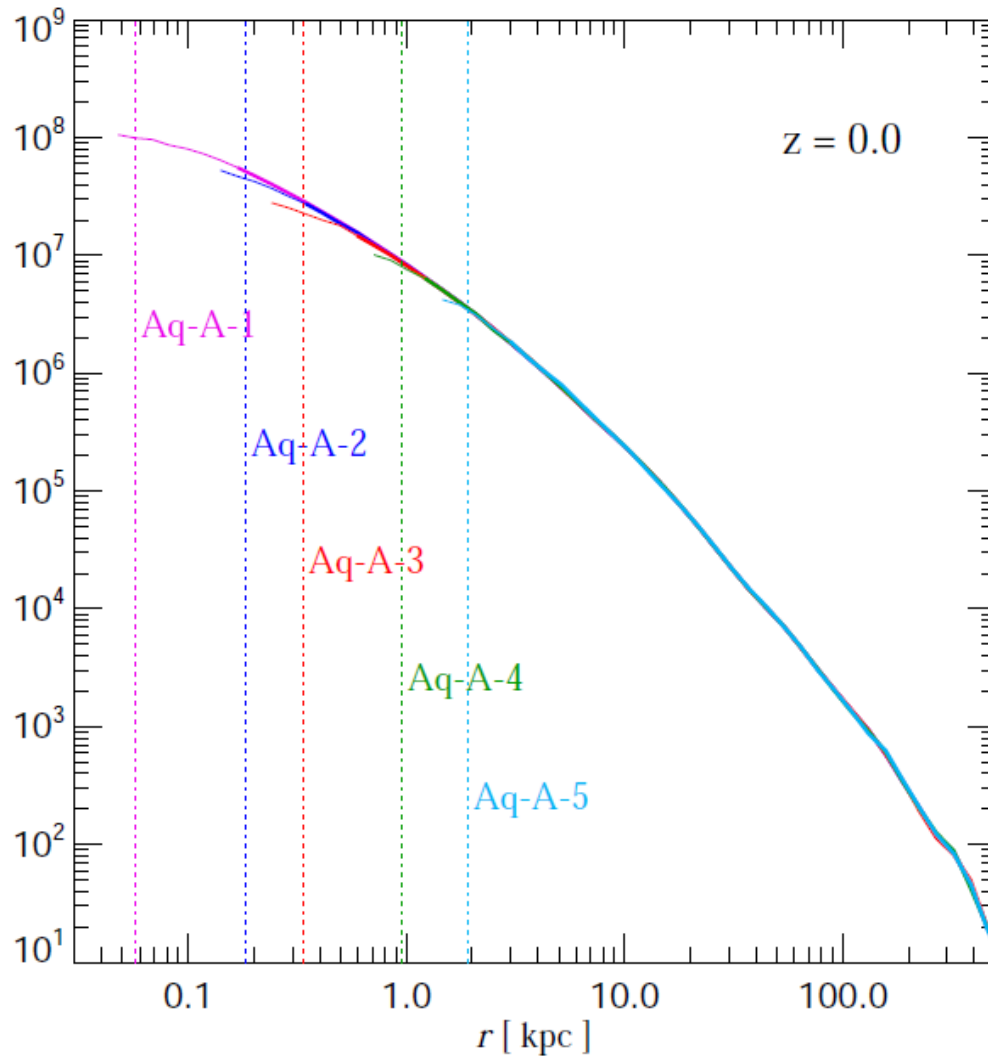
つまり、現状では、中心部（というか、**half mass radius** より内側）の構造は、

- 第 0 近似としては半径の  $-1.5$  乗程度のカスプになる。
- どういうメカニズムでそうなるかはまだよくわからない

という状況であるといえる。現在では、福重君の仕事からさらに 3 桁程度粒子数を増やした、 $10^9$  粒子程度の計算も行われているが、中心部の構造がどうなるか、それは何故か、というのは依然明確にはなっていない。



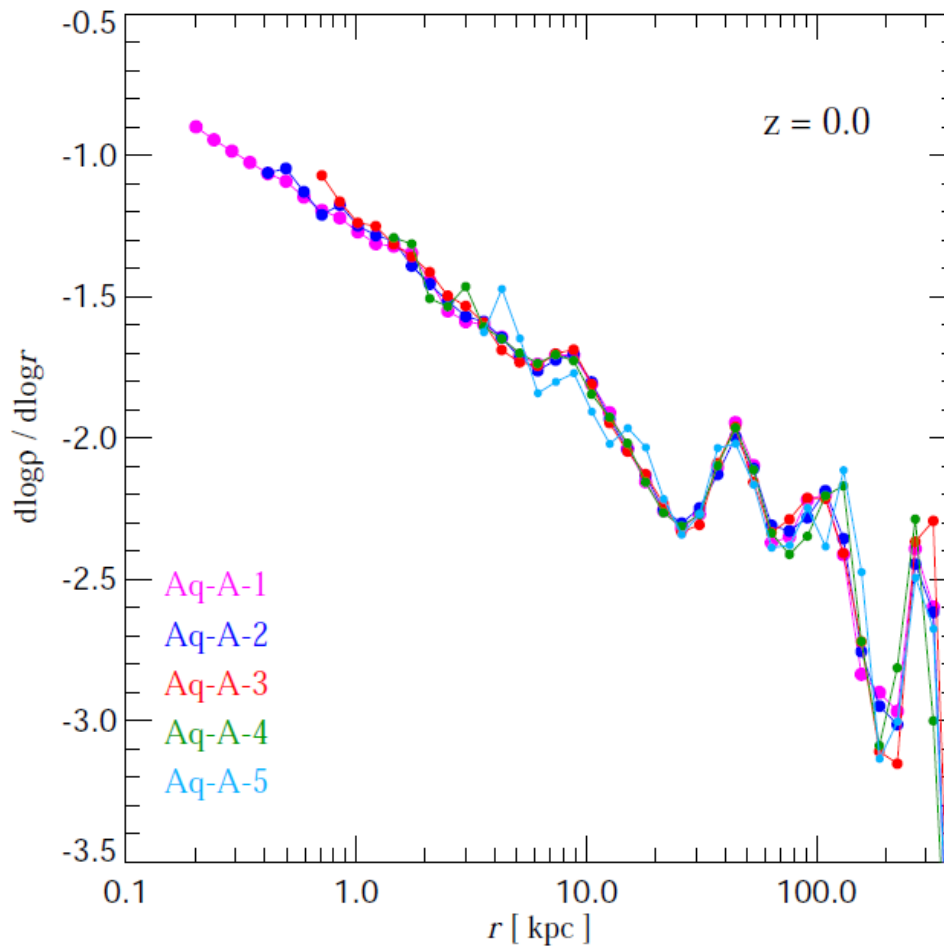
# シミュレーションの結果



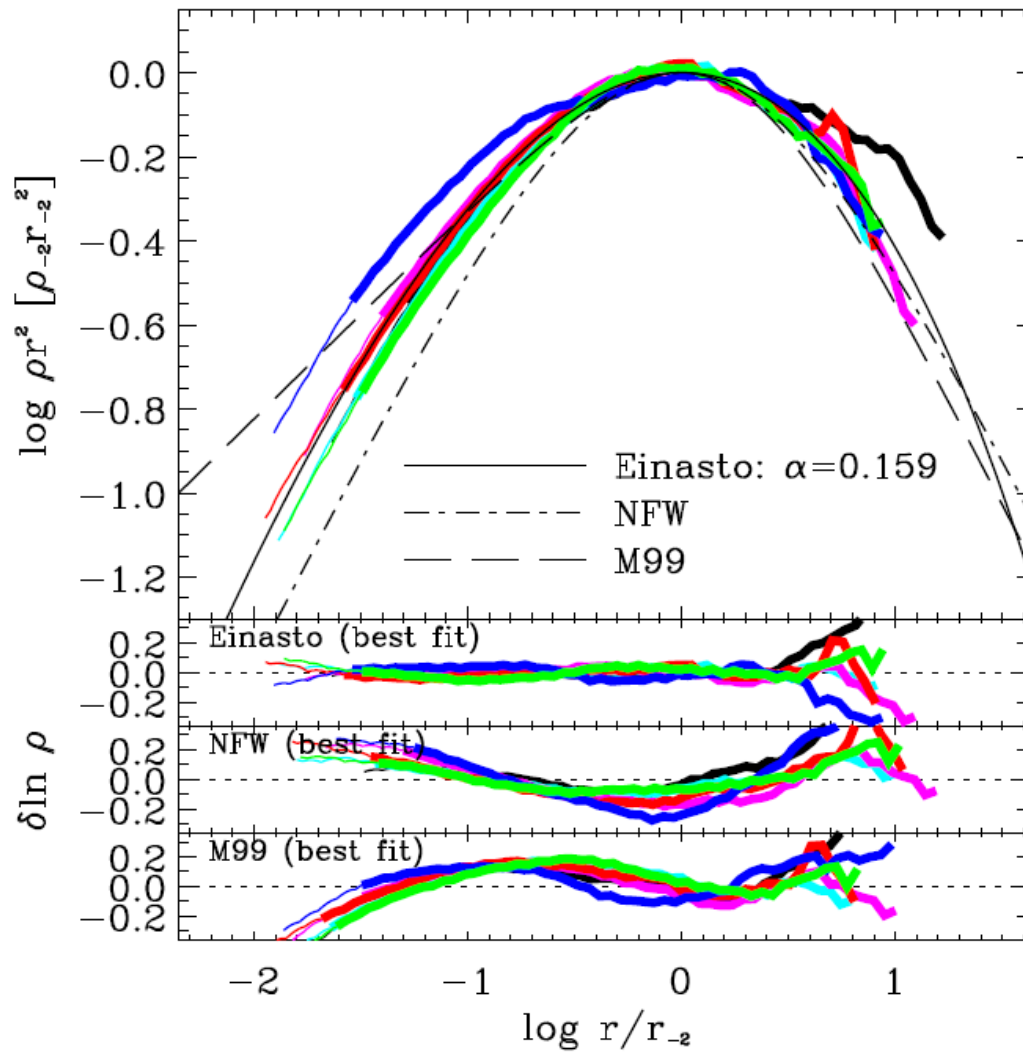
図は、現時点で最大粒子数、最高分解能の計算: **Springel et al (2008)** で

ある。これは粒子数を **3**桁程度の範囲で変えて、**5**個のシミュレーションをしており、分解能が高い計算は低い計算の、計算が信用できそうな範囲は再現している。そういう意味では、計算結果は収束していて、求まっている答はそれなりに正しいと考えられる。

粒子数が少ないと中心のほうで信用できなくなるのは、熱力学的な緩和のため。これはまた後でもう少し詳しく。



こちらは密度勾配をグラフにしたもの。計算の範囲では中心に行くに従って浅くなっていて、いかなるべきでもない。



これは **Navarro et al. 2008**. 傾向は同じで、中心に行くに従って密度勾配が浅くなっている。

$$\text{NFW: } \frac{1}{r(1+r)^2}$$

$$\text{Moore99: } \frac{1}{r^{1.5}(1+r^{1.5})}$$

$$\text{Einasto: } \exp[(-2/\alpha)(r^\alpha - 1)]$$

現在わかっていることをまとめると

- ダークマターカスプの中心付近の密度構造は、「なんだか不思議なもの」
- 単純なべきではない。が、どこまでもべきが下がるかどうか不明。
- 粒子数が少ない計算と、比較できる範囲では一致していて計算はあっているっぽいけど、、、

というような感じになる。数値計算の結果を疑うわけではないが、何故そうなっているかは今のところ全く理解されていない。感覚的には

- 初期ゆらぎ自体はほぼべき乗なものはいつている。
- 粒子の質量以外に特徴的なスケールはない。

ので、何かべき乗則になりそうな気がする。

つまり、数値計算の結果はあっても、それを理解できる理屈がついてない、というのが現状での大きな問題点である。

数値計算の結果が理論的になにかしら理解できない時には、それが「正しい」かどうかは判断のしようがない。

もっとも、こんなところの計算にはそもそも意味があるのか？という疑問はある。銀河サイズのダークマターハローの中心 **1 kpc** 以内の構造に、観測的になんか意味はあるのか？ということである。もちろん、これには **2**つの回答がありえる。一つは「ない」というもので、その理由は少なくとも実際にの銀河ではその辺はどうせバリオンの影響のほうが大きいからである。もうひとつは、「ある」というもので、もっと小さい、バリオンをトラップしてない本当にダークなハローならもちろんこのようなものは残っているはずである。

ダークマターを「見る」可能性として、

1. ダークマター粒子自体の対消滅でガンマ線がでる。これを観測する
2. ダークマター粒子自体を直接検出する

といった話があり、こういうことを考える時には小さい質量のダークマターハローの構造は重要である。原理的には、小さなものが生き残っていて太陽近傍にある、といった可能性も考慮する必要がある。



# 無衝突系に関するまとめ

- 無衝突恒星系 (恒星でなくてダークマターとかでも) の進化は無衝突ボルツマン方程式で記述できる。
- 無衝突恒星系の平衡分布関数は、ジーンズの定理から重力ポテンシャルの運動の積分の関数になる。
- 球対称な恒星系では、分布関数はエネルギーと全角運動量だけの関数になる。理論的なモデルはエネルギーだけの関数になるものが多く知られている。
- 軸対称になると、エネルギーと軸回りの角運動量は自明な保存力だが、それ以外の非自明な保存量がある軌道とない軌道があり、問題は難しい。**3**軸不等ポテンシャルになると一層複雑だが、エネルギー以外の保存量がある「**regualr orbit**」があるポテンシャルも知られている

# 無衝突系に関するまとめ(つづき)

- 無衝突ボルツマン方程式から「ジーンズ方程式」を導くことができる。これは、流体のオイラー方程式(非粘性のナビエストークス方程式)に相当する。これから、観測された恒星系の密度・速度分散から見えない部分を含めた質量を求めることができる
- 一様密度の無限に広がった恒星系(宇宙全体とか)は不安定であり、温度と密度できまる「ジーンズ波長」より長い波長の摂動は成長する。星とか銀河はそうやってできる
- 非線型領域の進化は難しいが、「力学的摩擦」の概念は重要である。大きな塊が動いていると、それは周りの星との相互作用で質量に比例した「摩擦」をうける。例えば巨大ブラックホールは銀河の中心に落ちる。

# 2体緩和

## 2体緩和とはなにか？

まず、2体緩和とはいったいどういうものかというところから話を始めることにする。原理的には、これがなにかというのは結構厄介な問題である。

有限粒子数の自己重力多体系を考えると、これは以下のような進化をされると考えられる。まず、最初は力学平衡になかったとすると、とりあえず力学平衡に落ちつく。粒子数が無限大であれば、無限に細かく見れば無限に時間がたっても真の力学平衡に到達するわけではないが、まあ、漸近はしていく。この時、各粒子は与えられたポテンシャルの中を運動するだけになり、それ以上進化することはなくなる。

さて、実際には有限粒子数であるので、そもそも真の力学平衡というものはない。有限の質量をもった各粒子が系の中を運動するに従って、ポテンシャルは必ず変化するからである。この変化によって各粒子の軌道も変化することになる。

それでは、粒子の軌道の変化を、粒子数が有限であることから来る成分とそれ以外に分離することは可能であろうか？これは、系が力学平衡にある

とみなすことができればそれは可能である。つまり、力学平衡にあれば、粒子のエネルギー変化は定義によりすべて粒子数が有限であることによるからである。

が、良く考えると問題なのは、そもそも有限粒子数であるものを力学平衡とみなすとはどういうことかということである。このあたりを考えていると段々混乱してくるので、まず、理想化された状況から考えていくことにしよう。

# 理想化：一様等方な分布

理想化といえは例によって一様等方な分布を仮定することである。例えばマックスウェル分布があって、その中の一つの粒子をとって考えるということをしたいわけだが、これは結構厄介なのでさらに簡単な例を考える。すなわち、速度  $\mathbf{0}$  で空間内に一様（ランダム）に分布した質点を考え、その中を質量  $\mathbf{0}$  のテスト粒子を飛ばして見る。

もちろん、この場合エネルギー交換はないので速度は変わらず、単に散乱されるだけだが、しかし、この例は2体緩和のいくつかの重要な性質を示すのですこし詳しく見ていくことにする。分布している質点の質量を  $m$ 、数密度を  $n$  とする。テスト粒子が一つの粒子から距離（インパクトパラメータ）  $b$  を速度  $v$  で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\tan \theta = \frac{2b/b_0}{(b/b_0)^2 - 1}$$
$$b_0 = \frac{Gm}{v^2} \tag{143}$$

で与えられる。単位時間当たり、インパクトパラメータが  $(b, b + db)$  の範囲にある散乱の回数は  $2\pi n v b db$  である。

さて、散乱の方向はランダムであると思われるので、平均としては（一次の項は）**0**になる。しかし、**2**次の項は**0**にならない。これは

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle = 2\pi n v \int_0^{b_{max}} \delta\theta^2 b db \quad (144)$$

で与えられることになる。

この式から既にいろいろな性質がわかる。が、その前に理論的な困難を解決しておく必要がある。この積分は  $b \rightarrow \infty$  で発散している。これについてはいくつかの考え方があった。例えば、初めて2体緩和の性質を理論的に調べた **Chandrasekhar** は、以下のように考えた。

「平均粒子間距離よりもインパクトパラメータが大きいような散乱は、多体の干渉によって効かなくなるのでそこで積分を打ち切ってよい」

しかし、多体の干渉というようなものが実際にあるかどうかはあきらかではない。もっと素直な解釈は、実際に系にあるすべての粒子と常に同時に相互作用しているのだから、システムサイズくらいまで全部入れる（系が構造を持つ場合はちょっとややこしいが、密度の空間依存も積分のなかに入れて全空間で積分する）というものである。

数値実験の結果などから、後者の解釈すなわち全体が効くというほうが正しいということはかなり昔から大体わかっていた。歴史的には、どちらの解釈が正しいかについてはかなり最近まで論争があって、完全に決着がついたといえるのは **94-5** 年頃である。が、これはまあそういうことをいっている人もいたっていうくらいのもので、定説となっているのは後者である。現在では後者の解釈が正しいということに疑いの余地はない。



上の式から、適当に近似すると

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle \sim Gnv^{-3}m^2 \log(R/r_0) \quad (145)$$

となる。ここで  $R$  は先に述べたシステムの大きさ、 $r_0$  は「大きく曲がる」ためのインパクトパラメータの値で、 $b_0 = GM/v^2$  の程度である。

さて、これからどんなことがわかるかというわけだが、これから、逆に角度変化が **1** の程度になる時間というのを求めてみると、

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2 \log \Lambda} \quad (146)$$

となる。ここで  $\Lambda$  は上の  $R/r_0$  を単に書き換えただけである。

今、 $\log \Lambda$  の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の **3** 乗、数密度の逆数、質量の **2** 乗の逆数に比例するということになったことになる。特に、質量密度一定の場合というものを考えてみると、タイムスケールが各粒子の質量に比例するということがわかる。

ある大きさを持った多体系というものを考えてみよう。質量  $M$ 、特徴的な半径（ビリアル半径か何か） $R$ 、粒子数  $N$  とすれば、ビリアル定理か

ら  $v^2/2 = GM/R$ 、力学的なタイムスケールが  $t_d \sim \sqrt{R^3/GM}$  となる。  
これを使うと上の緩和のタイムスケールは

$$t_\theta \sim \frac{N}{\log N} t_d \quad (147)$$

となる。これは、粒子数が大きいほど無衝突系に近づく、ということを示す。

# どういふことを考えるかといふこと：流体との違い

2体緩和によつて、最終的には系が熱力学的に進化する。この過程は普通の流体（ガス）とは本質的に違ふもの。

ガスの場合、粒子の平均自由行程はシステムサイズよりもはるかに小さい。液体であれば平均粒子間距離は粒子のサイズ程度であるし、気体であっても通常の状況では考えている現象の空間スケールに比べて平均自由行程は小さい。ちなみに、非常に希薄な気体とか、あるいは本当に空間スケールの小さい現象では平均自由行程が問題になる。これは例えば超高層での人工衛星の回りの気体の流れとか、あるいは最近の磁気ヘッドの回りの空気の流れとかいったものである。

通常のガスの場合、平均自由行程がシステムサイズより小さく、システムサイズよりは小さく平均自由行程よりは大きいような空間スケールを考えると、そのなかでほぼ熱平衡になっていると思つていいことになる。いいかえれば、いわゆる **Local thermal equilibrium (LTE)** の仮定が使える。こうなると、温度とか圧力とかいった量が近似的（といつても實際上非常

に高い近似精度で) に定義でき、そういったマクロな量で系の進化を扱う、特に熱の流れを拡散方程式で書くということが可能になる。

しかし、自己重力質点系では状況が全くことなる。まず、粒子数が無限大の極限では、平均自由行程も無限大であった。つまり、**LTE** がなりたないどころか、そもそも熱平衡に向かう（すなわちエントロピーを生成する）ようなメカニズムがなかったわけである。

粒子数が有限の場合も、依然として平均自由行程が長い、つまり、粒子数無限大の時の軌道から、他の粒子との相互作用によって段々ずれていくわけだが、そのずれる典型的なタイムスケールは  $Nt_d / \log N$  程度であった。つまり、流体の場合とは全く逆に、ほとんど自由運動（というか、他の粒子全体が作るポテンシャルに沿った運動）をしていて、その場が有限の粒子で表現されるための揺らぎがあるので段々軌道が変わっていくということになるわけである。

従って、ローカルな熱平衡を仮定して拡散係数／輸送係数を求めるというのは逆に、ある一つの粒子が系の中を動き回りながらどういうふうにエネルギー等を変化させていくかという観点で見ていくことになる。

これをすこし別ないい方をすれば、通常の空間のなかでの密度や温度の変

化を考える代わりに、また**6次元位相空間**のなかでの分布関数の進化を考えるということに当たる。具体的には、これまで無視してきた「衝突項」というものをちゃんと評価して、どういうものかみてやろうということである。

# バックグラウンドの分布のもとでの有限質量のテスト粒子の振舞い

さて、以下ではバックグラウンドの粒子分布のもとでの一つのテスト粒子の振舞いを考える。前と違うのは、バックグラウンドも動いていることと、テスト粒子も有限の質量を持つことである。バックグラウンドの粒子は一様に分布するものとし、ある速度分布に従うとする。さらに、バックグラウンドの粒子間の相互作用とかは考えないことにする。これで本当にいかどうかはちょっと良くわからない問題であるが、まあ、とりあえずやってみることにしよう。

前と同じく、分布している質点の質量を  $m$ 、数密度を  $n$  とする。テスト粒子が一つの粒子から距離（インパクトパラメータ）  $p$  を相対速度  $V = v_t - v_f$  で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\tan \theta = \frac{2p/p_0}{(p/p_0)^2 - 1}$$

$$p_0 = \frac{G(m_t + m_f)}{V^2} \quad (148)$$

で与えられる。ここで、この曲がる角度は相対軌道のものであって、テスト粒子の軌道のものではないということに注意する必要がある。いきなり回りが動いていてしかもテスト粒子が質量をもつというのは難しくなるので、とりあえずテスト粒子は質量を持つが、回りは止まっている場合を考える。この時、一回の散乱での速度変化は以下の式に従う。

$$\Delta v_{\text{orth}} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V \sin \theta = 2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{p/p_0}{1 + (p/p_0)^2} \quad (149)$$

$$\Delta v_{\text{para}} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V (1 - \cos \theta) = -2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{1}{1 + (p/p_0)^2} \quad (150)$$

$$(151)$$

前の話との違いは、速度変化に係数  $m_f/(m_f + m_t)$  がついていることだけである。これにまた単位時間当たりの衝突回数  $2\pi p n_f V dp$  を掛けて積分するが、 $\Delta v_{\text{orth}}$  については前と同様 1 次の項は落ちる。それ以外につ

いては前と同様に計算出来て

$$\langle \Delta v_{\text{orth}}^2 \rangle = \frac{2n_f \Gamma}{V} \quad (152)$$

$$\langle \Delta v_{\text{para}} \rangle = - \left( 1 + \frac{m_t}{m_f} \right) \frac{n_f \Gamma}{V^2} \quad (153)$$

$$\langle \Delta v_{\text{para}}^2 \rangle = \frac{n_f \Gamma}{V \ln \Lambda} \quad (154)$$

ここで  $\Gamma$  は

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln \Lambda \quad (155)$$

である。ただし、**leading term** でない項は適当に落ちてたりするので注意。

上の式で、 $\langle \Delta v_{\text{orth}}^2 \rangle$  の項は前にでてきた角度の曲がる項と同じものである。前の話と違うのは、ネットに速度が小さくなる成分がある、すなわち  $\langle \Delta v_{\text{para}} \rangle$  が負で有限の値をもつということである。

これは、実は前にやった **dynamical friction** そのものである。つまり、



回りが止まっているなかを粒子が走っていくと、それが回りを引っ張って動かすので、その分エネルギーを失って段々速度が落ちる。これは、 $m$  が大きい ( $m_f$  が小さい) 極限では  $m_f n_f$ 、つまり質量密度によっていて、バックグラウンドの粒子の質量に依存しないことに注意してほしい。これに対し、他の項は  $m_f^2 n_f$  に比例していて、質量密度が同じでも粒子の質量が大きいほうが値が大きくなる。

さて、ここではとりあえず**1次**と**2次**の項を求めたわけだが、それより先の項については考えなくてもいいのだろうか？ここでは粒子の軌道変化がたくさん散乱のランダムな重ね合わせで書けるとした。この仮定が正しいければ、たくさん散乱を受けた後の速度の分布は**1次**と**2次**のモーメントで決まるガウス分布になり、従って**3次**より高いモーメントの寄与は考えなくてもいいことになる。

問題はこの仮定が正しいかどうかであるが、実は理論的にはそれほど正確なわけではない。というのは、インパクトパラメータが例えば  $p_0$  の程度の散乱というのも現実におき、その効果はそれ以外の散乱すべての寄与に比べてせいぜい  $\ln \Lambda$  程度でしか小さくないからである。まあ、しかし、そんなことをいっていても高次の項があっては計算出来ないし、とりあえず  $\ln \Lambda$  程度で小さいということも確かなので、以下高次のモーメントは

考えない。

# バックグラウンドが速度分布を持つ場合

この時でも、相対速度の変化自体は前節に述べたもので正しいが、相対速度にフィールド粒子の速度成分が入ってくる。

以下、二種類の単位ベクトル系をとって、その上で考える。一つは  $(e_1, e_2, e_3)$  であり、元の空間に固定されている。もう一つは  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  であり、最初の成分を相対速度  $V$  に平行にとる。従って、後者は相手の粒子によって違うわけである。この2つを考えることで、相対速度の変化をもとの静止系でのテスト粒子の変化に焼き直す。

まず、1次の項は相対速度に平行な成分だけであった。このことから、ある方向の速度変化は

$$\langle \Delta v_i \rangle = \langle e_i \cdot e'_1 \Delta v_{\text{para}} \rangle' \quad (156)$$

ということになる。もうすこし精密に書くと、右辺はインパクトパラメータと相手の速度の積分なので、以下のように書けることになる。

$$\langle \Delta v_i \rangle = \int dp 2\pi p V \int dv_f f(v_f) \Delta v_i \quad (157)$$

$$= -\Gamma(1 + m/m_f) \int \frac{f(v_f)}{V^2} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_1) d\mathbf{v}_f \quad (158)$$

ここで、 $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_t - \mathbf{V}$  はフィールド粒子の速度、 $f$  は速度分布関数である。 $p$  についての積分を先にやったことに注意して欲しい。この積分は  $v_f = 0$  であった時の結果をそのまま使っている。

さて、**2**次の項についてであるが、前節で見たように  $\mathbf{v}$  に垂直な成分、すなわち  $\mathbf{e}'_2$  と  $\mathbf{e}'_3$  の成分を考えればいい。従って、一つの方角からくるフィールド粒子との散乱を考えた時には

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle &= [(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_2) \mathbf{e}'_2 + (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_3) \mathbf{e}'_3] \cdot [(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_2) \mathbf{e}'_2 + (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_3) \mathbf{e}'_3] \langle \Delta v_{\text{orth}}^2 \rangle \\ &= [(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_2)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_2) + (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_3)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_3)] \langle \Delta v_{\text{orth}}^2 \rangle / 2 \\ &= Q_{ij} \langle \Delta v_{\text{orth}}^2 \rangle / 2 \end{aligned}$$

これもまた分布関数を掛けて積分すると、結局

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle = \Gamma \int \frac{f(v_f)}{V} Q_{ij} d\mathbf{v}_f \quad (160)$$

ということになる。これで一応必要な**2**次までの係数はすべて書けたわけ

だが、あまり計算するのに使い易い形ではない。というのは、 $e'_i$  とか  $V$  とかいったものがまだややこしい形ではいったままであるからである。しかし、もうちょっと簡単な形に書き直せることが知られている。まず、1次の項だが、

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{1}{V} \right) = -\frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial v_i} = -\frac{V_i}{V^3} = -\frac{e_i \cdot e'_1}{V^2} \quad (161)$$

という都合のよい関係がある。変形はとくにややこしいところはないと思う。 $e'_1$  をそもそも  $V$  に平行にとったから上のよう出来るわけである。このため、

$$h(\mathbf{v}) = \int \frac{f(\mathbf{v}_f)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_f|} d\mathbf{v}_f \quad (162)$$

なる関数  $h(\mathbf{v})$  を導入して、

$$\langle \Delta v_i \rangle = -\Gamma(1 + m/m_f) \frac{\partial h}{\partial v_i} \quad (163)$$

ということになる。

2次の項についても同様な整理が可能である。 $Q_{ij}$ は $e_i, e_j$ の $e'_2$ と $e'_3$ によって張られる平面への写像の内積なので、 $e'_1$ との内積の分をつけてやれば元の単位ベクトル同士の内積になる。つまり、

$$Q_{ij} = \delta_{ij} - (e_i \cdot e'_1)(e_j \cdot e'_1) = \delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{V^2} \quad (164)$$

したがって、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_i \partial v_j} = \frac{1}{V} \left( \delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{V^2} \right) = Q_{ij}/V \quad (165)$$

というわけで、

$$g(v) = \int f(v_f) |v - v_f| dv_f \quad (166)$$

とおけば、

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle = \Gamma \frac{\partial^2 g}{\partial v_i \partial v_j} \quad (167)$$

# バックグラウンド速度分布が熱平衡の場合

前節では、バックグラウンドの速度分布が任意のものについて、実際に計算可能な式を導いた。ここでは、速度分布が等方的な場合について式を単純化してみる。

速度分布が等方的な場合、 $h$  や  $g$  の積分を、 $v_f$  の絶対値方向と角度方向に分けることができる。角度方向の積分については、 $v$  と  $v_f$  のなす角度を  $\theta$  とし、 $\mu = \cos \theta$  とすれば、球面上での積分が、まず  $h$  については

$$\int \frac{dv_f}{|v - v_f|} = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{|v^2 - 2\mu vv_f + v_f^2|^{1/2}} = 4\pi \begin{cases} 1/v, & (v > v_f) \\ 1/v_f, & (v < v_f) \end{cases} \quad (168)$$

となる。これは、球面上に分布する電荷の作るポテンシャルと同じ式であ

る。  $g$  についても同様に計算できて

$$\int |v - v_f| dv_f = 2\pi \int_{-1}^1 |v^2 - 2\mu v v_f + v_f^2|^{1/2} d\mu = \frac{4\pi}{3} \begin{cases} 3v + v_f^2/v, & (v > v_f) \\ 3v_f + v^2/v_f, & (v < v_f) \end{cases} \quad (169)$$

となる。これから、

$$\begin{aligned} F_n(v) &= \int_0^v \left(\frac{v_f}{v}\right)^n f(v_f) dv_f \\ E_n(v) &= \int_v^\infty \left(\frac{v_f}{v}\right)^n f(v_f) dv_f \end{aligned} \quad (170)$$

というものを考えると、

$$\begin{aligned} h(v) &= 4\pi v [F_2(v) + E_1(v)] \\ g(v) &= \frac{4\pi v^3}{3} [3F_2(v) + F_4(v) + 3E_3(v) + E_1(v)] \end{aligned} \quad (171)$$



これらから、最終的な結果、すなわち、バックグラウンドが動いている時の、速度に平行な速度変化と垂直なそれを書き下せることになる。それらは、結局、

$$\langle \Delta v_{\text{para}} \rangle = -4\pi\Gamma \left( 1 + \frac{m}{m_f} \right) F_2(v) \quad (172)$$

$$\langle \Delta v_{\text{para}}^2 \rangle = \frac{8\pi\Gamma v}{3} [F_4(v) + E_1(v)] \quad (173)$$

$$\langle \Delta v_{\text{orth}}^2 \rangle = \frac{8\pi\Gamma v}{3} [3F_2(v) - F_4(v) + 2E_1(v)] \quad (174)$$

$$(175)$$

これらから、粒子のエネルギーの変化  $\Delta E$  を出すことができる。

$$\Delta E = v\Delta v_{\text{para}} + \langle \Delta v_{\text{para}}^2 \rangle / 2 + \langle \Delta v_{\text{orth}}^2 \rangle / 2 \quad (176)$$

と書けるので、1次の項は

$$\langle \Delta E \rangle = 4\pi\Gamma v \left[ E_1(v) - \frac{m}{m_f} F_2(v) \right] \quad (177)$$

となる。2次の項については、 $(v\Delta v_{\text{para}})^2$ 以外の項は小さいので無視すると

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{8\pi\Gamma v^3}{3} [F_4(v) + E_1(v)] \quad (178)$$

となる。

さて、速度分布を熱平衡、すなわち

$$f_0(v) = \frac{n_f}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \quad (179)$$

とすると、上の係数等を具体的に計算できることになって、その形は

$$\langle \Delta v_{\text{para}} \rangle = -4\frac{n_f\Gamma}{\sigma^2} \left(1 + \frac{m}{m_f}\right) G(x) \quad (180)$$

$$\langle \Delta v_{\text{para}}^2 \rangle = 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma} G(x)/x \quad (181)$$

$$\langle \Delta v_{\text{orth}}^2 \rangle = 2\sqrt{2} \frac{n_f \Gamma \operatorname{erf}(x) - G(x)}{\sigma x} \quad (182)$$

$$\langle \Delta E \rangle = \sqrt{2} \frac{n_f \Gamma}{\sigma} \left[ -\frac{m}{m_f} \operatorname{erf}(x) + \left( 1 + \frac{m}{m_f} \right) x \operatorname{erf}'(x) \right] \quad (183)$$

ここで  $\operatorname{erf}$  は誤差関数であり、

$$G(x) = \frac{\operatorname{erf}(x) - x \operatorname{erf}'(x)}{2x^2} \quad (184)$$

また  $x = v_t / (\sqrt{2}\sigma)$  である。

山ほど式はでてきたものの、全然なんだかわからないという気分になった人もまあいるのではないかと思うので、以下、上の式の意味についてちょっと考えてみよう。

まず、速度の1次の項を見てみる。これは、速度分布には  $F_2$  だけを通して依存しているということに注目して欲しい。例えば、マックスウェル分布のようなものを考えた時、 $v$  が大きい極限では  $F_2 \sim 1/(2\pi v^2)$  となるので、回りが止まっているときと同じく速度変化は速度の2乗に反比例す

る。これに対して、 $v$ が小さい極限では、 $f$ を一定と見なすことが出来るので  $F_2 \propto v$  となる。

これは、タイムスケールを考えてみると、速度が大きい極限では減速のタイムスケールが  $v^3$  であるのに対し、逆の極限では一定になるということである。すなわち、非常に速度が大きい粒子が出来てしまうとこれはなかなか減速しない。もちろん、自己重力系の場合には、そのようなものは系のなかに留まるのが困難だということもあるが。

これに対し、速度が小さいほうではタイムスケールがある一定値、つまりは  $v \sim \sigma$  で決まる値あたりになるということである。

この1次の項は、前に述べたように **dynamical friction** を表している。これが問題になる場面は、例えば恒星系が質量の違う2つの成分から出来ているような場合である。力学平衡で、分布関数に質量依存がないようなものを考えると、これは熱平衡から遠くはなれている。従って、上の式で決まるタイムスケールで重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得る。

なお、自己重力系ではこのエネルギー交換の結果熱平衡に向かうとは限らないということに注意する必要がある。つまり、重いものがエネルギー

を失い、軽いものがエネルギーを得るということは、それぞれの分布関数が変わり、空間分布も変わるということである。具体的には、重いものは中心に落ちるし、軽いものは外側に押し出される。

さて、次に、**2**次の項を見てみる。速度に平行な成分も垂直な成分も、 $v$ が大きい極限では**0**にいく。特に、垂直な成分は $v$ に反比例する。これに対し、速度が**0**の極限では、どちらも一定値に収束する。これは停止している極限でも、回りの粒子によって揺さぶられるということを表しているわけである。

# 惑星形成における緩和過程

微惑星からの惑星形成において、**2体緩和**は本質的な役割を果たす。

- ここで緩和するのは、「円軌道からのずれ」
- なので、重い(大きい)ものは円軌道に近く、軽い(小さい)ものは円軌道からのずれが大きくなる

## 2体緩和のタイムスケール

「タイムスケール」というのは、普通ある量  $x$  の時間変化が

$$\frac{dx}{dt} = (-)\frac{x}{T} \quad (185)$$

なる形で書ける時の  $T$  のことである。もちろん、一般には  $T$  は  $x$  を含むいろんなものの関数である。

そういった意味で考えやすいのは、温度（平均運動エネルギー）が違う2つの空間一様な分布が重なりあっている時に、どのようにして2つが近付いていくかというものである。これは、もちろん時間が立てば熱平衡に近づくわけである。以下、実際に計算してみる。

# 等分配のタイムスケール：理論

今、フィールドに質量  $m_f$  の粒子が一様に分布しており、テスト粒子として質量  $m_t$  のものがこれもまた一様に分布しているとする。さらに、どちらも速度分布はマックスウェルで与えられるとする。ここでは等分配を考えるので、それぞれの粒子 1 個当たりのエネルギーを  $E_f, E_t$  と書く。今、テスト粒子のエネルギー変化の平均を考えると、

$$\frac{d \langle E_t \rangle}{dt} = 4\pi \int v_t^2 f(v_t) \langle \Delta E_t \rangle dv_t \quad (186)$$

と書けることになる。これに前に求めた  $\langle \Delta E \rangle$  を入れて実際に積分を実行することができて、結果は

$$\frac{d \langle E_t \rangle}{dt} = 2\sqrt{6/\pi} \frac{m_t n_f \Gamma}{m_f} \frac{\langle E_f \rangle - \langle E_t \rangle}{(v_t^2 + v_f^2)^{3/2}} \quad (187)$$



となる。

ここで、いくつかの極限的な場合を考えておくことは有益であろう。まず、 $m_t \gg m_f$  で  $v_t \sim v_f$  という状況を考えてみる。これはつまり非常に重いものと軽いものが、同じような空間分布、速度分布で広がっている場合である。この時は上の式で  $E_t \gg E_f$  なので、

$$\frac{d \log \langle E_t \rangle}{dt} = -\sqrt{3/\pi} \frac{m_t n_f \Gamma}{m_f v^3} \quad (188)$$

となる。なお、この時、変化率はテスト粒子の速度に分母の  $v_t^2$  を通してしか依存しないので、 $v_t \rightarrow 0$  の極限でエネルギー変化（減速）のタイムスケールは一定値にいき、それは  $v_t \sim v_f$  の時の値とそれほど変わらない。

次に、 $m_t \sim m_f$  で  $v_t \ll v_f$  という状況を考えてみる。この時は上の式を

$$\frac{d(\langle E_t \rangle / m_t)}{dt} = 2\sqrt{6/\pi} \frac{n_f \Gamma}{m_f} \frac{\langle E_f \rangle}{2v_f^3} = 8\sqrt{6\pi} G^2 \ln \Lambda n_f m_f \langle E_f \rangle v_f^{-3} \quad (189)$$

となる。ここで

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln \Lambda \quad (190)$$

を使った。さらに、 $E_t = m_t v_t^2 / 2$  などを使って書き直せば

$$\frac{d(v_t^2)}{dt} = 4\sqrt{6\pi} G^2 \ln \Lambda n_f m_f^2 v_f^{-1} \quad (191)$$

を得る。つまり、速度が小さい極限では、一定の率でエネルギーをもらうわけである。言いかえれば、温度が**2**倍になるタイムスケールというものは、温度に比例して小さくなるともいえる。

さて、通常「**2**体緩和のタイムスケール」という時には何を指しているかということ、この等分配のタイムスケールのことではないのが普通である。が、時と場合によっていろんなものが出てくるが、まあ同じようなものである。普通に使われるのは、

$$t_r = \frac{1}{3} \frac{v_m^2}{\langle v_{\text{para}}^2 \rangle_{v=v_m}} = \frac{v_m^3}{1.22n\Gamma} = \frac{0.065v_m^3}{nm^2G^2 \log \Lambda} \quad (192)$$

とするものである。ここで  $v_m$  は **r.m.s.** 速度である。1/3 になにか意味があるわけではなく、こう定義したというだけである。

これは、ローカルな量で定義されていて、例えば系全体の緩和時間といったものを考えるのにはちょっと不便なこともある。というわけで、いわゆる **half-mass relaxation time**  $t_{rh}$  というものを導入しておく。これは、半径  $r_h$  の中に質量の 1/2 があるとして、その中の密度は一様であるとし、また前にやったようにビリアル定理から  $T \sim 0.2GM^2/r_h$  といった関係を使えばでてくる。これは

$$t_{rh} = 0.138 \frac{Nr_h^{3/2}}{M^{1/2}G^{1/2} \log \Lambda} \quad (193)$$

となる。

ここで注意しないといけないことは、 $t_{rh}$  はあくまでも球対称に近い系の **half mass radius** のあたりでの緩和時間であるに過ぎないということである。従って、球状星団全体の緩和時間とか、あるいは楕円銀河、銀河団といったものには有効な概念であるが、球対称から大きくずれた銀河とか、あるいは **half mass radius** のずっと外側、ずっと内側では全く違っ

たものになっていることに注意する必要がある。さらに、速度分布が非等方であるとか、回転がメインであるとかでもまた話が全く変わってくる。このような場合、ローカルな緩和時間、あるいはエネルギー変化自体の式に戻って考えないと、タイムスケールについて全く間違った推定をしてしまうことになる。

これがもっともクリティカルに効いて来るのは、実際の天体においてというよりはむしろシミュレーションにおいてである。これについては後で具体例で議論しよう。

# 等分配のタイムスケール：実験

さて、実際に数値実験でエネルギー等分配に近づく過程を見て、これまで理論的に考えてきたもの、特に積分の上限がどうなっているかみようというわけだが、これはそれほど簡単ではない。というのは、「空間分布が無  
限一様」とか「等温」とかいう初期条件が設定できないためである。

一例として、**Farouki and Salpeter (1982 APJ 253, 512, 1994 APJ 427, 676)**の実験を取り上げてみる。彼らは、実際に2種類の違う質量の粒子からなる、初期に力学平衡にある系を考えた。初期には単位質量あたりの運動エネルギーが同じであるようにした（つまり、空間分布、速度分布ともに同じということ）。したがって、重い方が熱平衡に比べて余計に運動エネルギーを持っていることになる。

正確にいうと、実際に力学平衡にある系を作ったわけではなく、適当に球とか立方体のなかに一様に粒子をばらまいて、落ちつくまで待ってから使うという方法をとっている。速度は、全体としてビリアル平衡になるようにマックスウェル分布を与えた。

さて、この系を進化させると何が起こるかをまず考えてみる。重い方の温

度が高いので、平均的には重い方から軽い方にエネルギーが流れるであろう。しかし、その結果温度が近づくであろうか？これはとりあえず何ともいえない。というのは、ポテンシャルが一様ではないのでエネルギーの変化は粒子の速度分布だけでなく密度分布、すなわち粒子の位置と重力エネルギーにも影響するからである。エネルギーの変化が温度にどう影響するかは、もともとの粒子の分布にも依存するわけである。

さらにややこしいことに、 $\log \Lambda$  がなんであるかという問題もある。通常、 $N$  体計算においては、**2** 粒子間の重力ポテンシャル  $\phi_{ij} = -Gm_i m_j / r_{ij}$  をそのまま使わないで、典型的には

$$\phi_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2 + \epsilon^2} \quad (194)$$

という形に「ソフトニング」したものを使う。これは、数値計算上の困難を避けるのが第一義的な理由である。つまり、純粋な  $1/r$  ポテンシャルを使うと、**2** つの粒子が無限に近付き得る。無限に近づくこと自体は問題ではないが、この時速度と重力エネルギーも無限大になる。従って、非常に高い精度で計算しても、エネルギーの誤差が非常に大きくなってしまう。

もちろん、近付いたら解析解に切替える、あるいは摂動法にする、または座標変換をして特異性を消すといった方法があるが、どれもかなり面倒である。そこで、多くの数値実験で、ポテンシャルをすこし変えて原点で発散しないようにする。この場合、インパクトパラメータが  $\epsilon$  よりも小さい時にはほとんど曲がらなくなるので、速度変化の積分の下のほうを修正する必要が起きる。大雑把にいて  $p < \epsilon$  の寄与を無視すればよいことになる。

図 1 に典型的な結果を示す。Farouki and Salpeter では、温度とかエネルギー変化を直接測定するのは断念し、その代わりに軽い粒子の **half mass radius** をとった。彼らは緩和時間として

$$T_R = \frac{R_0}{dR/dt} \quad (195)$$

つまり、半径の変化のタイムスケールをもって緩和時間であるとした。これはもちろん定数を別にすれば上で考えた定義と一致するものになっている。

この結果から、彼らは  $\log \Lambda$  と粒子数  $N$  について図 2 のような関係を

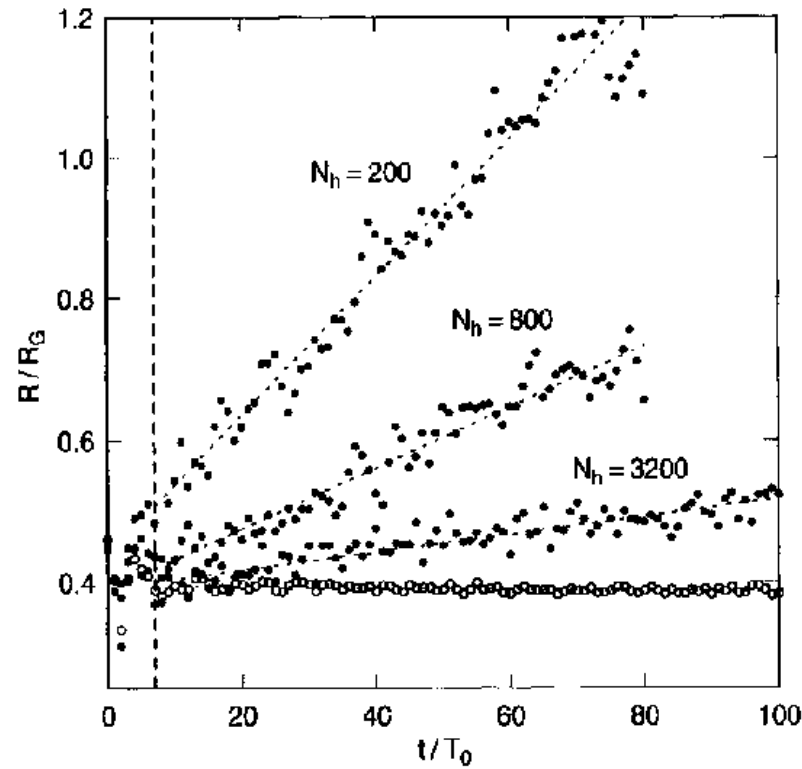


FIG. 1.—Time evolution of the half-mass radii  $R_h(t)$  for light particles for typical runs with  $c_h = c_{h1}$  and various values of  $N_h$ , together with least-squares fits (*dashed lines*) to the data for  $t \geq 7T_0$  [the open dots show the half-mass radius  $R_h(t)$  of heavy particles for the run with  $N_h = 3200$ ].

Figure 1: 緩和過程



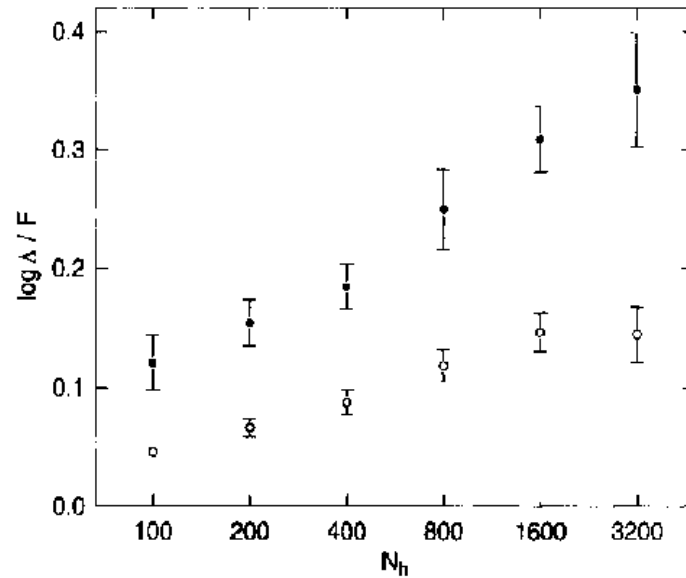


FIG. 4.—Dependence of the quantity  $(\log \Delta)/F$  on the number  $N_h$  of heavy particles for runs with “small” softening,  $c_h = c_{h1}$  (solid dots), and “large” softening,  $c_h = c_{h2}$  (open dots).

Figure 2:  $\log \Lambda$  と粒子数  $N$

得た

上と下は  $\epsilon$  の大きさが違い、上は  $R/N$  の程度、下は  $R/N^{1/3}$  の程度であ

る。ここで  $F$  は緩和時間を

$$t_{rh} = F \frac{N}{26 \log \Lambda} t_d \quad (196)$$

と書くことにしたために出てくる定数である。**26** という定数は、前に出てきた  $t_{rh}$  を  $t_d$  を使って書き直したので、定数の **0.138** が違う値になっているだけのものである。

彼らの主な主張は、「この振舞いは上のカットオフがシステムサイズであるという理論と一致している」というものである。それはまあかなり確かといってもよいと思われる。が、 $F$  の値を推定すると **10** 程度になり、かなり大き過ぎるものになっている。これは、定義の違いもあるので評価はちょっと難しい。

もうちょっと良くあっている例を紹介しておこう。

図 **3** は **Spurzem and Takahashi (1995, MNRAS 272, 772)** によるものである。ここでは、緩和時間といった定義のはっきりしないものを比べているのではなく、系の構造そのものの変化を、 $N$  体計算の結果とモーメント方程式から導いた（球対称、等方の）フォッカー・プランク方程式の

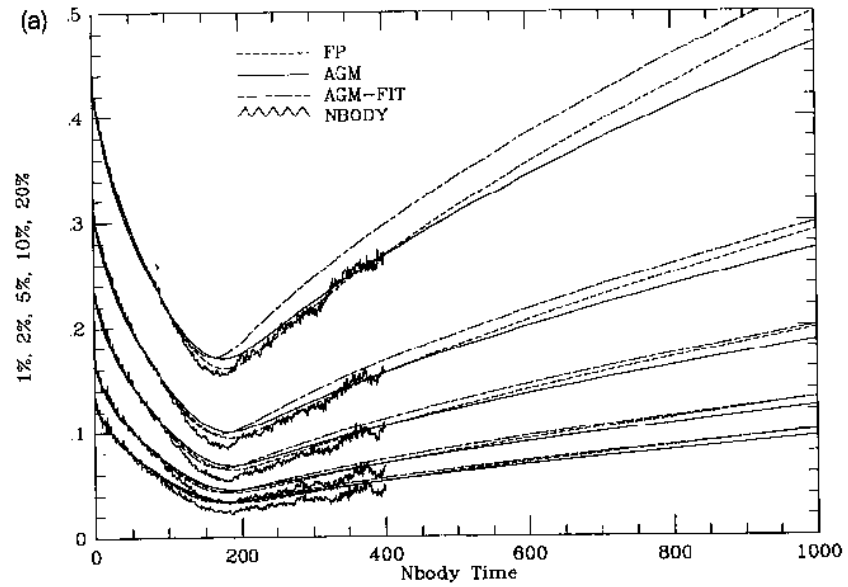


Figure 3: 2体緩和による系の構造進化

数値解とで比べている。結果の一致は素晴らしいものである。

# フォッカープランク近似

さて、数値計算の精度がどうという話を別にすれば、**2**体緩和を考える理由はそれにより系がどう進化するかを理解するということである。そのためには、粒子の速度変化のモーメントの式から、分布関数の変化についての方程式を導くことが有用であろう。

粒子の物理量の変化の**1**次と**2**次のモーメントから（高次の項の寄与を無視して）分布関数に対する移流拡散方程式を導くことができる。この操作を通常フォッカープランク近似といい、でてきた方程式をフォッカープランク方程式という。以下、その導出を行なってみる。これは、ボルツマン方程式の衝突項を求めることに対応する。

今、 $P(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})d\Delta\mathbf{v}$  が、速度  $\mathbf{v}$  の粒子が、時間  $\Delta t$  の間に速度変化  $\Delta\mathbf{v}$ （の近傍の  $d\Delta\mathbf{v}$  の範囲）を受ける確率であるとする。すると、 $\Delta t$  たった後の分布関数は以下のように書ける

$$f(\mathbf{v}, t + \Delta t) = \int f(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, t) P(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d\Delta\mathbf{v} \quad (197)$$

これは  $v$  のところにやってくる可能性があるものすべてについての和をとっただけである。ここで、両辺を展開することを考える。左辺は

$$f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \quad (198)$$

である。右辺は

$$\int \left[ fP - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(fP)}{\partial v_i} \Delta v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2(fP)}{\partial v_i \partial v_j} \Delta v_i \Delta v_j + \dots \right] d\Delta v \quad (199)$$

ここで、

$$\langle \Delta v_i \rangle \Delta t = \int P \Delta v_i d\Delta v \quad (200)$$

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle \Delta t = \int P \Delta v_i \Delta v_j d\Delta v \quad (201)$$

とおけることを使えば、微分と積分の順序を入れ換えて

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(f \langle \Delta v_i \rangle)}{\partial v_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2(f \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle)}{\partial v_i \partial v_j} \quad (202)$$

これで、理屈の上では分布関数の変化が計算できるということになる。もちろん、実際にこれを解いて自己重力系の進化を調べるのは、必ずしも容易ではない。その理由は、分布関数が**6次元位相空間**上で定義されること、それがジーンズの定理を満たすように進化しなければいけないことである。具体的には、

- そもそも、球対称とかの仮定なしでは運動の積分だけの関数であるような分布関数が求まらない
- 実際に運動の積分の関数として分布関数が書ける場合でも、拡散係数を求めるのはそれほど容易ではない。
- 実際に拡散係数が求まっても、自己重力系なので分布関数が増加すると同時にポテンシャルも変化することになり、それによって粒子の

軌道が断熱的に変化することになる。そのへんを考慮してつじつまがあうような計算プログラムを作るのは容易ではない。

というような困難があり、従来は、分布関数をエネルギーだけの関数と近似する計算しか行なわれていなかった。**1994**年頃に、**Takahashi** が初めて  $f(E, J)$  の場合に信頼できる結果を得ることに成功した。しかし、これも、拡散係数を求める時に、フィールドの分布は等方的であるという近似を行なっている。

なお、モンテカルロ法など、もうちょっといい加減な方法ではある程度のことには出来ている。この辺についてはまた後でもう少し詳しく触れる。



# 熱力学的進化

ここからは熱力学的な進化ということで、いくつかの理想化された場合を考えておく。なお、以下はまた流体近似で話をする。自己重力質点系の熱力学的な進化をそのまま考えるのはほとんど不可能だからである。原理的には、今やったような **Fokker-Planck** 方程式の平衡解をつくって、その安定性を調べればできるわけだが、これまでそのような研究はあまり行なわれていない。また、熱平衡状態とその安定性に関するかぎり、ガスか質点系かという違いには意味がない。まあ、そういうわけで、ガスで考えるということにもそれなりの意味はある。

もちろん、平衡状態からのずれの時間発展はガスか質点系かで大きく違うわけだが、おもな違いは熱伝導の係数の密度、温度への依存の違いとして理解できる。

# 等温状態の安定性

まず、もっとも単純な場合ということで、等温の平衡状態を考える。話を簡単にするために、球対称の断熱壁の中のガスということにする。平衡状態は、静水圧平衡の式

$$\frac{dp}{dM} = -\frac{M}{4\pi r^4}, \quad (203)$$

$$\frac{dr}{dM} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \quad (204)$$

を考えればいい。例によって球対称で、 $M(r)$  は半径  $r$  の中の質量、 $p$  と  $\rho$  は圧力と密度である。面倒なので、単位系として  $G = M = R = 1$  となるようにとる。 $G$  は重力定数、 $M$  は壁（断熱壁）のなかの全質量、 $R$  は断熱壁の半径である。

温度は、状態方程式

$$p = \rho T \quad (205)$$

で決まる。単位質量当たりのエントロピーは

$$s = \ln(T^{3/2} \rho^{-1}) \quad (206)$$

であり、境界条件は

$$\begin{aligned} r &= 0 \quad \text{for} \quad M = 0, \\ r &= 1 \quad \text{for} \quad M = 1. \end{aligned} \quad (207)$$

である。この解自体は、すでに何度か扱ったように数値的に求めることが出来る。

以下、熱力学的安定性について議論するわけだが、これにはいろんな流儀があって、なんだかよく理屈がわからないものもある。等温の自己重力ガスの安定性について初めて議論したのは **Antonov (1961)** であり、もうちょっと詳しい議論が **Lynden-Bell & Wood (1968)** によってなされた。しかし、これらはいずれも真の意味での安定性解析、すなわち、平衡解に

対する摂動を考え、それが成長するかどうかをしらべたというものではない。

そのような意味での安定性解析を初めて適用したのは、 **Hachisu & Sugimoto (1978)** である。彼らの方法は、大雑把にいうと以下のようなものである。

- 平衡解の回りの線形化した摂動に対する方程式を作る
- 適当な制約条件のもとで、全エントロピーの2次の変分  $\Delta S^2$  を最大にするような摂動を求める。これは、具体的な手続きとしては固有値問題を解くことに帰着される。
- 仮に求めた  $\Delta S^2$  が正であれば、これは、平衡状態がエントロピー極大の状態ではない、したがって、不安定点であるということの意味する。

等温状態なのでエントロピーは通常ならば極大値である。これは、任意のエントロピーの再分配に対して、 $\Delta S = 0, \Delta S^2 < 0$  となっているということの意味する。

これは、熱をちょっとどこかからとって別のところに与えると、それによる温度変化を考えなければ（一次の変分）エントロピーは変わらない。また、温度変化を考えると（二次の変分）、熱をもらった方は温度が上がっているのでもらうエントロピーは少なく、出したほうは逆に温度が下がるので出ていくエントロピーが多い、従って、系全体としては普通は摂動を与えるとエントロピーが減る、すなわち、平衡状態はエントロピー極大に相当している。

以上から、もし、熱を取り去った時に温度が上がるようなことがあればエントロピー極大ではないかもしれないということが想像できよう。もちろん、常識的な熱力学の対象ではそんなことはあり得ないわけだが、自己重力系ではそうではないというのはすでにビリアル定理のところで行った通りである。

つまり、自己重力系を全体として考えると、熱を奪うと系が小さくなり、単位質量あたりの運動エネルギー、すなわち温度が大きくなるわけである。

断熱壁で囲んだ系では話はもう少しややこしいが、実際に、十分温度が低い、重力の影響が大きいような系では  $\Delta S^2$  が正になるということを示し

たのが **Hachisu & Sugimoto** である。

この解析は非常に見事なものなので、是非元論文 (**PTP 60, 13**) を読んで見て欲しい。まあ、それはそれとして、ここではもう少し違った解析方法をとってみよう。

# 等温状態からの時間発展

**Hachisu & Sugimoto** の方法では、摂動に対して  $\Delta S^2$  を求め、その符号から安定か不安定かを決めている。この方法では、もちろん、熱力学的に安定かどうかをきめることは出来るが、不安定性がどのように発展するかを調べることはできない。というのは、そのためには熱伝導の式もカップルさせて線形応答を求めないといけないのに、そのような解析は行っていないからである。というわけで、しばらく前にそういう解析をやってみた (**Makino and Hut 1991, APJ 383, 181**) ので、今日はその結果に基づいて話す。

熱伝導の式は

$$K \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{L}{4\pi r^2} \quad (208)$$

と書ける。ここで、 $L(r)$  は半径  $r$  のところでの熱流束であり、 $K$  は熱伝導の係数である。 $K$  は温度、密度の関数だが、ここでは等温に近いので密度だけの関数として

$$K = \rho^\alpha \quad (209)$$

という形を仮定する。放射伝達であれば  $\alpha = -1$  である。

自己重力質点系の場合は、密度が高いほうが緩和が速かった。このことを熱伝導係数でむりやりに表現すると、 $\alpha = 1$  となる。

これは以下のように考えたことになっている。

速度分散が同じなら緩和時間  $T$  は単純に密度  $\rho$  に反比例する。自己重力系を考えると、やはり速度分散が同じなら系の特徴的な大きさ  $R$  は質量  $M \sim \rho R^3$  に比例するので、 $\rho \sim R^{-2}$  なる関係がある。

緩和時間を温度勾配と単位面積当りの熱流束の関係に直してみると、温度勾配は  $1/R \sim \rho^{1/2}$  の程度、単位面積当りの熱流束は  $\rho R/T \sim \rho^{3/2}$  の程度である。従って  $K \sim \rho$  ということになる。

エントロピーについての式は

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -4\pi r^2 \rho T \frac{\partial s}{\partial t} \Big|_M. \quad (210)$$

で与えられ、境界条件は

$$L = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \quad \text{and} \quad M = 1. \quad (211)$$



ということになる。

# 線形化した方程式

微小な摂動に  $\delta$  をつけることにして、線形化した方程式は

$$\frac{d\delta \ln p}{dM} = \frac{M}{4\pi p r^4} (\delta \ln p + 4\delta \ln r), \quad (212)$$

$$\frac{d\delta \ln r}{dM} = -\frac{1}{4\pi r^3 \rho} (3\delta \ln r + \delta \ln \rho), \quad (213)$$

$$\delta \ln p = \delta \ln \rho + \delta \ln T, \quad (214)$$

$$\delta s = \frac{3}{2} \delta \ln T - \delta \ln \rho, \quad (215)$$

$$(216)$$

境界条件は

$$3\delta \ln r + \delta \ln \rho = 0 \quad \text{for } M = 0 \quad (217)$$

$$\delta \ln r = 0 \quad \text{for } M = 1 \quad (218)$$

$$(219)$$

ということになる。

熱流束とエントロピーの変化については、もとの式が線形なのでそのまま使える。つまり、 $L = \delta L$  なので、 $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \delta T}{\partial r}$  であり、また  $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial \delta s}{\partial t}$  となる。これらは始めから一次の微小量しか含んでいない。

この方程式系に対して、

$$\begin{aligned}\delta \ln p &= \delta \ln p_0 e^{\lambda t}, \\ \delta \ln r &= \delta \ln r_0 e^{\lambda t}, \\ \delta \ln \rho &= \delta \ln \rho_0 e^{\lambda t}, \\ \delta \ln T &= \delta \ln T_0 e^{\lambda t}, \\ \delta L &= \delta L_0 e^{\lambda t}, \\ \delta s &= \delta s_0 e^{\lambda t}.\end{aligned}\tag{220}$$

という形をした解を捜すわけである。ここで、添字 0 がついたものは時間発展解の空間依存性を表す。線形化したので固有モードが出てきて欲しいなという解析をしているわけである。これらを線形化した方程式に入れる

と、固有値問題

$$\frac{d\delta \ln p_0}{dM} = \frac{M}{4\pi p r^4} (\delta \ln p_0 + 4\delta \ln r_0) \quad , \quad (221)$$

$$\frac{d\delta \ln r_0}{dM} = -\frac{1}{4\pi r^3 \rho} (3\delta \ln r_0 + \delta \ln \rho_0) \quad , \quad (222)$$

$$KT \frac{d\delta \ln T_0}{dM} = -\frac{\delta L_0}{(4\pi r^2)^2 \rho_0} \quad , \quad \frac{d\delta L_0}{dM} = -\lambda T \delta s_0 \quad , \quad (223)$$

$$\delta \ln p_0 = \delta \ln \rho_0 + \delta \ln T_0 \quad , \quad (224)$$

$$\delta s_0 = \frac{3}{2} \delta \ln T_0 - \delta \ln \rho_0 \quad . \quad (225)$$

が出てくる。ただし、境界条件は

$$3\delta \ln r_0 + \delta \ln \rho_0 = 0 \quad \text{for } M = 0 \quad (226)$$

$$\delta \ln r_0 = 0 \quad \text{for } M = 1 \quad (227)$$

$$\delta L = 0 \quad \text{for } M = 0 \quad (228)$$

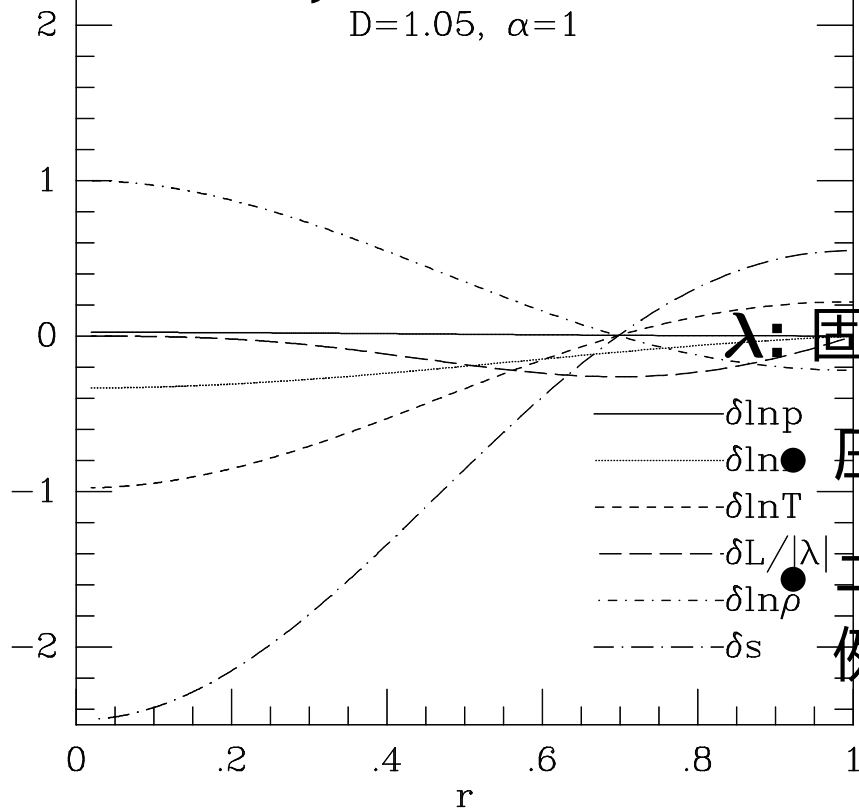
$$\delta L = 0 \quad \text{for } M = 1 \quad (229)$$

ということになる。

さて、これを解かないといけないわけだが、数値解法まで触れている余裕がないので詳細は省く。我々はいわゆる **shooting method** を使ったが、本当は緩和法のほうが安全であったかもしれない。

以下、どういう答が求まり、それはどういうものかということを中心にまとめよう。

# 安定な場合, $D = 1.05$



$\lambda$ : 固有値

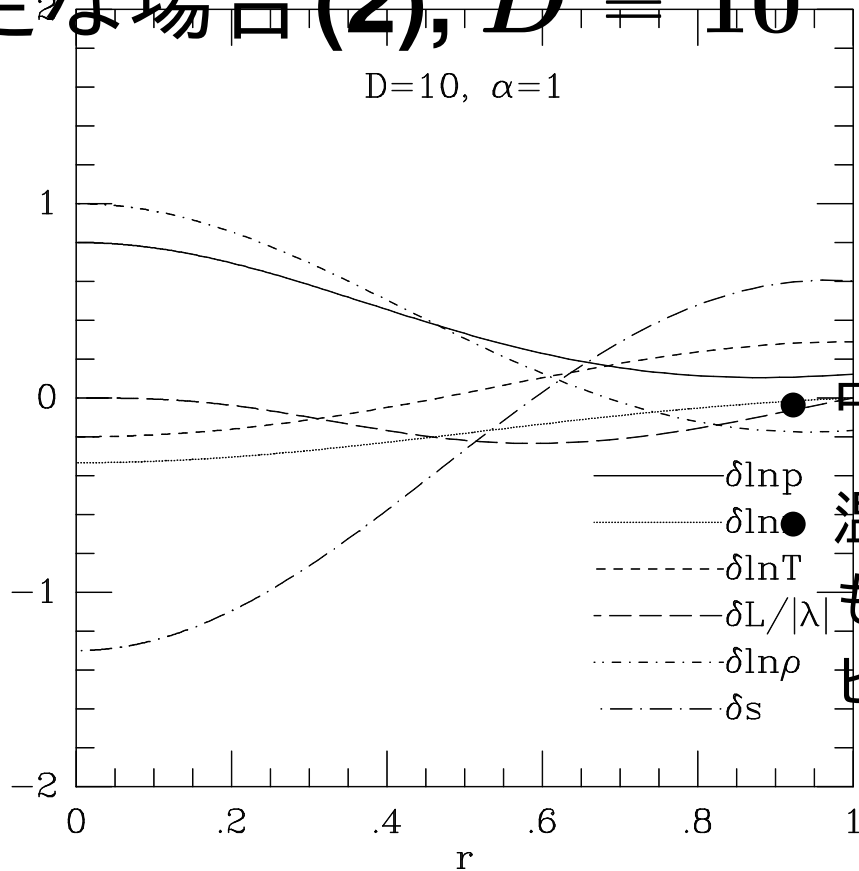
● 圧力は変化しない

● エントロピーと温度が比

例

要するに、普通の断熱容器の  
なかのガス。

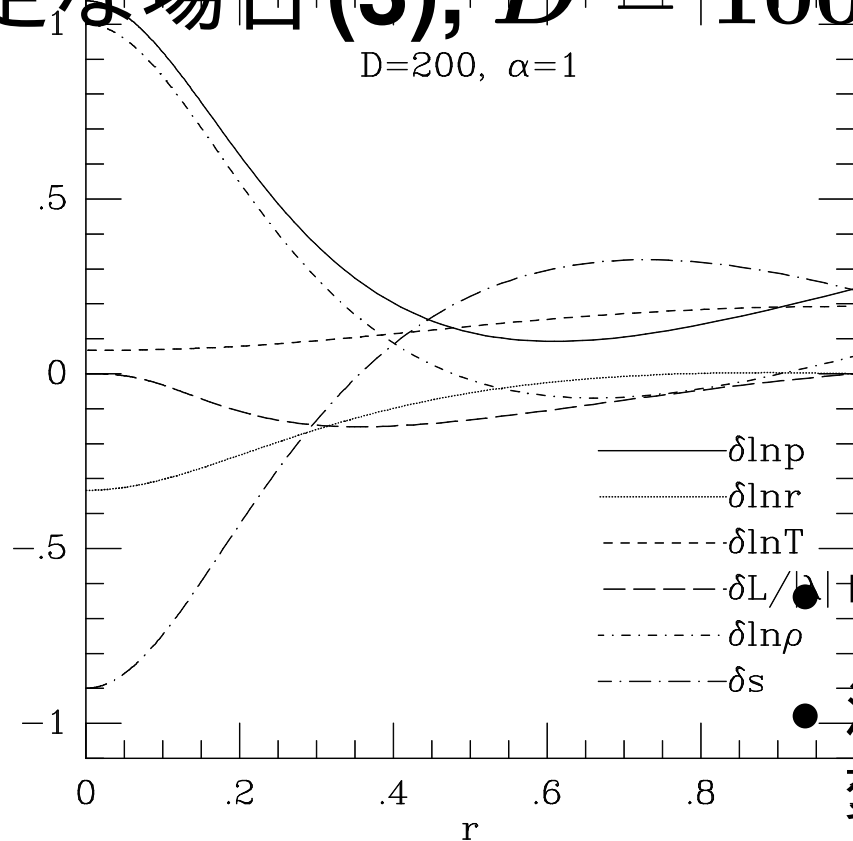
# 安定な場合(2), $D = 10$



● 中心で圧力が上がる

● 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

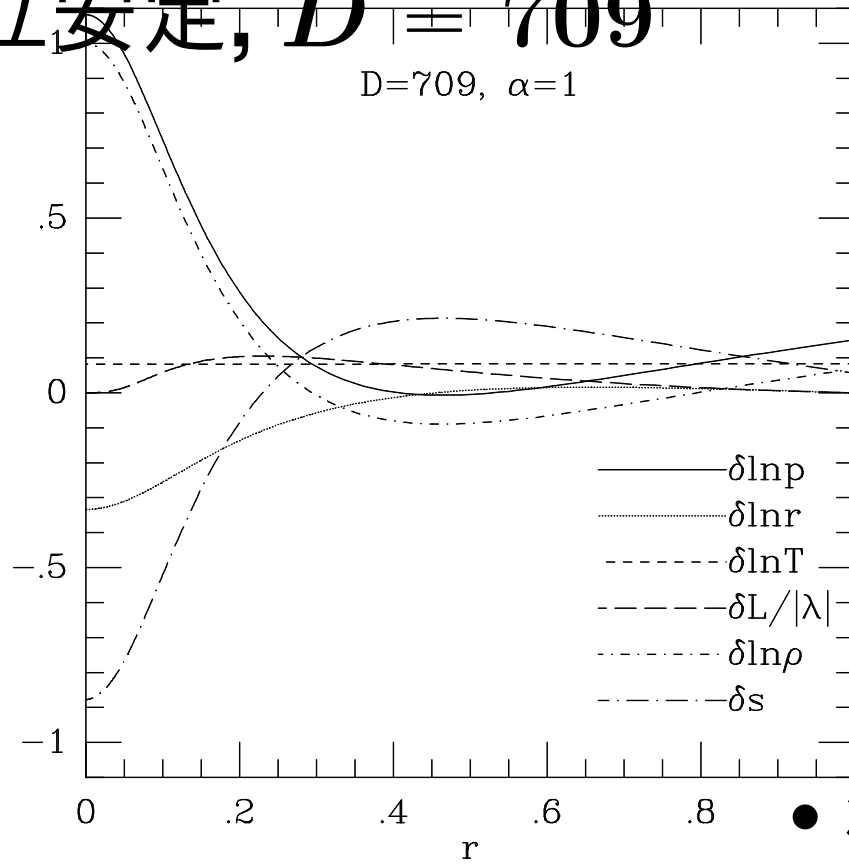
# 安定な場合(3), $D = 100$



- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き (この場合中心の方が低温)
- 熱力学的には安定



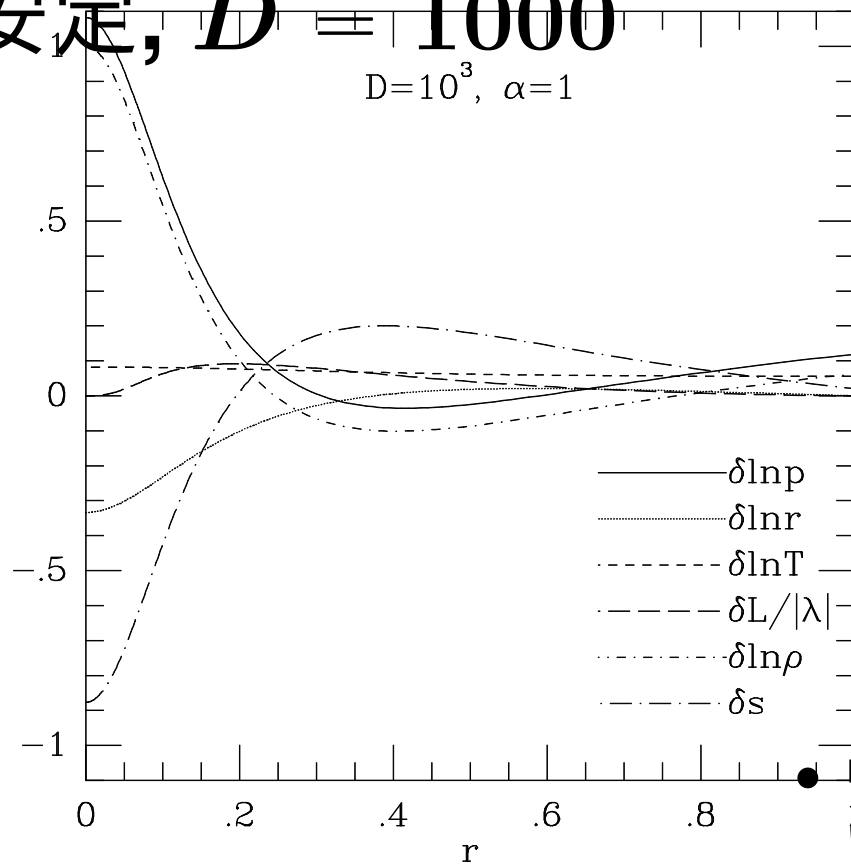
# 中立安定, $D = 709$



- 温度勾配ができない

- したがって、摂動がもとに戻らない

# 不安定, $D = 1000$



● 中心のほうで温度上昇が大きい

不安定になっている

# 重力熱力学的不安定性

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

一応、「重力熱力学的不安定性」 **gravothermal instability** という名前がついている。

発見：**V. Antnov (1961)**

上のような安定性の明確な定式化：**Hachisu & Sugimoto (1978)**

# もっと先の進化

摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

**Hachisu *et al.* (1978)**：自己重力流体について数値計算した。

**Cohn (1980)**：流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。

# 有限振幅での進化

今回は、断熱壁に囲まれた自己重力ガスの熱平衡状態の安定性を検討した。基本的な結論は、重力の寄与が大きくなると、熱平衡状態が不安定になるということであった。

このあとどうなるかということを知るためには、数値計算をする必要がある。**Hachisu et al. (1978)** は、自己重力流体についてそのような数値計算を行なった。

結果の詳細は省くが、重要なことは、中心から熱をとったときに自己相似解が現れる場合があるということである。

中心に熱を与えると、中心は温度を下げつつ膨張する。このときは、結局最終的には安定平衡にいつてしまうことになる。しかし、中心から熱をとったときにはどこかいき先があるわけではない。

この後の進化は、熱伝導のタイムスケールによる。密度が上がるとタイムスケールが長くなるような場合には、大雑把にいつてかなり大きなものが全体として収縮していく。

これに対し、恒星系に対応する場合は、密度が上がるとタイムスケールが短くなる。この時は、密度の高い「コア」が出来、それがどんどん収縮を続けるということになる。これに関する詳細な解析は **Lynden-Bell & Eggleton (1980, MNRAS 191, 483)** に与えられているので以下考え方を示す。

自己相似解というのは、ある物理量  $y$  が

$$y(r, t) = y_0(t) y_* [r/r_0(t)]. \quad (230)$$

と書けるようなものである。さらに、 $r_0$  と  $y_0$  が時間のべきで書ける（これは数値計算の結果がそうなっている）とすれば、

$$r_0 = (t_0 - t)^\beta, \quad (231)$$

とか

$$y_0 = (t_0 - t)^\gamma, \quad (232)$$

と書け、結局

$$y_0 = r_0^{\gamma/\beta}. \quad (233)$$

という関係が出てくる。

自己相似解ということで、いろんな無次元量は一定と考えられる。特に、今コアというものを考えて、その半径を  $r_c$  とすれば

$$\sigma^2 \propto \frac{GM_c}{r_c} \sim \rho_0 r_0^2. \quad (234)$$

ここで  $\rho_0$  を

$$\rho_0 = r_0^\alpha, \quad (235)$$

と書けば

$$r_0 = (t_0 - t)^{2/(6+\alpha)}. \quad (236)$$

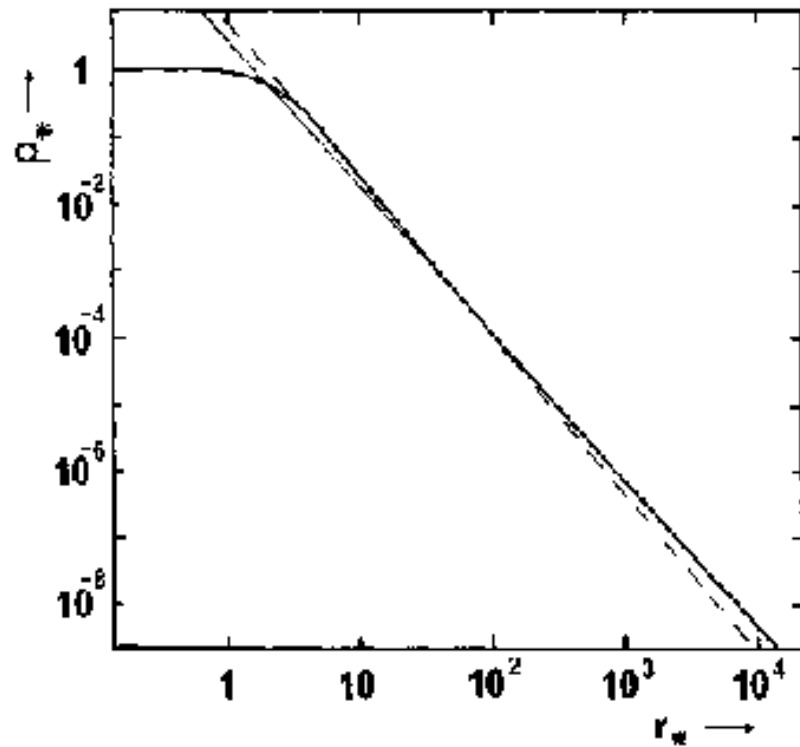
となる。

実際に  $r_0(t)$  とかを求めるには、やはり固有値問題をとくことになる。

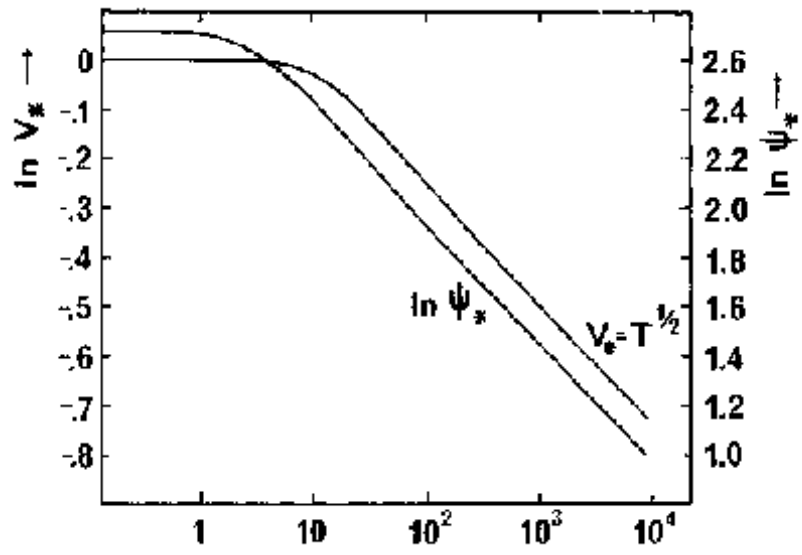
**Lynden-Bell & Eggleton** は実際にといて、

$$\rho = r^{-2.21}. \quad (237)$$

という答を得た。以下に、彼らの求めた固有関数を示す。







# ガスと $N$ 体の違い

実は、このあたりの進化、すなわち重力熱力学的不安定や自己相似解については、ガス近似、**FP** 計算、 $N$  体の間的一致は素晴らしくよい。ガスではうまく表現出来なくなるのは、質量分布がある場合、非等方性が発達する場合等である。

# 自己相似解の後の進化

さて、自己相似解は、ある時刻  $t_0$  で密度が無限大になる。これを **collapse** と呼んでいる。実際にそんなことが起きるのか、また、そのあとはどうなるのかというのは現実的には重要な問題である。というのは、多くの球状星団、あるいは **dwarf E** では、タイムスケールを見積もるとすでに **collapse** しているはずだからである。

その後どうなるかについては、いろいろな可能性が考えられた。特に、これによってブラックホールを作るというアイディアはそれなりに真剣に検討された。

現在のところ、典型的な球状星団とか **dwarf E** では、ブラックホールが出来るというのはありそうにない。コアが十分に小さくなると、エネルギー供給源が出来るからである。

ここでのエネルギー供給の元は連星である。仮に星団があらかじめ連星をもっていなかったとしても、コアが十分に小さくなると、そのなかで**3**体相互作用で連星ができるようになる。これは基本的には星のなかで温度、密度が上がると核融合が始まるというのと変わるところはない。ただし、

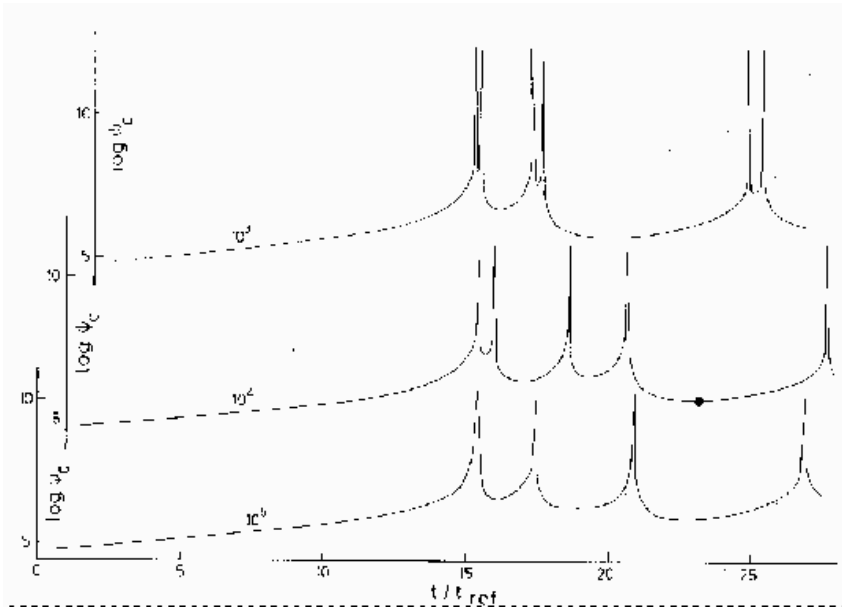
量子力学的な効果はないので、連星の出来やすさは密度と温度（平均速度）の関係だけで決まる。

連星によるエネルギー供給が入ると、コアの収縮は止まる。熱源として連星を考えた計算を始めて行なったのは **Henon (1975)** であり、**1982** 年ころまでにいくつかそのような計算が行なわれた。それらでは、コアからの熱伝導による熱の流出と連星からのエネルギー入力がバランスし、系全体がホモロガスな膨張をするという結果が得られていた。特に、**Goodman (1984)** は実際にそのようなホモロガスな解を求めた。

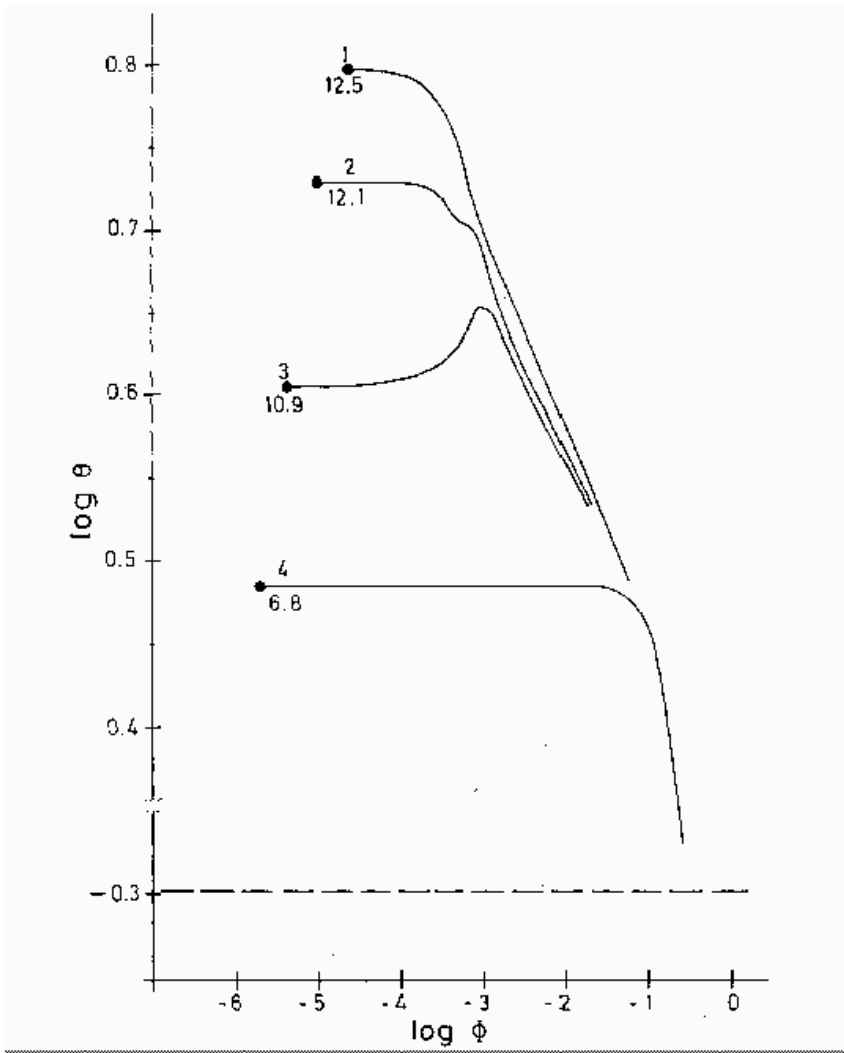
しかし、**1983** 年になって、**Sugimoto & Bettwieser** は、実はこのホモロガスな膨張解も熱力学的に不安定であるという発見をし、その結果起きる振動に「重力熱力学的振動」という名前をつけた。

以下に示すのが彼らの見いだした振動の様子である。

まず、この図は中心密度の時間変化である。**3** 本線があるのは、エネルギー生産の係数である。小さいほうがより振動の振幅が大きくなっているのがわかる。



これは膨張中の温度分布の変化。注意して欲しいのは、膨張中**(3番の線)**では、温度のピークがコアの外側にあることである。このような温度の逆転があることで、コア付近では熱が外側から内側に流れることが可能になる。この時には、等温状態の線型解析で膨張に対しても不安定であったのと同じように、熱が流れこんで膨張することで一層温度が下がり、さらに熱が流れこむ。



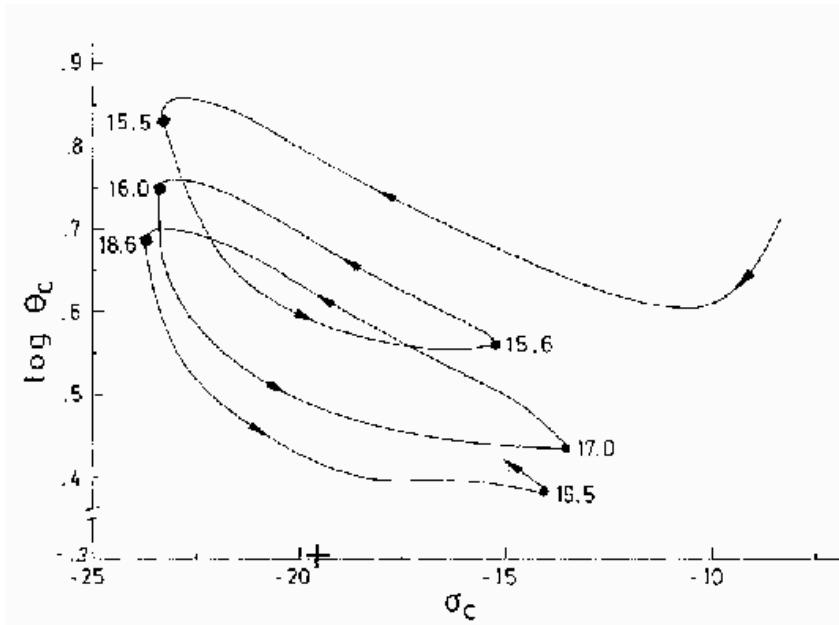
最後に、これはエントロピーと温度の平面でのコアの軌跡である。注意して欲しいのは、この軌跡はこの平面で反時計回りになっていることであ

る。これはどういう意味があるかを考えてみる。

カルノーサイクルはこの平面上で長方形だが、熱機関は時計回りである。この時に、 $\Delta Q = T\Delta S$  を積分して正になって元に戻るので、外への仕事  $\Delta W$  は  $\Delta Q$  と等しく正になる。熱機関であるとはそういうことであつた。

これに対して逆に回るとは、冷凍機 (ヒートポンプ) のサイクルになっていることに対応する。つまり、低温の時に吸収した熱を高温になってから放出しており、そのために外からの仕事を利用している。このことは、この振動が本質的に熱力学的な不安定性によって起きているということを意味している。

もしも単に連星のエネルギー生産が密度が上がると始まり、密度が下がると止まるということで振動が起きているとすると、この時にはコアの軌跡は熱機関的になるはずである。そうではないということが現象を理解する上では極めて重要なことであつた。



とはいえ、彼らの結果はただちに広く受け入れられたわけではなく、そのあと数年に渡る論争があった。その理由は、「それまでの他の人の計算ではいずれも振動が起きていなかった」ためである。具体的には、フォックカープランク方程式を解く計算、ガスモデルでの計算、また、フォックカープランク方程式をモンテカルロ法で解く計算のいずれでも振動は起きていなかった。また、直接の多体計算では、計算機的能力が不足で振動がはっきり見える粒子数を扱うことがそもそもできなかった。

が、**1985**年には他のグループによるガスモデル計算、**1986**年には**FP**計



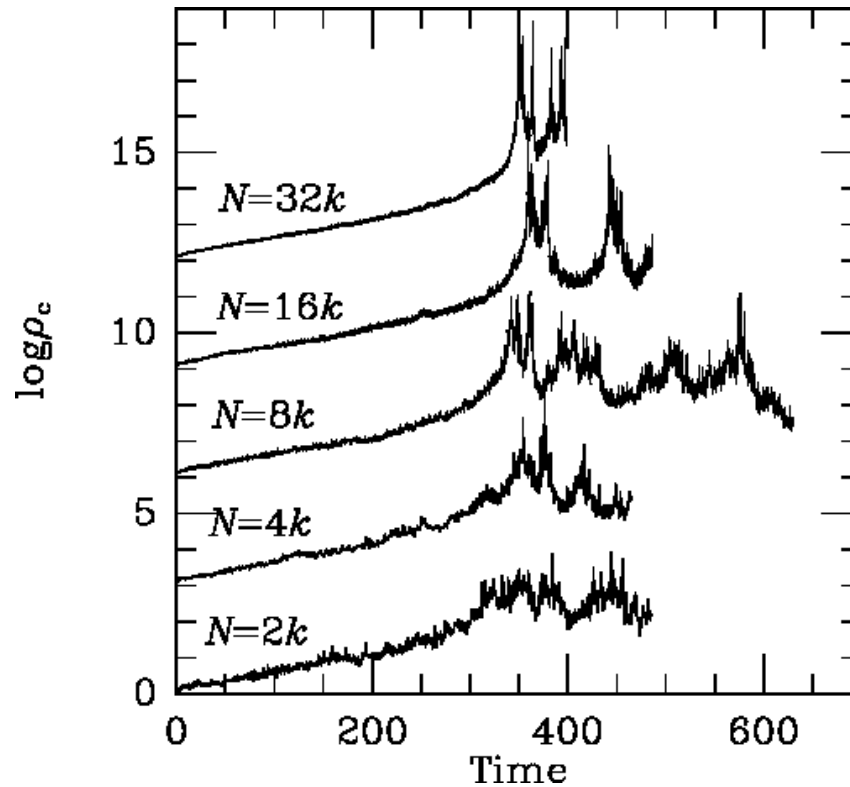
算でも振動が確認された。このきっかけになったのは、**1984**年の**IAU Symposium No. 113**であり、ここで杉本が**D. C. Heggie**と議論し、**Heggie**の流体コードの出力を見て、「時間ステップが大き過ぎるのではないか」と指摘した。

すなわち、自己重力質点系の流体モデルの計算では、それまでのほとんどの計算で、時間刻みは可変であったものの、「1ステップでの変化がある程度以上大きくならないようにする」という基準での時間刻みが使われていた。しかし、この基準での時間刻みと、熱伝導を安定に解く数値計算法を組み合わせると、結果として本来不安定な系でも数値解は安定になってしまうという問題が発生する。

杉本は、元々恒星の内部構造の研究者であり、特に様々な熱的不安定の数値シミュレーションを行ってきたのでこれらの点には注意深かった。このために、元々**Bettwieser**の数値計算で振動が起こった時にその結果に「正しい」解釈を与えることができたのである。

さらに、**1987**年には**Goodman**が自分の求めたホモロガスな膨張解の安定性解析を行い、粒子数が大きい(正確にはエネルギー生産の密度依存性の係数が小さい)と膨張解が不安定になることを示した。

実際に粒子系でそんなもの起きるかどうかにはさらに議論があったが、**1995**年になって  $N$  体数値計算でも確かに振動が起きることが見い出された。



# 「現実の」球状星団

先ほど述べたように、球状星団の進化を普通に考えると、適当な初期条件から始めると典型的には数十億年程度の時間がかかって重力熱力学的なコラプスを起こす。その後の進化は、球状星団が理想的な質点系ならば重力熱力学的振動を起こすということになるが、実際にそうなるかどうかにはいろいろな問題がある。

1. 星同士の物理的な衝突・合体の効果は無視できるとは限らない
2. 始めから連星があるとまた話が変わる

# 連星

まず、初期にある連星の効果を考えてみよう。連星は極めて一般的なものであり、太陽近傍の星は **50%** 程度は連星である。また、種族 II の星も相当部分が連星という観測結果もある。

これに対して、**1990** 年頃までは、「球状星団には **primordial** な連星はない」と思われていた。これは、**Gunn and Griffin (1979, AJ 84, 752)** の広く影響をもった仕事があり、かなり頑張って分光的な連星を球状星団で探したけれども全く見つからなかったという結果になったことが大きい。

しかし、**1990** 年前後から状況が大きく変わる。結局、観測精度が上がると様々な方法で続々と連星が見つかってきたのである。

連星があるとコラプスの後の進化は大きな影響を受ける。これは、恒星進化で **H** の他に **D** があるようなもので、エネルギー生産率を非常に大きくするからである。

つまり、連星を作るためには、**3**つの星がたまたま同時に近くに来る必要があり、このためには非常に密度が高い必要がある。しかし、連星が初

めからあれば、それが他の星と近づけばそれだけでエネルギー生産になるわけである。

また、連星はもちろん単独の星より重いので、**2**体緩和の時間スケールで系の中心に集まってくる。このために、星の場合とは違って、連星「燃焼」段階は簡単には終わらない。

単純に初期には球状星団の星の相当部分が比較的コンパクトな連星であったとすると、緩和時間が短く重力熱力学的コラプスが起きるような星団でもほとんどの場合には現在まで連星燃焼段階が続くという結論になる。もっとも、そうだとすると極めて深くコラプスした **M15** のような星団の存在が説明できないことになり、球状星団と連星の関係については理論的にはともかく観測的、実証的にはまだこれから研究すべき課題が多い。

# 星同士の衝突

現在の我々の銀河系では球状星団クラスの**10**万個以上星が集まったものは全て非常に古いものであり、従って現在ではあまり重い星はない。このため、特に密度が高い球状星団コアにある星はほとんどが中性子星や重い白色矮星であると考えられ、これらは非常にコンパクトな星であるために物理的な衝突は極めて稀である。また、もっと若い散開星団では重い主系列星もあるが、星団自体の密度が低くてやはり物理的な衝突はあまり重力ではないと考えられてきた。

しかし、観測技術が**1990**年代にはいって進んだことで、この辺りも描像が大きく変わってきた。一つは、我々の銀河中心近くで、非常に若くコンパクトな星団がいくつか見つかったことである。**Arches**, **Quintuplet** といった星団は、銀河中心から**30pc**程度の距離で**1**万個程度の星が集まった星団であり、年齢も数**Myrs**と極めて若い。これほど銀河中心近くで存在できているということはもちろん極めて高い密度を意味しており、星同士の衝突が特に中心部では無視できない。

また、**LMC** や **M82** などの系外銀河の星形成領域では、非常にコンパクト

トで大質量な星団が見つかってきている。

最近のシミュレーションの結果では、これらの星団では中心で星同士の暴走的な合体が起きる可能性が指摘されている。つまり、元々重い星が中心の密度が高いところに集まってくるので、これら同士が選択的に衝突する。衝突によって重い星ができると、それは衝突断面積が大きくなるので他の星より衝突しやすくなり、ますます衝突・合体によって成長する。これは、この暴走的に成長した星が超新星になるなりブラックホールになるなりするまでとまらない。

つまり、現在の球状星団ではこれから中心にブラックホールが形成されることはありえないが、最近見つかった若くて高密度の星団ではそのようなことが現在起きているかもしれない。これは、我々の銀河系の球状星団でも、昔にはそういうことがおきたかもしれないということでもある。

# ブラックホールのある系



# 中心ブラックホールのある星団の構造と進化

中心にブラックホール(というか、なんか重いもの)がある星団ではどのような構造が見られることになるだろうか？これに理論的に答えたのは **Bahcall and Wolf (1978)** である。この頃には球状星団の中心にブラックホールがある可能性がかなり高いと考えられていたため、そのような方向の研究が盛んであった。しかし、球状星団の **X線源** がほとんど **Low-mass X-ray binary**、つまり中性子星と小さな主系列星の連星であり、また必ずしも星団中心にあるわけでもないということが **1980年代** になって明らかになったため、しばらくこの方向の研究は止まっていた。

それはともかく、**Bahcall and Wolf** はフォッカープランク方程式を数値的に解くことで密度構造を決めたが、その結果は解析的に理解できることがわかっている。その考えは以下のようなものである。

中心部分の、ブラックホールの重力が支配的な領域を考え、また簡単のために分布関数は等方的であるとする。速度分散はポテンシャルで決まるので、ケプラー速度になって速度は  $v \propto r^{-1/2}$  になる。密度が  $\rho$  であると

しよう。

中心に向かって温度があがっているので、熱は中心から外側に向かって流れる。ここで、定常状態ならば熱流  $L$  が半径に依存しない。

大雑把にいうと、ある半径での熱流は、そこでの緩和時間くらいの中にその領域の全エネルギーくらいが流れ出すと考えることで見積もることができる。これはなんか根拠がない仮定であると思うかもしれないが、仮に密度が半径のべきであるとするれば、温度は元々半径のべきなので無次元量としての温度勾配の大きさはどこでも同じになるため、この仮定は正しいことになる。

問題は、ではそういうべき乗の解はあるかどうかということだが、緩和時間は  $t_r \sim v^3/\rho$  の程度、全エネルギーは  $T = Mv^2 \sim \rho r^3 v^2$  の程度なので、 $T/t_r = \text{const.}$  と置くことで

$$\rho \sim r^{-7/4} \quad (238)$$

という関係がでてくる。

こんな大雑把な計算でいいのかと思うであろうが、割合うまく数値計算の結果を説明できている。

# 熱的進化以外の場合

ここまでは中心にブラックホールがある系について、周りにあるのが同一の質量の星の集団であり、熱力学的な定常状態になれば密度が半径の $-7/4$ 乗のべき分布になることを導いた。これは理論的には美しいが、必ずしも非常に現実的なケースとはいえない。以下では、より現実的と考えられるいくつかの場合について、分布がどのようなようになるべきかを考えてみる。具体的には、以下の**3**ケースを考える

1. 中心ブラックホールが断熱成長する場合
2. 力学的な時間スケールで「突然」中心ブラックホールができる場合
3. 質量分布がある系の熱力学的な進化

これらはそれぞれ、対応する現実的な系がある(かもしれない)と考えられる。

# 中心ブラックホールが断熱成長する場合

これは、例えばガス降着などでブラックホールが比較的ゆっくり成長する場合に、周りの恒星集団の分布がどう変わるかという話である。ゆっくりといっても、力学的な時間スケールよりは十分に遅いが**2**体緩和の時間スケールよりは速いものを考える。これは、銀河中心の巨大ブラックホールの場合にはありそうな話である。

**QSO** や **AGN** の **central engine** は巨大ブラックホールへのガス降着であると考えられているので、ガス降着が終わったあとの恒星系の分布は、この、ブラックホールが断熱成長した場合で与えられると考えられるであろう。この場合の分布関数の変化を数値的および解析的に調べたのは **Young (1980, ApJ, 242, 1232)** である。以下、彼の論文の議論を要約しよう。

始めはブラックホールがなかったとして、分布関数が  $f(E, J)$  であるとする。考えないといけないことは以下の**2**つである。

- 最初に  $(E, J)$  にいた星はどこに移動するか

- その結果  $f(E, J)$  はどう変化するか

というわけで、順番に考えていこう。

まず、 $(E, J)$  にいた星がどこに移動するかであるが、ポテンシャルは球対称のままなのでその形が変化しても角運動量  $J$  は保存する。従って、 $E$  の変化だけを考える。ポテンシャルの変化はゆっくりであるとしたので、断熱不変量がある、具体的には、 **radial action**

$$I_R = \oint v_r dr = 2 \int_{r_-}^{r_+} [2(E - \phi) - (J/r)^2]^{1/2} dr \quad (239)$$

が保存することになる。

初めに恒星系は有限サイズのコアを持っていたとしよう。この時、コアの十分内側では、ポテンシャルは中心密度を  $\rho_0$  として

$$\phi = \frac{2\pi}{3} \rho_0 r^2 \quad (240)$$

で与えられ、断熱不変量は

$$I_R = \oint v_r dr \propto \sqrt{\frac{3}{\rho_0 \pi} E - J} \quad (241)$$

(比例係数は無視)となる。さて、ブラックホールが十分に成長した後、元々コアの中心近くにいた星はブラックホールのポテンシャルの深いところにいると考えよう。この時には、新しいポテンシャルは  $-M_{BH}/r$  であり、断熱不変量は

$$I_R^* = 2\pi(-J + M_{BH}\sqrt{-2E^*}) \quad (242)$$

となる。これを解けば  $E^*$  は求められる。但し、ここでは **BH** ができてからの量に \* を付けて区別することにした。

さて、問題は、 $f^*(E^*, J)$  がどうなるかであり、これがわかれば密度分布がわかる。少しややこしいのは、最初のエネルギーが同じであっても最終のエネルギーは角運動量  $J$  によって違うことで、このために算数が少し面倒になる。

分布関数  $f$  ではなく、 $(E, J)$  空間での分布関数  $N(E, J)$  を考えると、ブラックホールの成長によってこれは滑らかに射影されるので

$$N^*(E^*, J)dE^*dJ = N(E, J)dEdJ \quad (243)$$

なる関係が成り立つ。 $J$  は同じなので、これは

$$N^*(E^*, J)dE^* = N(E, J)dE \quad (244)$$

ということである。従って、 $dE/dE^*$  が計算出来ればいい。ここでは、 $I_R$  と  $E$  の関係を使ってみよう。つまり、 $I_R$  を  $E$  で偏微分すると

$$\left. \frac{\partial I_R}{\partial E} \right|_J = P(E, J) \quad (245)$$

となることが知られている。但し、ここで  $P(E, J)$  は半径方向の周期である。(計算は簡単であるのでやってみること) 従って、

$$\left. \frac{dE^*}{dE} \right|_J = \frac{P(E, J)}{P(E^*, J)} \quad (246)$$

となっただいぶ目標に近づいてきた。

後は  $f$  と  $N$  の関係だが、これは単に

$$N(E, J) = 8\pi^2 J f(E, J) P(E, J) \quad (247)$$

であるということが知られている。で、結局これらから何がわかるかというと、

$$f^*(E^*, J) = f(E, J) \quad (248)$$

ということである。と、これは **Young** の論文にそった議論だが、単にリウビルの定理からもこの場合に  $f$  が保存するのは当然な気もする。まあ、それはともかく、結局、初めにコアの中心近くにいたとすると  $f$  は一定なので、結局ブラックホールの近くではやはり  $f^*$  が一定となる。この時は、速度が  $r^{-1/2}$  で上がるので、 $f$  を一定に保つためには  $\rho \propto r^{-3/2}$  でないといけないことがわかる。

つまり、ブラックホールが恒星系の中心で断熱的に成長する場合には、ブラックホールの十分近くでは  $\rho \propto r^{-3/2}$  のカスプができることになる。

これは美しい理論であり、また重要な結果でもあるが、直接に天文学的な応用があるかと言われると難しい。ブラックホールがあるという観測的な



傍証があるのはおもに巨大楕円銀河と近傍の円盤銀河であるが、どちらも中心スロープが  $-3/2$  とは遠く離れているからである。

具体的には、巨大楕円銀河ではスロープが非常に浅く、 $-0.2$  から  $-1$  程度の範囲に分布する。これに対して、我々の銀河系や近傍の円盤銀河では、 $-2$  的と考えられている (我々の銀河系でもブラックホールに本当に近い、距離にして **1 pc** くらいのところなのでなかなか良くわからないが)。

巨大楕円銀河でカस्पが非常に浅いことは、ブラックホール、巨大楕円銀河の起源を考える上では大きな問題である。もしも、**QSO** が巨大楕円銀河の直接の **progenitor** であって、**QSO** のガスが無くなって静かになったものが巨大楕円銀河であるとするなら、ブラックホールの周りの恒星の分布は  $-3/2$  乗カस्पになりそうなものだからである。

それ以前に、そもそも  $-1$  よりも浅いカस्पを作る方法はあるのかというのも問題である。

ここまでは、

- **2** 体緩和による進化での定常状態

- 断熱的なブラックホールの成長に対する無衝突恒星系の応答

を考えた。もうひとつの可能性として、力学的な時間スケールでブラックホールが形成されるか、あるいは系の中心以外のところから落ちてくることが考えられる。

# 銀河の合体とブラックホールの合体

力学的な時間スケールで巨大ブラックホールを成長させるには、宇宙初期のゆらぎから重力不安定で一気に作るという方法もありえる。しかし、現在の標準的なインフレーション宇宙モデルでは最初に重力不安定からコラプスする質量スケールはかなり小さく、その中のバリオン質量はもっと小さいので巨大ブラックホールを一気に作るのは無理がある。

現実的な階層的な構造形成モデルを考えると、大きな銀河はより小さな銀河が合体することで形成されたということになる。この時に、銀河中心にあるブラックホールには何が起きるだろうか？、また、銀河の中心部の構造はどうなるのだろうか？

銀河同士の合体は、前に議論した「激しい緩和」の典型であり、十分に緩和が進む前に構造が固まってしまう。ブラックホールが中心にある場合、これは、合体してもブラックホールは初めから結構中心近くに行くということである。

まず、合体前の銀河がほぼ自己重力的でブラックホール質量よりも大きなコアを持っていた場合を考える。この場合には、コアは合体の時に大きく

構造が変化するが、ブラックホールはコアの中ないしは非常に近くにいるであろう。ブラックホールは回りの星よりも圧倒的に重いので、力学的摩擦によりコア中心に沈む。**2**つブラックホールがあればそれらは連星になり、しばらくは回りの星をはね飛ばして進化する。

合体前の銀河がコアをもたず、 $\rho \propto r^{-2}$  ないしはそれより急なハローから、ブラックホールの重力が支配的な領域に滑らかにつながった構造をしている場合も、合体中にブラックホールはほぼ中心まで沈み、**2**つあれば連星ブラックホールになって近くの星をはね飛ばすことになる。

今、ブラックホール以外は無衝突系である極限的な場合を考えると、ブラックホール連星は合体してできた銀河の中心にいて、重心運動の速度は**0**になって止まっている。ブラックホール連星の軌道長半径程度まで近づいた星は基本的にははね飛ばされて無くなるので、ある程度よりもエネルギーが低い粒子は存在しないことになる。細かいことをいうとはね飛ばされる条件はエネルギーではなく近点でのブラックホールからの距離だが、とりあえずエネルギーに下限がある場合を考える。

この時には、簡単な議論から中心に  $\rho \propto r^{-1/2}$  のカスプができることがわかる。以下、**Nakano and Makino (1999, ApJL 525, 77)** に従ってこの

ことを示す。

分布関数がエネルギー  $E$  だけの関数だとすると、ある半径  $r$  での密度は

$$\rho(r) = 4\pi \int_{\phi(r)}^0 f(E) \sqrt{2[E - \phi(r)]} dE, \quad (249)$$

で与えられる。これは速度空間での積分を、積分変数を  $E$  にとって書き換えただけである。ここで、 $f(E)$  はあるエネルギー  $E_0$  よりも深いところ ( $E < E_0$ ) では  $0$  であると仮定しよう。

ブラックホールに十分に近いところでは、ポテンシャルが十分に深いとすると、積分区間の下限は  $\phi(r)$  だが、そこに来る前に  $f(E)$  は  $0$  になるので上の式は

$$\rho(r) = 4\pi \int_{E_0}^0 f(E) \sqrt{2[E - \phi(r)]} dE, \quad (250)$$

と書き換えられる。さらに、根号の中で、 $|\phi(r)| \gg |E|$  とすれば、

$E/\phi(\mathbf{r})$  で展開できて、

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}) &= 4\pi \int_{\mathcal{E}_0}^0 f(\mathbf{E}) \sqrt{2[E - \phi(\mathbf{r})]} d\mathbf{E} \\ &= 4\sqrt{-2\pi\phi(\mathbf{r})} \int_{\mathcal{E}_0}^0 f(\mathbf{E}) \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{E}{\phi(\mathbf{r})} + O\left(\left[\frac{E}{\phi(\mathbf{r})}\right]^2\right) \right] d\mathbf{E} \\ &\sim 4\sqrt{-2\pi\phi(\mathbf{r})} \int_{\mathcal{E}_0}^0 f(\mathbf{E}) d\mathbf{E}\end{aligned}\tag{251}$$

(252)

最後の変形では結局展開の **0** 次の項だけを残した。ここで、ポテンシャルが十分に深い、ブラックホールが支配的な領域を考えていたので、

$$\phi(\mathbf{r}) \sim -GM_{\text{BH}}/r\tag{253}$$

であるから、結局

$$\rho(r) \propto \sqrt{-\phi(r)} \sim \sqrt{\frac{GM_{\text{BH}}}{r}}. \quad (254)$$

となってブラックホールに十分に近いところでは  $\rho \propto r^{-1/2}$  のカスプができることがわかる。

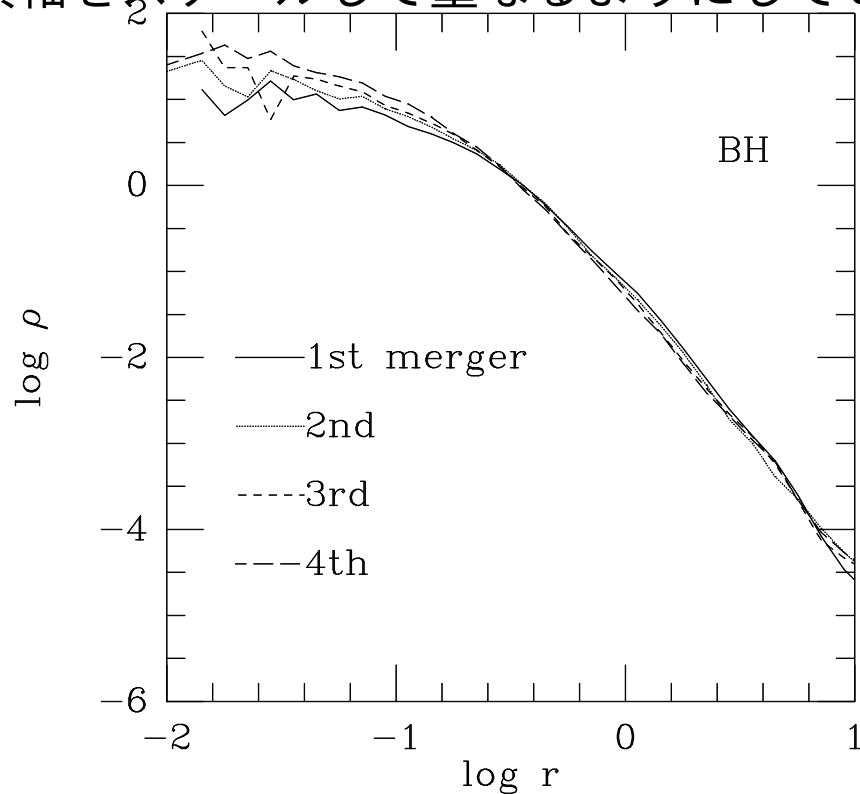
この結果は、本質的には

1. 分布関数が  $f(E)$  で書ける (等方的である)
2.  $E \rightarrow -\infty$  で  $f(E)$  が十分速く  $0$  になる

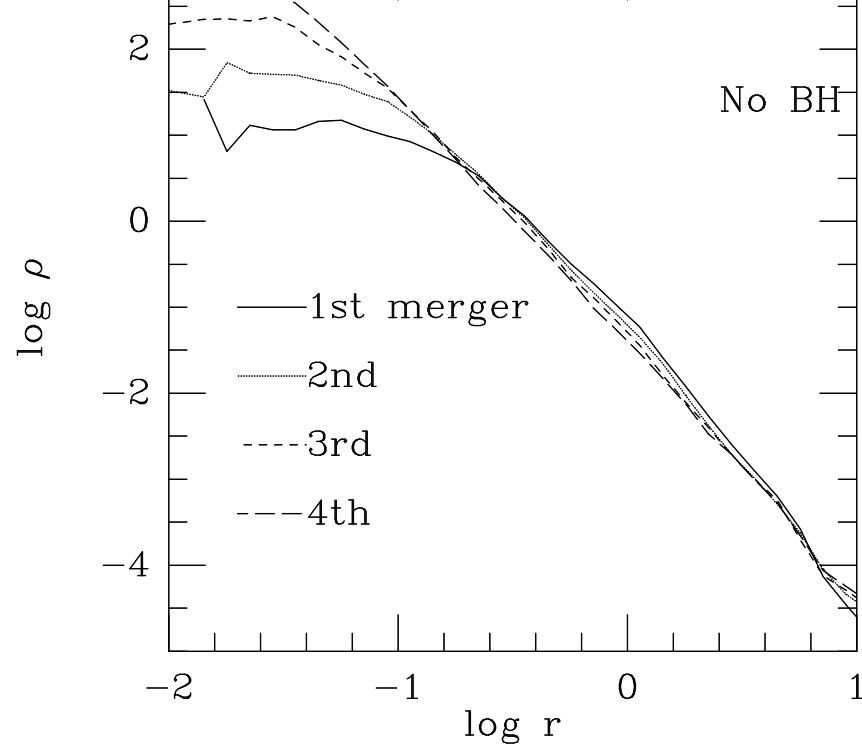
という **2** つの仮定だけによっているので、割合に一般性が高いと考えられるであろう。

とはいえ、上の仮定は結構強い仮定なので、実際に成り立つか？という問題はある。まず、数値計算ではどんな風かというのを見てみよう。この辺は信用できる数値計算結果はあまりないので、手前味噌になるが **Makino and Ebisuzaki 1996 (ApJ 465, 527)** を例にしよう。

図に、中心ブラックホールを持つ銀河(左)ともたない銀河(右)について、合体したものを種にしてまた合体させるということを繰り返した時に密度プロファイルがどう進化するかを示す。合体する毎に半径はほぼ**2倍**になるが、この図では横軸をスケールして重なるようにしている。







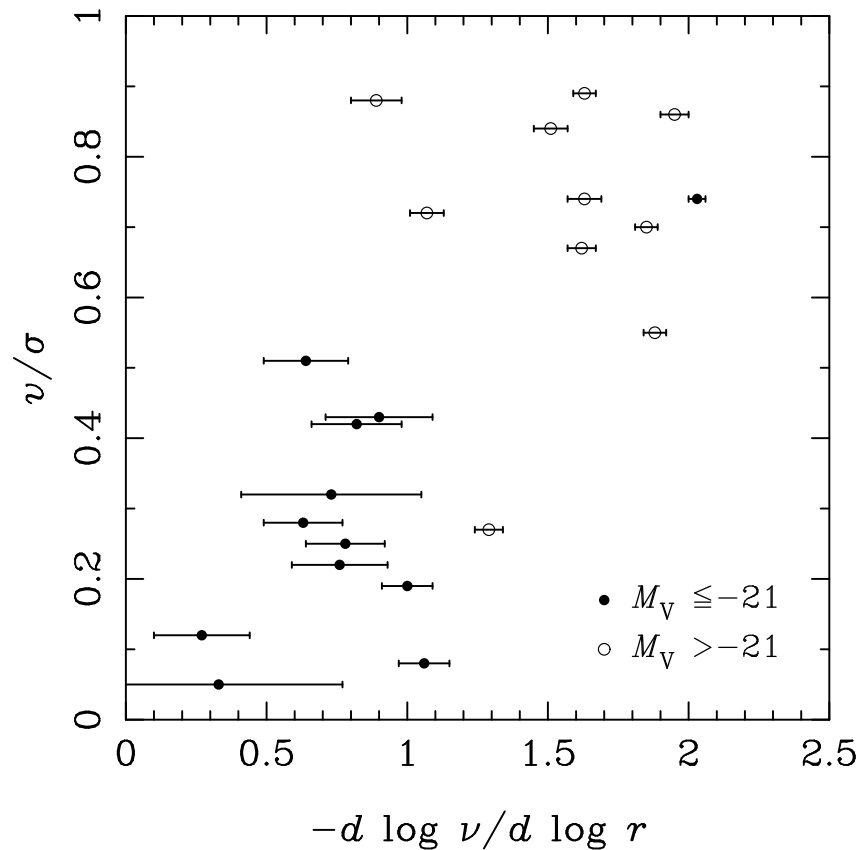
ブラックホールがある場合だと、合体を繰り返した時に中心に浅い密度カuspが形成され、その領域の銀河の半径に比べた相対的な大きさはほぼ一定になっていることがわかる。この部分の傾きはほぼ  $-1/2$  であり、**Nakano and Makino** の理屈の通りになっているといえる。

まあ、論文の出版年から想像されるように、**Makino and Ebisuzaki** は

「結果はこうなった」と書いているだけでなぜそうなるのかという説明は **Nakano and Makino** までちゃんとはなかったわけである。こういうのは本当はよろしくないという考え方もある。というのは、特に定性的な結果については、数値シミュレーションが正しいか間違っているかということの判断は、解析的な解釈がつかない限り一般には非常に難しいからである。**NFW** プロファイルの話の時に議論したように、ユニバーサルな結果と思ったものが、ユニバーサルに計算間違いしていたせいということもある。

ブラックホールがある銀河の合体の、この数値シミュレーションについては、やった人は計算の信頼性についてはそれなりの自信があったわけだが、**Nakano and Makino** の結果がでて初めて確信を持ってスロープが  $-1/2$  になるといえるようになった。

観測はどんな風かということ、想像されるように数値シミュレーションほど綺麗になにかが決まるわけではない。が、まあ、傾向はある。



この図は **Nakano and Makino** からとったものであるが、**HST** による **Virgo Cluster** の楕円銀河等の観測 (**Gebhardt, K., et al., 1996, AJ, 112, 105, Faber, S. M., et al., 1997, AJ, 114, 1771**) から、中心 (**0.1''**) の体積輝度密度の傾きと、回転速度と速度分散の比をプロットしたものである。シンボルの違いは絶対等級で、塗りつぶしてあるほうが明るい。

明るい楕円銀河はスロープが  $-1$  よりも浅く、回転が小さいのに対して、暗い楕円銀河がスロープが  $-2$  近くであり回転が卓越しているという傾向がかなりはっきりあることがわかる。

**3次元に密度を deprojection** する時の誤差等の見積もりに問題がある可能性がまだなくはないようだが、定性的に明るい銀河が浅いスロープを持つという結果自体は確実なものといえるであろう。

# 質量分布のある恒星系の熱力学的な進化

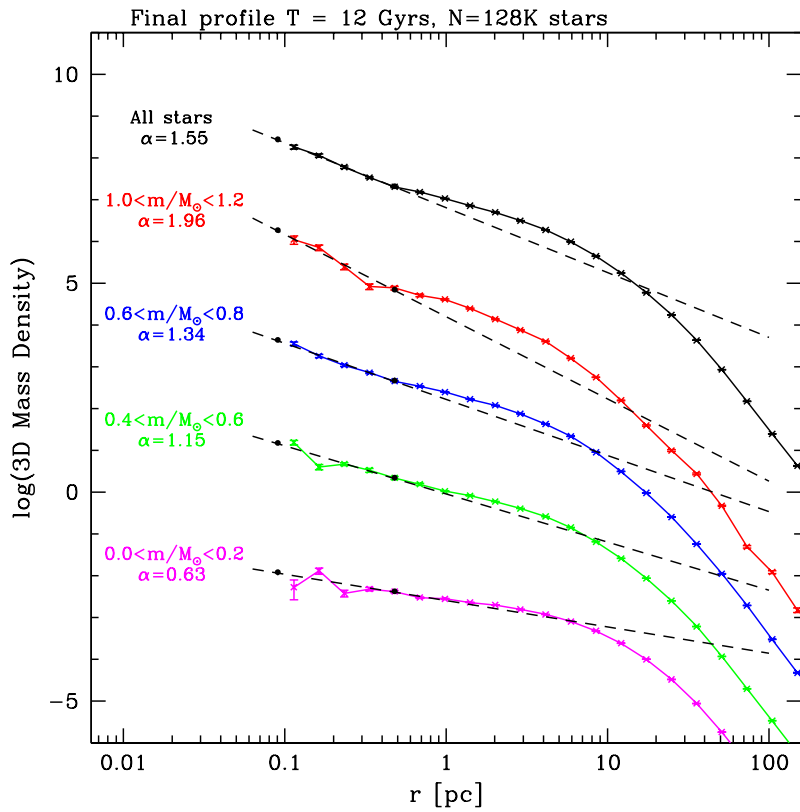
最後に、「現在の球状星団の中心にブラックホールがあるとすればどんなふうに見えるはずか」という問題についてちょっと考えておこう。

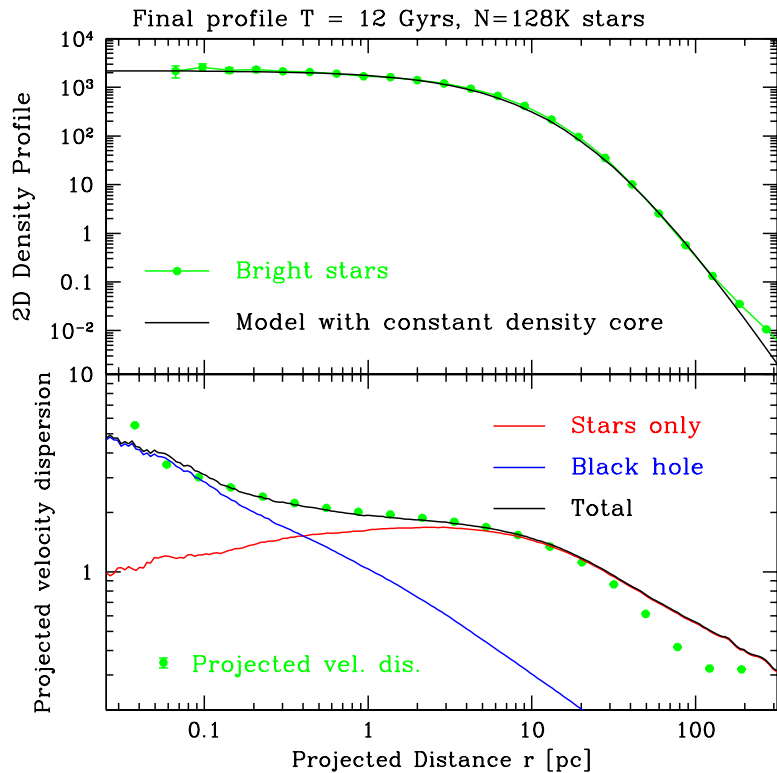
現在 **core collapse** をしている球状星団では中心にブラックホールが形成されるということはありません。が、球状星団が生まれた直後の大質量星がある時には暴走的な合体から中質量ブラックホールが形成された可能性はある。

その後現在まで進化したら球状星団はどのように見えるか？というのがここでの問題である。単純に考えると、前回話をしたようにブラックホールの近くでの密度分布は  $-7/4$  乗のカスプになると考えられるが、これは等質量の星だけを考えた場合である。ブラックホールの存在を考えない、**gravothermal catastrophe** の場合には、シミュレーションでは中性子星や重い白色矮星は理論通りのほぼ  $-2.3$  乗のカスプを作るが、見える星はもっと軽いためにもっと浅いカスプになる。

ブラックホールがある場合にも同様に、中性子星や重い白色矮星はほぼ理論通りのカスプを作るが、見える星はずっと浅いというのがシミュレー

シヨンの結果 (Baumgardt et al. 2004) である。





上の図は**3**次元的な密度分布を星の質量毎に書いたものである。初期条件はかなり深いキングモデルの中心にブラックホールをおいたものである。

ブラックホールの近くではどの質量でもカスプになっているが、そのス

ロープは質量が小さいと小さくなることがわかる。明るい星 (**turn-off mass** の辺り) の分布を **2次元**に投影したのが下の図で、基本的にフラットなコアを持つ「普通の」キングモデルでフィットできる球状星団のように見える。

というわけで、この辺はまだ **100%** 信用してもらっても困るが、球状星団の中心にブラックホールがあるとすれば、その球状星団は比較的大きくフラットなコアを持つように見えるということになる。



# 2体緩和に関するまとめ

- 星の数が無限ではない系では「**2体緩和**」が働く。これは、熱平衡(エネルギー等分配)にいく方向に系の分布関数を進化させる
- 緩和時間は自乗平均速度の**3乗**に比例、星の数密度に反比例、星の質量の**2乗**に反比例する。(いわれたクーロンログリズムの項もある)
- 特に、全質量と質量分布が同じなら、緩和時間はほぼ粒子数に比例する。
- 銀河や原始微惑星系のような薄い円盤では、「円運動からのずれ」に対して**2体緩和**が働く。このため、重いものは円軌道に近くなる(原始惑星等)

## 2体緩和に関するまとめ (つづき)

- 恒星系では等温の熱平衡を実現できないため、熱力学的なタイムスケールでは「重力熱力学的カタストロフ」が起こる。中心部の温度・密度が発散する。球状星団では、この時に連星が形成され、「重力熱力学的振動」がつづくと理論的には予想されている。
- 中心にブラックホールがある系では、熱力学的進化によって特有の構造が発達する。

# 恒星円盤、スパイラル構造

ここからは円盤状の系を扱う。銀河円盤、原始惑星系円盤等と同じメカニズムが現れる。

# 円盤状の系の例

円盤に近い恒星 (とは限らない) 系の代表的な例は以下のものである

- 円盤銀河の円盤
- 原始惑星系円盤
- 惑星の周りのリング

これらは、円盤である、ということについては同じであり、物理プロセスにも共通の部分が多い。

# ではみんな同じか？

色々違う。

- 円盤の質量
- 重力ポテンシャルの形
- 円盤の粒子が物理的に衝突するかどうか

# 質量の違い

- 銀河円盤は重い、つまり、ダークマターハローやバルジの質量と、円盤の質量は同程度。自己重力の効果が大
- 惑星リング: 土星リングでもその質量は土星本体の  $10^{-9}$  程度
- 原始惑星系円盤では、太陽の質量の 1% 以下

質量の違いは、不安定モードやパターンの大きさに違いをもたらす。

# 重力ポテンシャルの違い

- 銀河円盤では円盤自身やダークマターハローが作るポテンシャルになって単純なケプラーポテンシャルではない: 軌道が閉じた楕円軌道ではない
- リング、惑星系では基本的には中心星のケプラーポテンシャル、軌道は閉じた楕円軌道

閉じた軌道の場合には平均運動共鳴や永年摂動の役割が閉じない場合よりもはるかに大きくなり、ケプラー軌道であることに固有の様々な現象が起きる。

# 衝突の効果

- 惑星リングでは典型的には1つの粒子は軌道周期程度の時間で他の粒子と衝突
- 原始惑星系では、重力相互作用と衝突・合体の双方が重要になる。またガス円盤も重要
- 銀河円盤: 恒星同士は衝突しない。重力による散乱の効果のみ。

この講義では、理論としては安定性を扱う。衝突が十分に効くなら流体と考えられるし、そうでなければ恒星系(6次元位相空間での分布関数)としては扱う。

非軸対称モードの安定性は理論的・解析的にはほとんど手がでないので、軸対称モード(リングに分裂するモード)を扱う



# 軸対称モードの安定性

式の誘導は結構大変なので、まず流体の場合に結果だけ書く。 $k$  を半径方向の波数、 $\omega$  を時間方向の角振動数、 $v_s$  を音速、 $\Sigma$  を面密度、 $\kappa$  をエピサイクル角振動数として、分散関係が

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| + v_s^2 k^2 \quad (255)$$

で与えられることがわかっている。

エピサイクル角振動数:与えられた円盤ポテンシャル上での粒子の運動の、半径方向の振動の角振動数

有効ポテンシャルの概念を使って簡単に計算できる

# エピサイクル振動数の計算

今、ポテンシャルが中心からの距離  $R$  の関数として  $\Phi(R)$  で与えると、有効ポテンシャルは

$$\Phi_{eff} = \Phi + \frac{L_z^2}{2R^2} \quad (256)$$

である。 $R$  方向の運動方程式は

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{d\Phi_{eff}}{dR} \quad (257)$$

で、これを円軌道の周りに展開して、 $R = R_0 + x$  とすると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\kappa^2 x \quad (258)$$

で、

$$\kappa^2 = \frac{d^2 \Phi}{dR^2} + \frac{3}{R_0} \frac{d\Phi}{dR} \quad (259)$$

(微分は  $R = R_0$  のところでの値) となる。

# もうちょっと変形

$\kappa$  を円軌道自体の角振動数  $\Omega$  で書き直す

$$\Omega^2 = \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dR} \quad (260)$$

なので、

$$\kappa^2 = R_0 \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 \quad (261)$$

となる。 $\kappa$  はケプラー軌道の時に  $\Omega$  に等しく、調和ポテンシャルの時に  $2\Omega$  に等しいので、普通の銀河円盤等のポテンシャルでは

$$\Omega < \kappa < 2\Omega \quad (262)$$

となる。

# 分散関係の意味

式 (255) の意味を考える。まず、ジーンズ不安定の式と並べてみよう。  
ジーンズ不安定の分散関係は

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (263)$$

だった。これと、円盤の軸対称モードの式を比べると、

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| + v_s^2 k^2 \quad (264)$$

# ジーンズ方程式との比較

- 音速に関する項  $v_s^2 k^2$  は普通の波動方程式になる項で、どちらでも同じ形
- 重力の項は、ジーンズ不安定では  $-4\pi G \rho_0$  だったのが、円盤では  $-2\pi G \Sigma |k|$  とここにも波数が入ってくる。
  - ジーンズ不安定では重力は**3**次元的に無限一様に広がったもの同士=ポテンシャルは距離に比例
  - 円盤では重力は**2**次元的なので対数ポテンシャルになり、距離が近いほうが強い、
- $\kappa^2$  の項は、元々の重力ポテンシャル上のエピサイクル運動そのもの

# 温度0の極限

$v_s = 0$  の極限、つまり、温度 0 の極限では

$$k_{crit} = \frac{\kappa^2}{2\pi G\Sigma}; \quad \lambda_{crit} = \frac{2\pi}{k_{crit}} = \frac{4\pi^2 G\Sigma}{\kappa^2} \quad (265)$$

という臨界波数と臨界波長があって、これより高い波数(短い波長)は不安定

ジーンズ不安定との違い:

- エピサイクル運動が重力を抑える効果になる
- 重力が2次元的で距離が近いと強くなるために、波長が短いと不安定で、成長速度も波長が短いほど大きい

# 有限温度の場合

あらゆる波数  $k$  に対して振動数  $\omega$  が実数であるためには

$$\kappa^2 - 2\pi G\Sigma|k| + v_s^2 k^2 \geq 0 \quad (266)$$

であればよく、このためには

$$\frac{v_s \kappa}{\pi G \Sigma} > 1 \quad (267)$$

であればよい。

$$Q = \frac{v_s \kappa}{\pi G \Sigma} \quad (268)$$

のことを **Toomre** の **Q** 値と呼ぶ。



# 恒星円盤の場合

(流体との違いは、星同士が衝突するかどうか)

同じような分散関係から安定性限界を導くことができる

$$Q = \frac{\sigma_R \kappa}{3.36 G \Sigma} > 1 \quad (269)$$

ここで  $\sigma_R$  は半径方向の速度分散である。ジーンズ不安定の場合と違って、係数が流体の場合と微妙に違う ( $\pi$  と 3.36)。

# 「現実の」円盤

ここまでの解析の仮定:

- ディスクが無限に薄い
- 重力場や回転の影響はローカルなポテンシャルの微分だけで書ける

従って、「波長が半径  $R$  に比べて十分小さく、なおかつディスクの厚さに比べて十分長い」場合しか正しくない。

# ディスクが厚さをもっている場合

- 十分短い波長では重力が**3**次元的になって普通のジーンズ不安定の表式になる
- 問題は、 $\lambda_{crit}$  とディスクの厚さの関係

$$\lambda_{crit} = \frac{4\pi^2 G \Sigma}{\kappa^2} \quad (270)$$

なので、系のトータルの質量。半径、重力定数を **1** 程度に規格化した単位系を考えると  $\lambda_{crit}$  はほぼ  $\Sigma$  だけで決まる ( $\kappa$  も **1** 前後になるため)。原始惑星系円盤や惑星リングのような、 $\Sigma$  が非常に小さい場合には  $\lambda_{crit}$  も系のサイズに比べて非常に小さくなる。

# 現実のディスク

- 原始惑星系円盤や惑星リングは非常に冷たくなければ安定である。
- 惑星リングの場合には実際に非常に冷たく、このために非常に小さなスケールで多様な構造が現れることが最近ではカッシーニ二等の観測で明らかになっている。
- 原始惑星系円盤の場合には、円盤ガスは安定というのが京都モデル。但し観測的にはリングやスパイラルがどんどん見つかってきている。
- 円盤銀河の場合には、面密度は1まではいかにしても **0.1** より大きい程度になり、このために  $\lambda_{crit}$  は結構大きい。このため、普通の恒星円盤では厚さは臨界波長より小さく、**Q** 値がそれなりに安定性を表す

# スパイラルモードの場合

- 現状の系外銀河や原始惑星系円盤では結構色々なスパイラル構造が見つかっている
- でも、解析的に計算できるのは「**tight winding** 近似」くらい
- なので、その話のあと、数値計算ベースの話をしする

# tight-winding 近似

**tight winding** の近似:要するに、ピッチアングル(スパイラルアームと円の回転方向のなす角度)が小さい=大体軸対称と同じようにあつかえる

**m** 本腕モードの分散関係は

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma|k| + v_s^2 k^2 \quad (271)$$

と書ける

# tight-winding 近似

- 安定・不安定の条件は  $m = 0$  のモードと全く同じ
- 不安定な時には実部に  $m\Omega$  が入る
- 不安定モードはラグランジュ的に回転にくっついて成長する

これは、**tight-winding** 近似してさらに半径方向に対して波長が短いという近似もしたので、 $\Omega$  の半径依存性もどこかで落として解析したような話になっている。

# グローバルなスパイラルモード



実際の銀河では、全く **tight-winding** も局所近似も成り立たないような大きなスケールでのスパイラル構造が見つかっている。

中間赤外で見える低温のガスは複雑な構造をもつ

大きなスケールでのスパイラルアームがあるように見える。

**M101** 銀河。スピッツァー衛星での赤外線画像

多くの銀河についてそういう構造があるように見える。



# グローバルなスパイラルモードの理論的 困難

- そのような構造を定常的に維持するメカニズムはなにか
- そもそもそのようなメカニズムはあるのか

は依然未解決の問題。

- 不安定モードは基本的にローカルな角速度で回転するため、半径方向に広がったモードはどうしても差動回転の効果で時間がたつと巻き込んでしまう (巻き込みの困難)
- ある形をもったスパイラルアームが時間的に成長したり、定常状態になったりしてくれない

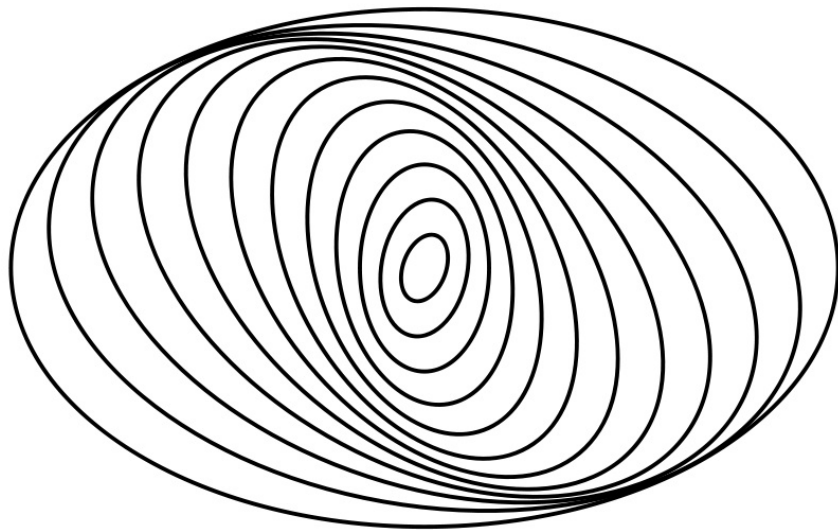
# 巻き込みの問題の回避(?)

これまで唱えられていた理論は例えば以下のようなものがある

1. 定常密度波理論 (いわゆる **Lin-Shu** 理論)。これは、大雑把にはスパイラルアームは実体ではなく、「密度波」だというもの
2. 非定常理論。これは要するに、アームは次々にできたり消えたりするものである、というものである。

# 定常密度波理論

これは、大雑把にはスパイラルアームは実体ではなく、



こんな感じにうまいこと軌道がずれていくことでできる見かけのパターンであるとするものである。エピサイクル周期も半径に依存するし、なぜ同じ半径では大体位相がそろうのかとか、うまいことスパイラルパターンができるようにその位相が半径によってずれるのかとかは良くわからない。

# 定常密度波理論

これで全くなにも説明できないというわけではない。アームはともかくポテンシャルが実際に非軸対称の時に、このようなパターンは確かにできる

- 棒渦巻銀河
- 相互作用銀河

但し、棒渦巻銀河の詳細なシミュレーションでは、アームはバーの先端からでていますが時間変化は結構する(定常ではない)ということもわかってきた。

# 非定常理論

- 要するに、アームは次々にできたり消えたりするものである、という考え
- **1970**年代から**1980**年代にかけて、ディスク構造の多体計算は盛んに行われた
- れらの計算では、**Q**値が**1**より少し大きい、軸対称モードに対しては安定なはずのディスクから計算を始めると、かなり強いスパイラル構造が数回転で成長する。しかし、数十回転までいかないうちに**Q**値が大きくなり、そのような構造は消える

# 非定常理論

- 実際の銀河では、ガスが放射冷却で温度を下げることができるので、ガスがあるうちは **Q** 値がある程度小さくたもたれていると考えることができ、このために常に不安定性により新しいアームが作られている、と考える。
- **90** 年代以降この辺はあまり研究されていなかった
- 最近の大粒子数での数値計算 (**Fujii et al, 2011**) では、初期の **Q** の値や粒子数によっては、ガスによる冷却効果がなくても非常に長い時間にわたって非定常なスパイラル構造が見える、ということがわかってきた。

# Swing Amplification

上で述べたような、非定常な構造の進化を考える上で有用な概念の一つが **swing amplification** である。現象としては、これは、以下の図に示すようなことが起こる、というものである。

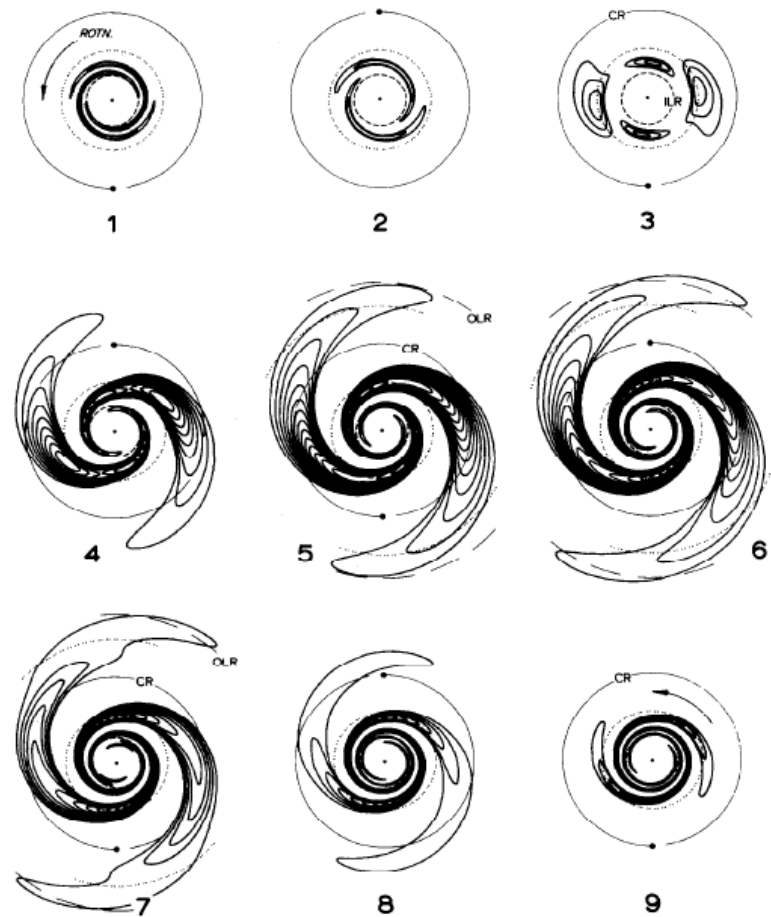


Figure 6-17. Evolution of a packet of leading waves in a stellar Mestel disk with  $Q = 1.5$  and  $f = 1$ . Contours represent fixed fractional excess surface densities; since the calculations are based on linear perturbation theory, the amplitude normalization is arbitrary. Contours in regions of depleted surface density are not shown to minimize confusion. The time interval between diagrams is one-half of a rotation period at corotation. From Toomre (1981), by permission of Cambridge University Press.



# Swing Amplification(2)

- 最初に **leading arm** (外側のほうが先に進んでいる) な摂動を与えると、これが最初は巻き込みがほどけていってそのうちに **trailing** に変化する。
- その間に、 **trailing** で非常に振幅の大きなアームが一時的に見える。

単純にいつてしまうと、 **leading** から **trailing** に変化する最中だと、モードの回転とエピサイクル運動の回転が同じ向きで、このために回転の効果がキャンセルされて普通のジーンズ不安定に近い状況になって摂動がどんどん成長できる、というような話である。

# Swing Amplification(3)

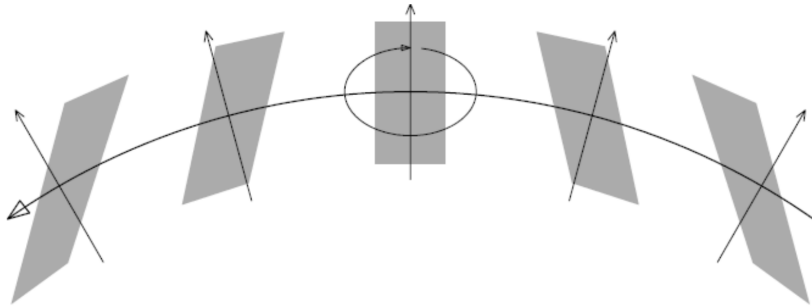


Figure 15.1: Evolution of an overdense perturbation in a shearing disk. The disk rotates counter-clockwise, as indicated by the heavy arc; a typical star moves around an elliptical epicycle in a clockwise direction. The perturbation (grey patch) initially has the form of a *leading* spiral (right), but is sheared into a *trailing* spiral (left) by the differential rotation of the disk. The epicycle and the perturbation rotate in the same direction, so stars stay in the perturbation longer than they would under other conditions.

但し、これが機能するためにはどこからか **leading arm** な摂動が供給されなければならない。 $N$ 体計算では、最初にランダムに粒子を置くと、ポアソンゆらぎからアームが成長していくが、

単純にポアソンゆらぎからの成長で、一回切りの現象だと思えば粒子数を増やせばアーム強度は小さくなるはずである。また、成長時間も粒子数に依存しないはずである。数値計算の結果は、最大のアーム強度は粒子数に依存せず、また成長は粒子数が大きいと遅い、ということを示唆している。

# バーとバー不安定

- 上でみたように、スパイラル構造についてはそれを定常的に維持するメカニズムが何か、そもそもそんなものがあるのか、ということが良くわかっていない。
- しかし、グローバルな非軸対称モードとしてはスパイラルの他にバー不安定があり、これについては非線型領域で定常なバー構造が存在できることは古くからわかっている。
- **Q** 値的には安定なディスクであっても、ディスクだけでダークマターハローやバルジがないと必ずバー不安定を起こす、ということが**1970**年代から知られている。但し、グローバルモードであることから安定性条件等が単純な形で得られているわけではない。

# 銀河形成シミュレーション

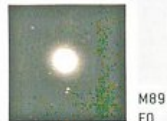
# TYPES OF GALAXIES

ASTRONOMERS SORT GALAXIES using the "tuning fork" classification scheme developed by American astronomer Edwin Hubble in the 1920s. According to this system, galaxies come in three basic types: elliptical (represented by the handle of the fork at right), spiral (shown as prongs) and irregular (shown below at left). The smallest galaxies, known as dwarfs, have their own uncertain taxonomy.

Within each of the types are subtypes that depend on the details of the galaxy's shape. Going from the top of the tuning fork to the bottom, the galactic disk becomes more prominent in optical images and the central bulge less so. The different Hubble types may represent various stages of development. Galaxies start off as spirals without bulges, undergo a collision during which they appear irregular, and end up as ellipticals or as spirals with bulges.

—G.K. and F.v.d.B.

## ELLIPTICALS



M89  
E0



M49  
E4



M110  
E5

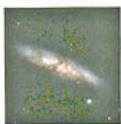


M84  
S0

## 基本的な考え方:

- 初期条件からの、銀河の「まるごと」シミュレーション
- 銀河の多様性の起源を理解したい

## IRREGULARS

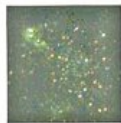


M82  
Irregular

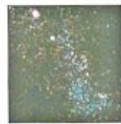
## DWARF TYPES



M32  
Elliptical



VII Zw 403  
Blue Compact



Small Magellanic Cloud  
Irregular



Leo I  
Spheroidal

## BARRED SPIRALS



NGC 660  
SBa



NGC 7479  
SBb

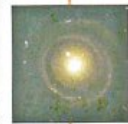


M58  
SBc

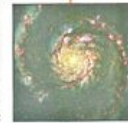
## NORMAL SPIRALS



NGC 7217  
Sa



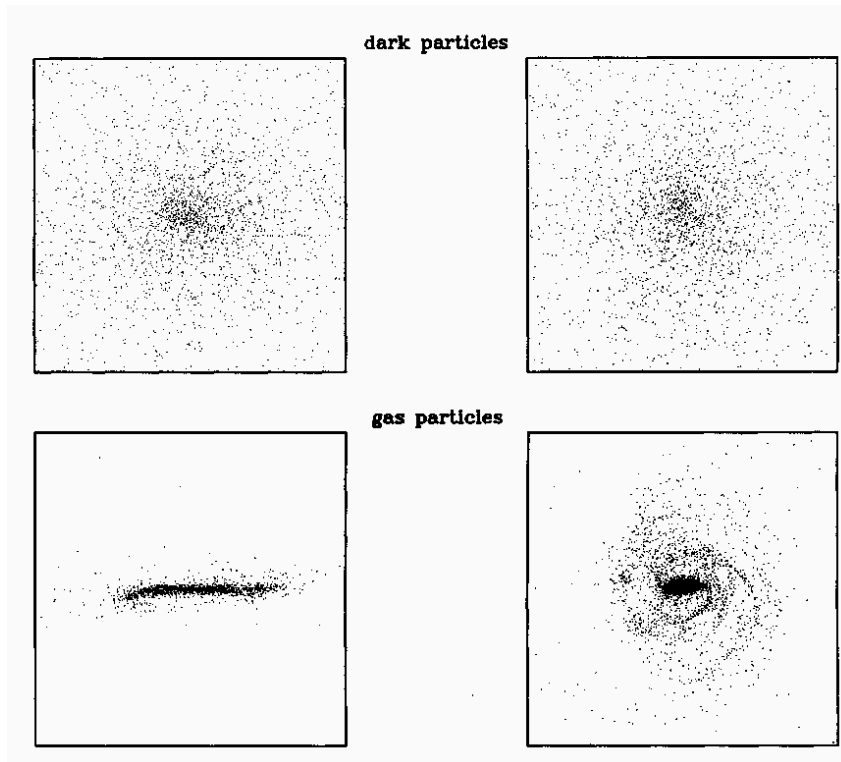
NGC 4622  
Sb



M51  
Sc

N. A. SHARP/NOAO/AURA/NSF [M82]; B. KEEL/HALL TELESCOPE/LDVELL OBSERVATORY [M32]; R. SCHULTE-LADBECK/U. HOPPM. CRONE/ASTROPHYSICAL JOURNAL [Blue compact dwarf]; NOAO/AURA/NSF [Small Magellanic Cloud]; DAVID MALIN, © ANGL. AMERICAN OBSERVATORY [Leo I]; NOAO/AURA/NSF [M49, M110, M84]; B. BRANCINI/WILNER/A. BLOCK/NOAO/AURA/NSF [NGC 660]; A. BLOCK/NOAO/AURA/NSF [NGC 7479]; F. CIESLAK/A. BLOCK/NOAO/AURA/NSF [M58]; B. KEEL/R. BUTA/G. PURCELL/CERRO TOLEDO INTER AMERICAN OBSERVATORY, CHILE [NGC 7217]; G. BYRD/R. BUTA/J. FREEMAN/NASA [NGC 4622]; NASA/STSC/AURA [M51]

# Katz and Gunn 1992



- ダークマター+ガス+星
- 1万粒子くらい、Cray YMP で 1000時間くらいの計算
- 1粒子の質量: 1000万 太陽質量 くらい

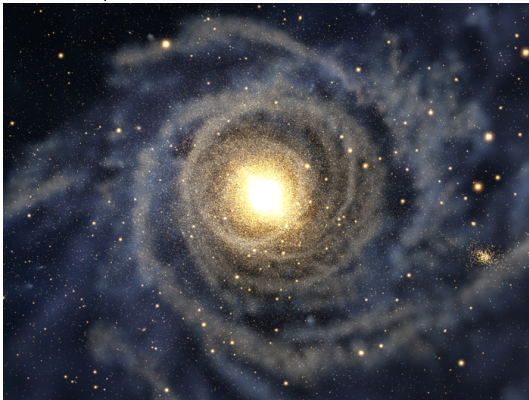
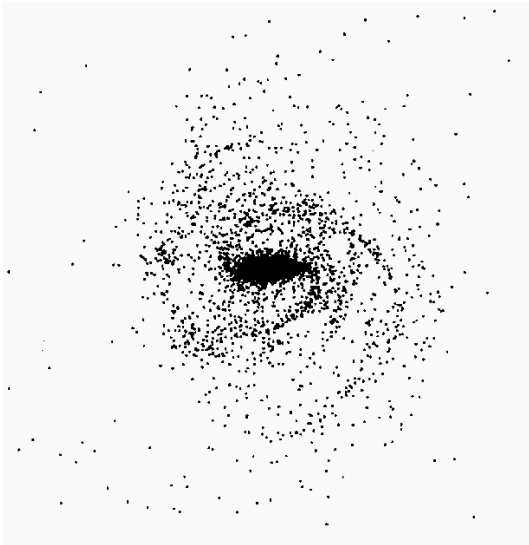
# Saitoh et al. 2005



animation

- ダークマター+ガス+星
- 200万粒子、**GRAPE-5**で1年(!)くらいの計算
- 1粒子の質量: 1万太陽質量くらい

# 分解能を上げるといいことがあるか？



- そうでもない？
- 大事なこと:物理過程のより適切な扱い
  - 星形成
  - 超新星爆発からのエネルギーインプット



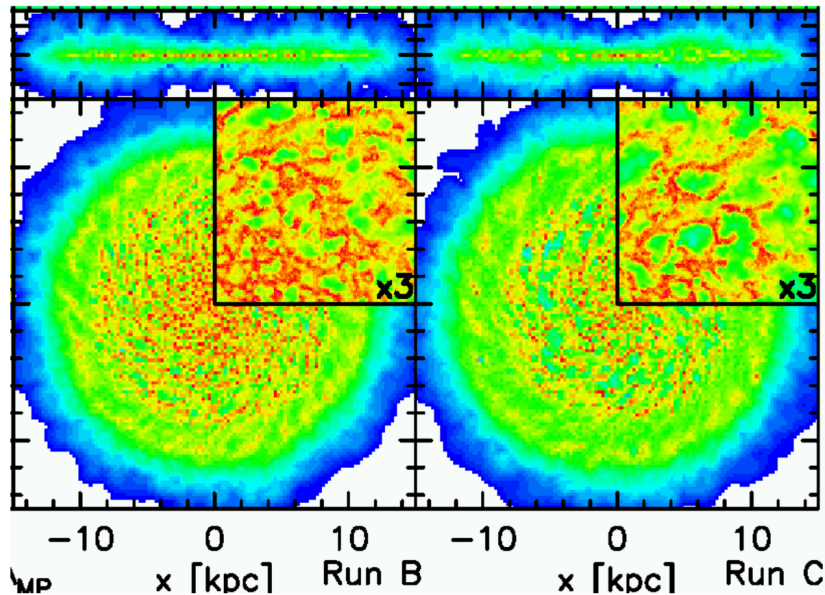
# 星形成過程のモデル

- 本当に星1つを作るシミュレーション:分解能が太陽質量より **4-5** 桁高い必要あり
- 現在できる限界: 粒子の質量が太陽の **1000** 倍。 **8** 桁くらい足りない
- 星ができる過程のモデルが必要
  - ガスが十分に低温・高密度になったら、星に変わる、とする
  - いくつかフリーパラメータがある
  - できる銀河の構造がパラメータのとりかたによってしまう、、、
- 超新星の扱いにも同様な問題

# どれくらいの分解能でどうすればいいか？

- 答があうようになったらわかる？
- ガス粒子が星形成領域や分子雲より大きいようでは多分駄目
- 理論的には、十分な分解能があれば単純にガスを星に変えるだけでよくなるはず。
- そこに近付いている？
- あと **1-2** 桁？

# Saitoh et al. 2007



星形成のタイムスケールを **15** 倍くらい変えてみた

あんまり大きくは結果が変わらなかった。分解能が低い計算では、星形成のタイムスケールを **15** 倍小さくしたら銀河が爆発してしまう。

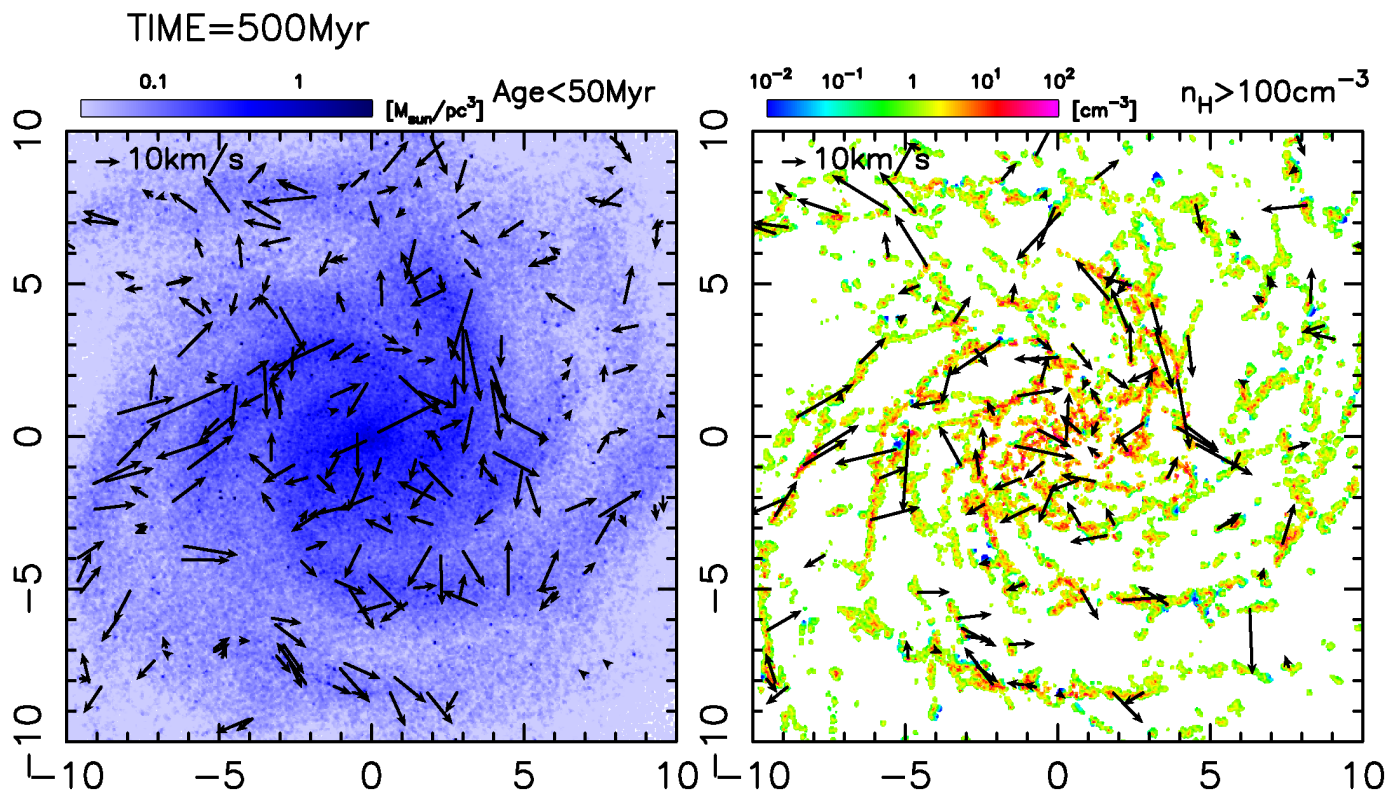
# アニメーション

**Star formation with SPH**

**Large scale structure formation with AMR**

# 銀河円盤

渦巻構造と、円運動からのずれ animation (Baba et al 2009) 1 2



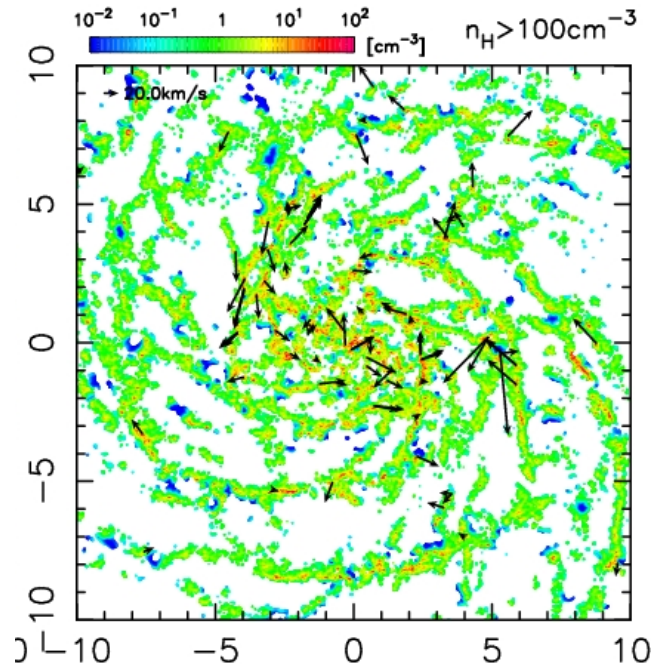
星の分布

冷たいガスの分布

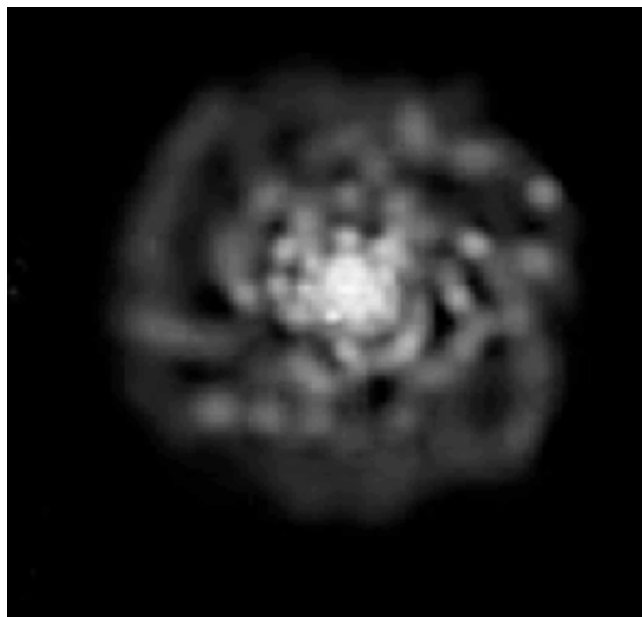
# シミュレーションの詳細

- ガスが低温・高密度になるところまで解く
- 多数の **SPH** 粒子で高分解能シミュレーション
- 計算機には国立天文台の **Cray XT4**、斎藤貴之さん開発の **ASURA** コード
  
- **10pc** ソフトニング (← **500pc**)
- ガスは温度 **10K** まで解く (←  $10^4\text{K}$ )
- 粒子質量  $3000M_{\odot}$  (←  $10^5M_{\odot}$ )

# 高分解能モデルと観測



# 低分解能モデルと観測



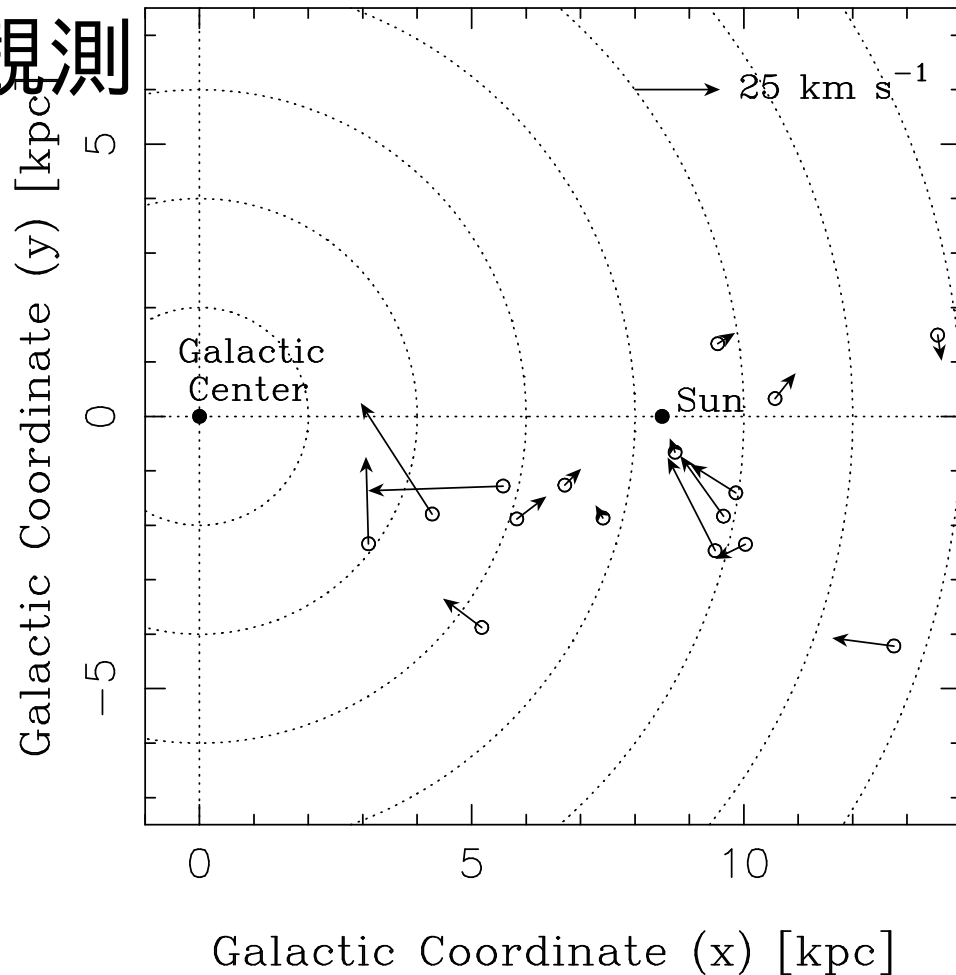


# 高分解能シミュレーションでわかってきたこと

- 星形成は大きなスケールの渦巻構造と関係
- 観測で見える複数アームがある渦巻は、定常ではなく形成・消滅を繰り返している
- この結果は、星形成のモデルの詳細にほとんど依然しない

# 電波干渉計による観測

- 2006: Xu et al, Science 311, 54
- Nov 208: Burst of results from VLBA
- Several data from VERA

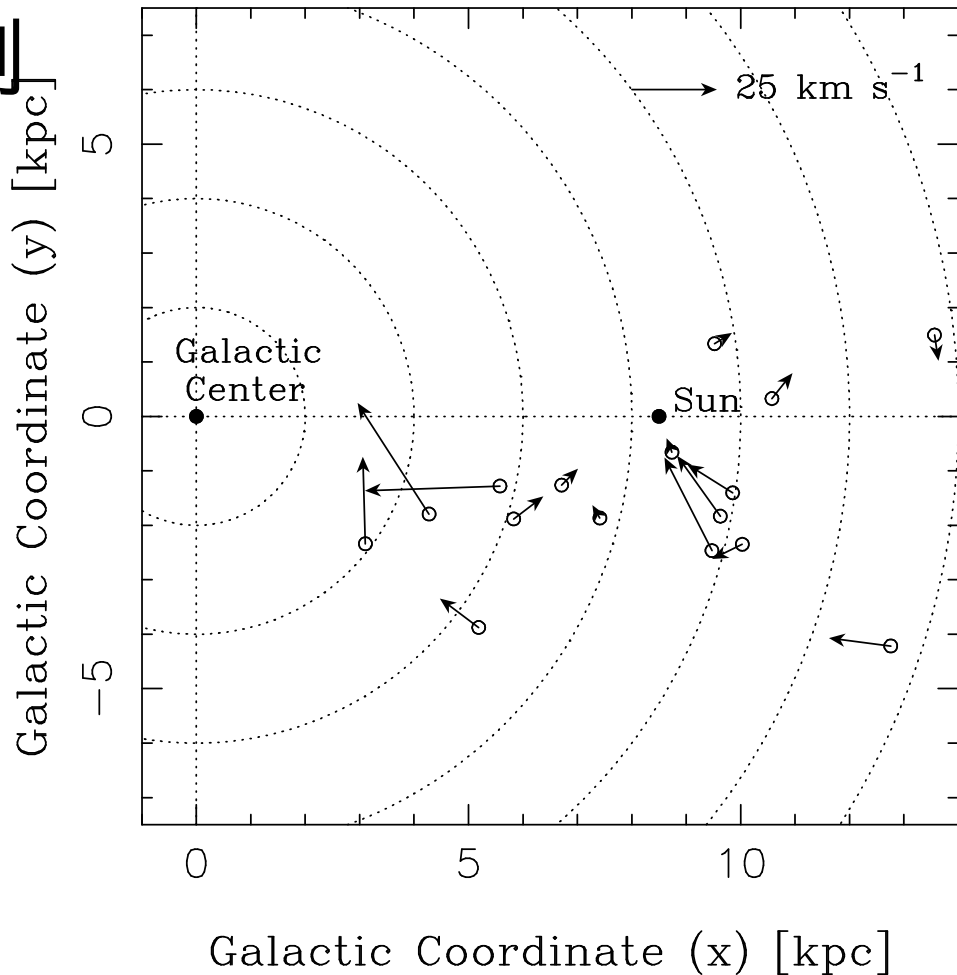


(Compiled by Dr. Asaki)

# 電波干渉計による観測

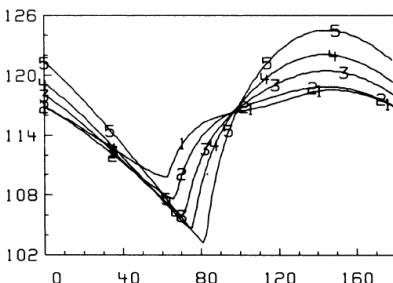
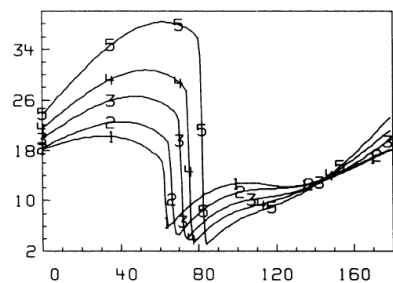
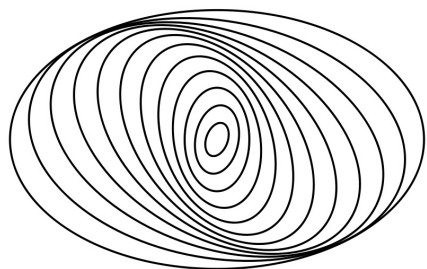
- 円運動からの大きなずれ ( $\sim 30\text{km/s}$ )
- 空間相関もあり？

このような大きな運動の起源は？



# 教科書に書いてあること

## 定常密度波



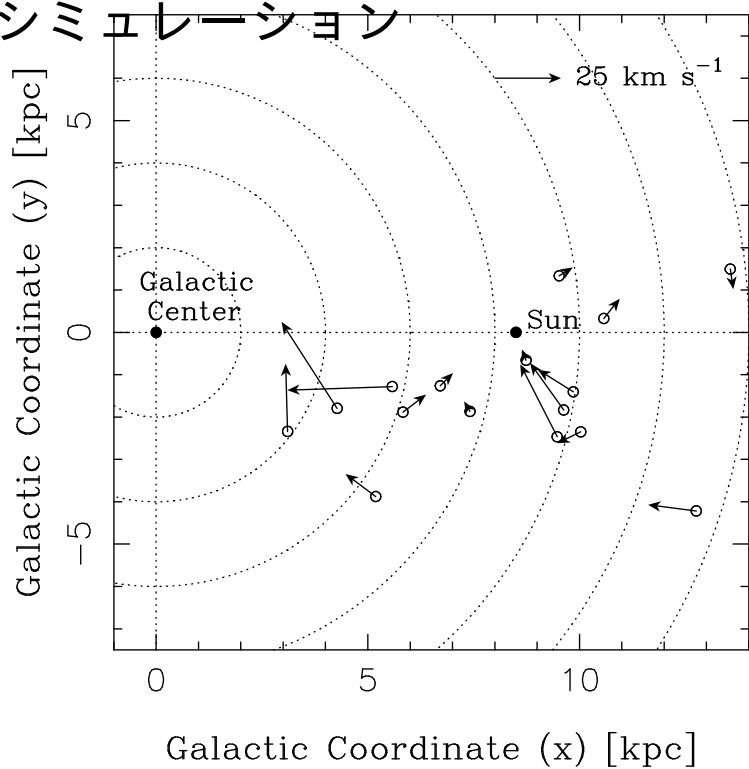
$\theta$  (deg)

- 渦巻構造は実体ではなく、密度波
- ガスは、渦巻が作るポテンシャルの底を通る時に圧縮されて、そこで星を作る
- 星やガスの円運動からのずれはごく小さい

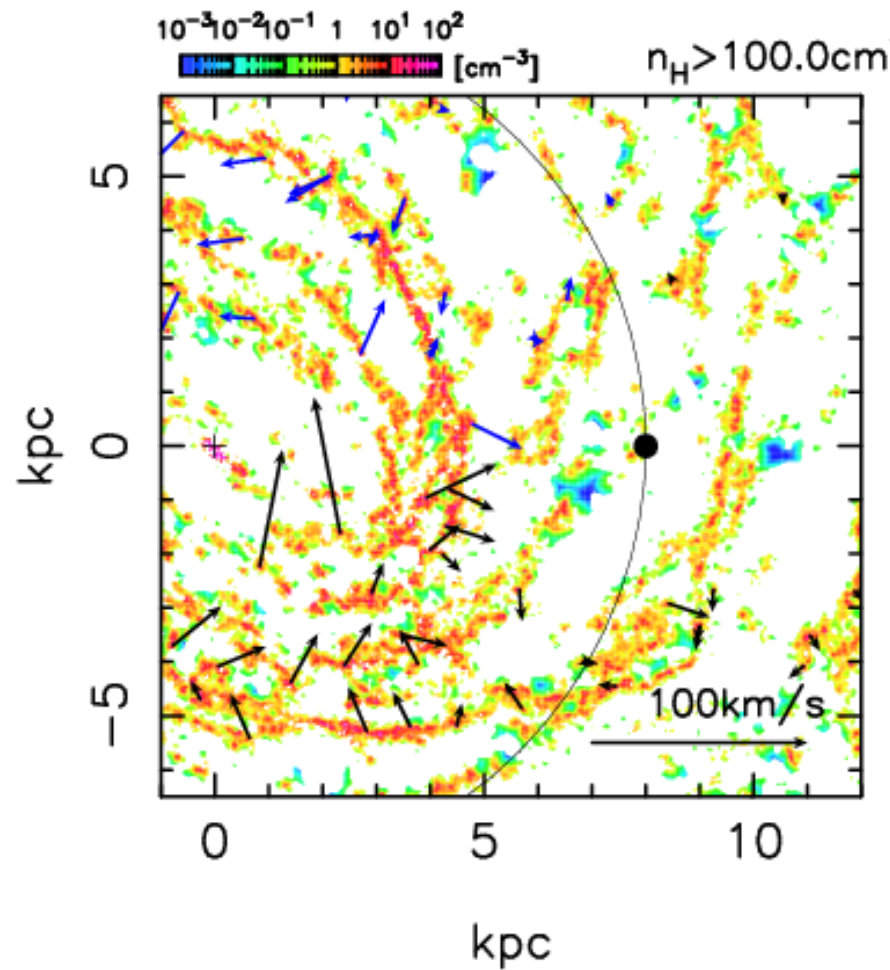
観測ともシミュレーション結果とも全然あってない...

# 比較

観測とシミュレーション



TIME=1.25Gyr

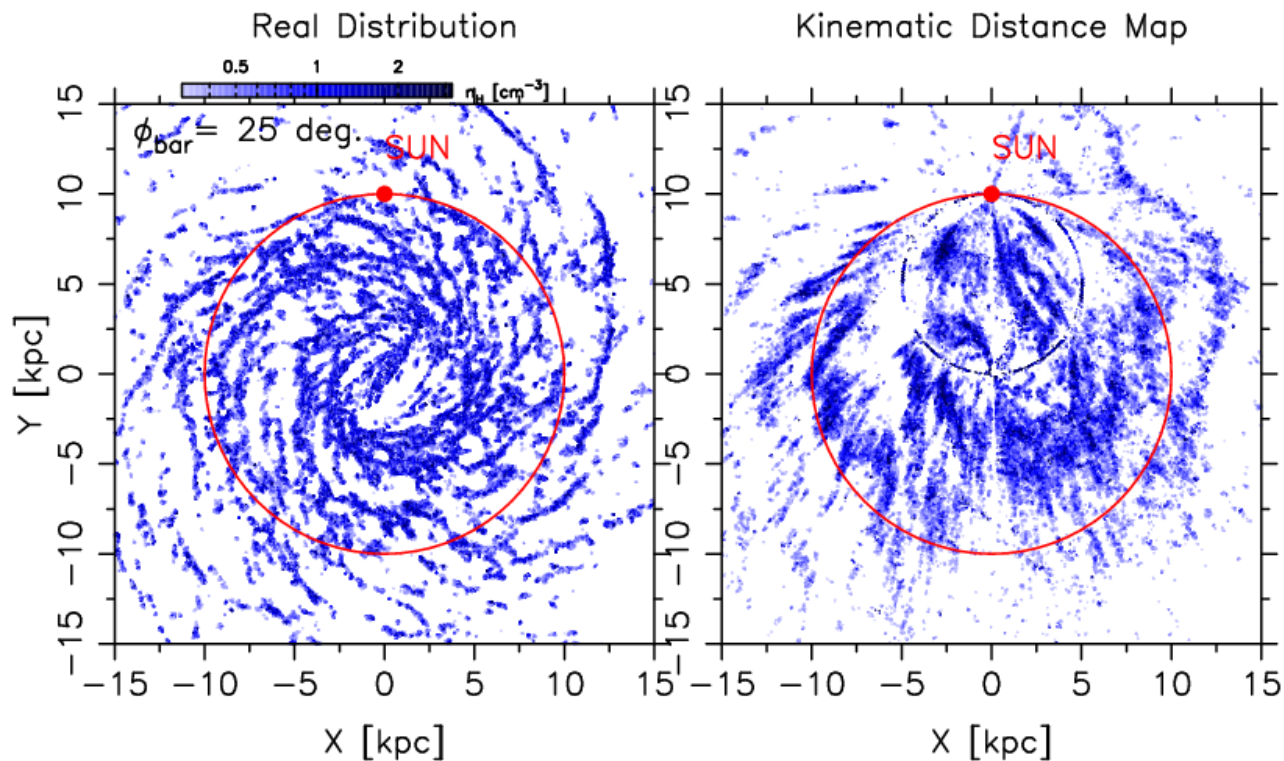


似ているような気が？

# 運動学的距離

TIME=2.00Gyr GAS ( $T=10^{1.5}-10^{2.5}K$   $n_H=10^{-0.5}-10^{0.5}cm^{-3}$ )

SUN : Pos=(0.0,10.0)[kpc] Vel=(169.5,0.0)[km/s]

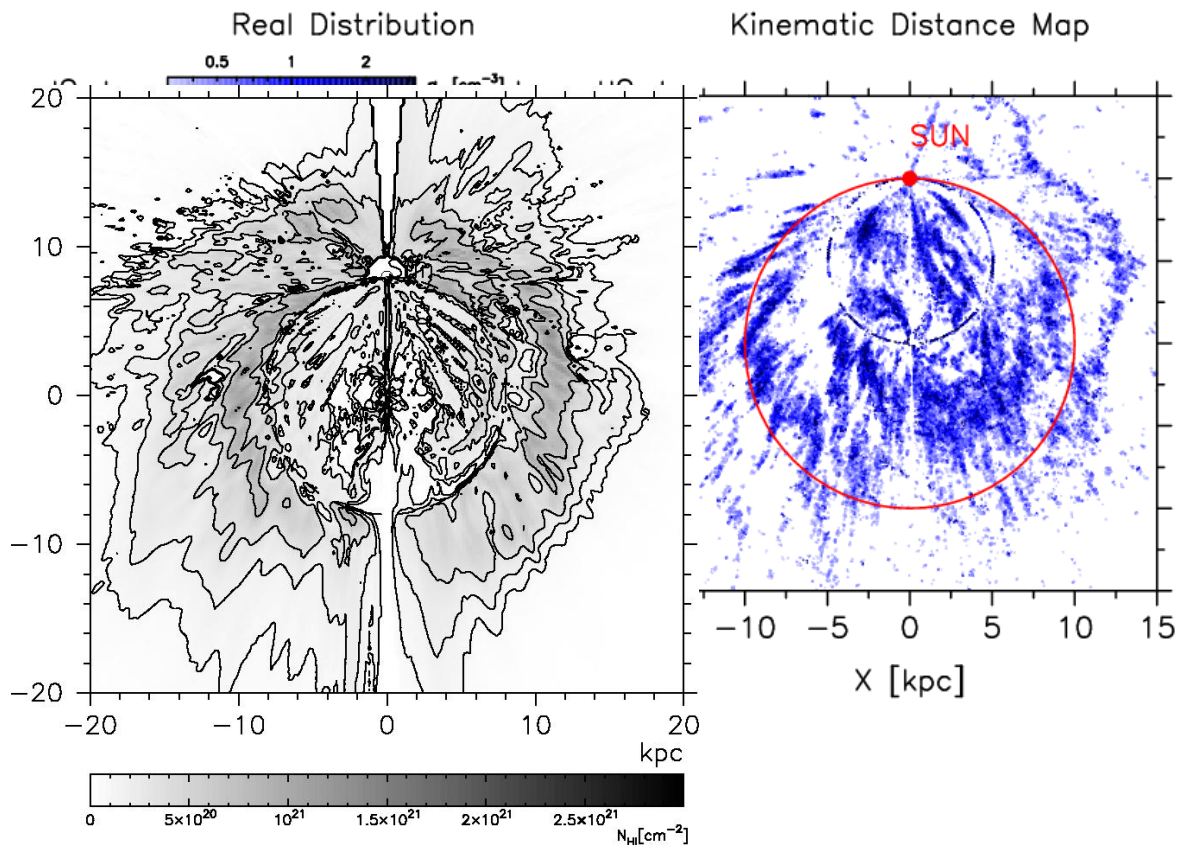


「円運動をしている」と仮定すると、速度の観測から距離が求まる  
シミュレーション結果を観測すると、、、、

# 運動学的距離

TIME=2.00Gyr GAS ( $T=10^{1.5}-10^{2.5}K$   $n_H=10^{-0.5}-10^{0.5}cm^{-3}$ )

SUN : Pos=(0.0,10.0)[kpc] Vel=(169.5,0.0)[km/s]

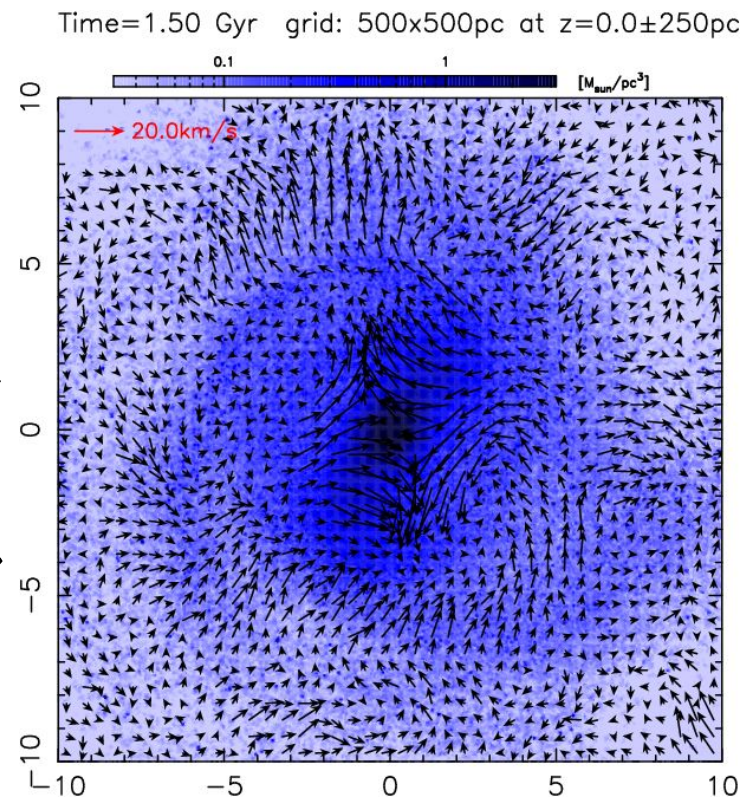


観測 (左) とシミュレーション (右) を比較すると、同じような構造

# 星のスパイラルの運動

星の運動の円運動からのずれ

- スパイラルアームは実体、密度波ではない
  - 古い星の平均の円運動からのずれも結構大きい
  - キロパーセクスケールの構造がある





# ガス+星の銀河円盤シミュレーションのまとめ

- 高分解能計算ではスパイラルアームは自然にできる
- アームは定常ではなく、常に生成消滅している
- シミュレーション結果を「観測」すると、我々の銀河系の観測の色々な特徴を再現できる

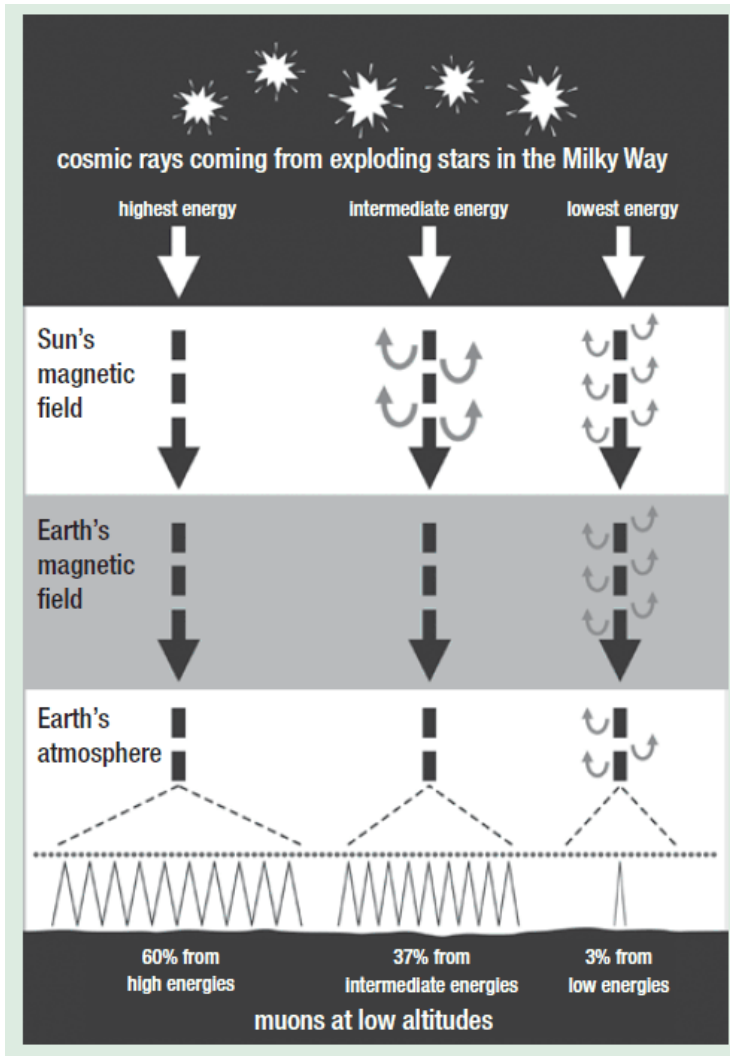
# 銀河力学と気候変動

- 導入: スベンスマーク仮説と銀河-太陽相互作用
- 太陽の銀河内運動を遡る
- まとめ

# 導入: スベンスマーク仮説と 銀河- 太陽相互作用

- スベンスマーク仮説
- 銀河渦状肢と太陽

# スベンスマーク仮説



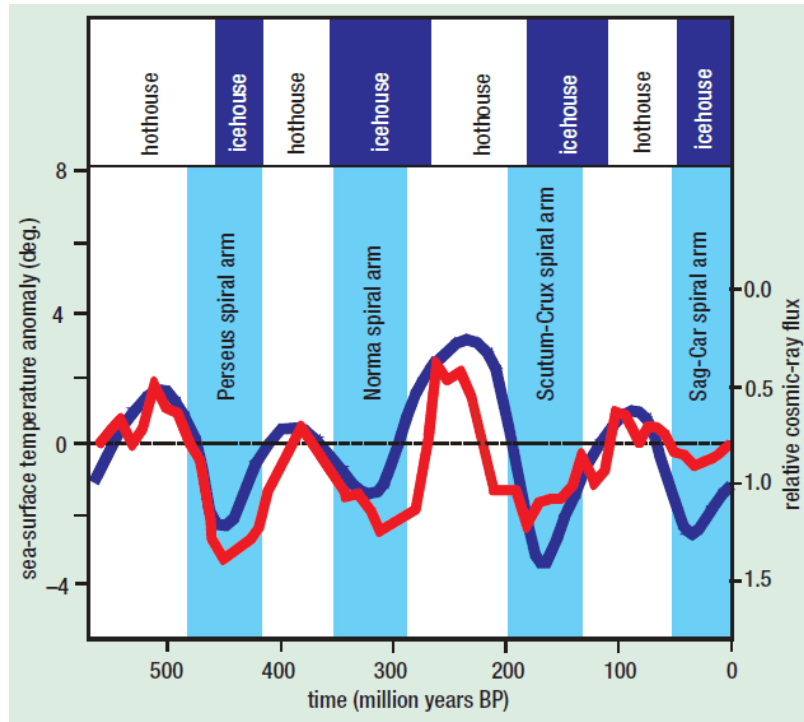
**Svensmark 2007** から

基本的には、銀河宇宙線の地球までふってくる量が増えると雲が増えて寒くなる、という話

宇宙線が増えるメカニズム

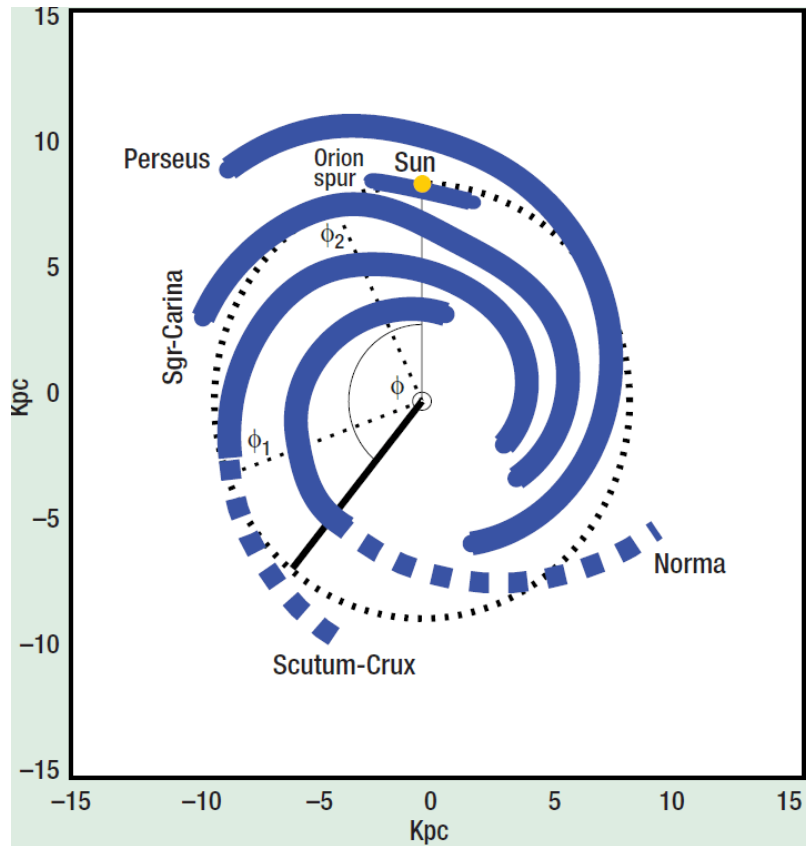
- 地球磁場の変化
- 太陽風の変化
- 銀河宇宙線自体の変化: 近傍での超新星爆発の増加とか

# 長周期の気候変動



- **1.4 億年くらいの周期の気候変動がある**  
(牧野はよく知らないので詳しくは知っている人に聞いて下さい)
- **長周期の起源: 地球の内部や軌道運動ではなさそう(???)**
- **銀河の渦状枝を通過すると宇宙線は増えるのでは?**

# 銀河系と太陽



- 渦状枝は定常密度波で、太陽の位置の円運動とは違う角速度で動いている
- なので、太陽がほぼ周期的に渦状枝を横切る
- 渦状枝のところでは、星間ガスが圧縮されて活発な星形成が起きている
- 宇宙線が多くなっていて寒冷化

# いくつかの疑問

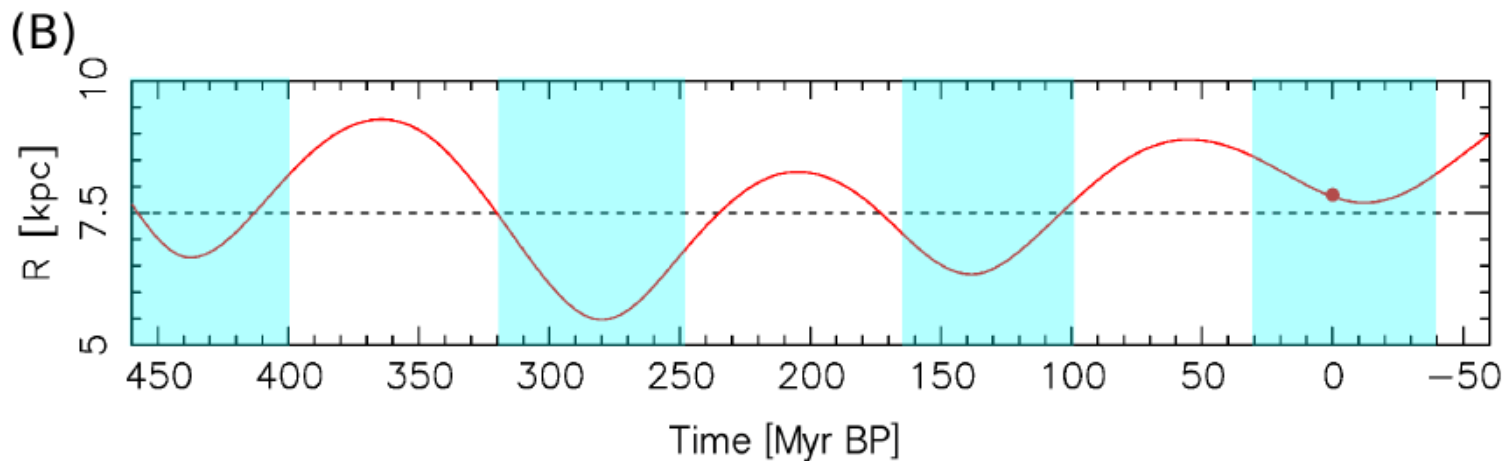
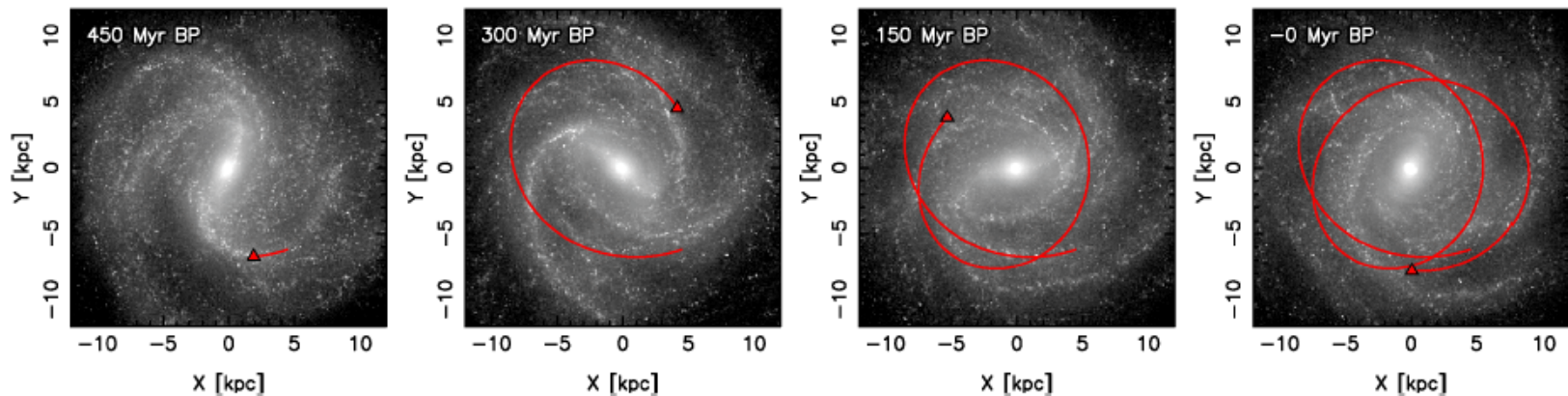
- そもそも星形成率が高いくらいで本当に寒冷化なんかするのか？(今日はこの話はしません。すみません)
- 渦状肢って一定のパターンじゃないし
- 太陽の運動はどんなふうなのか？

# 「スベンスマーク仮説」は？

- 渦状肢は定常ではないし、ケプラー速度と違う「パターン速度」があるわけではない
- なので、「太陽と渦状肢の周期的遭遇」はない
- 本当のところはどうか、我々の銀河系に近い(「太陽」から観測すると大域構造が非常に近い)シミュレーションモデルで太陽に近い速度の星の運動を過去にさかのぼってみた。



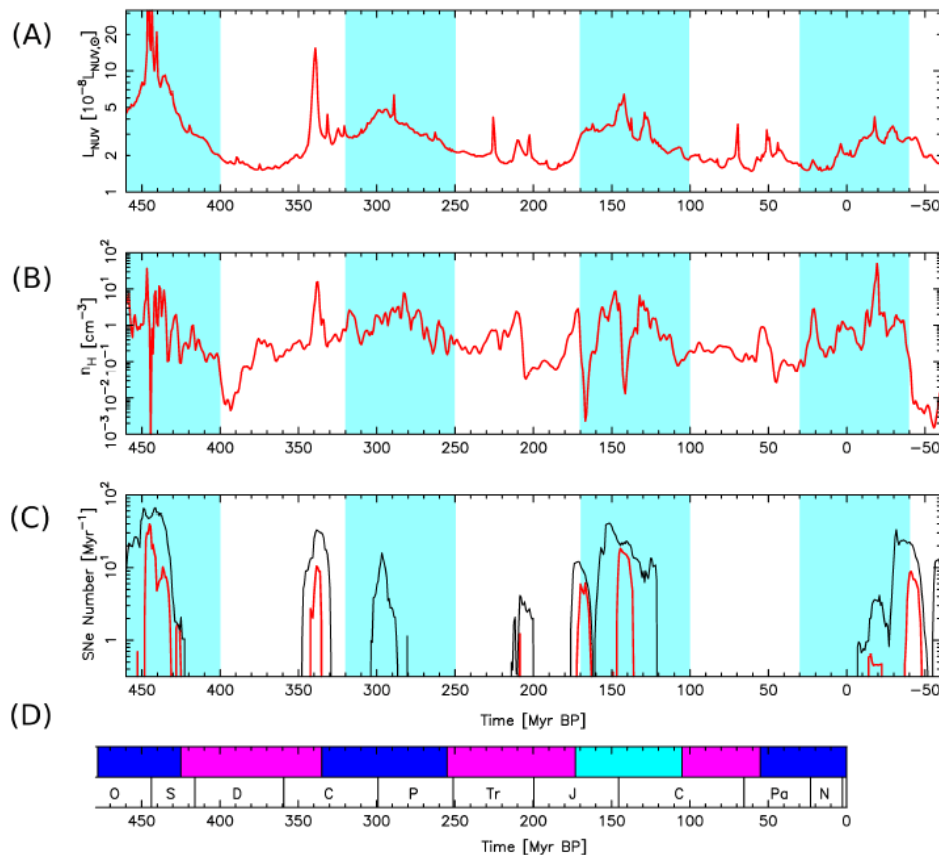
# 結果:銀河系と太陽



青:寒冷期

寒冷期には銀河中心に近い？これはフリーパラメータなしで位相まで一致。

# 太陽周りの環境変化



- 上: 紫外線での明るさ (星形成率を表す)
- 中: 星間ガスの密度
- 下: 超新星発生率
- これらが高いと寒冷期になる？

# まとめ

- スベンスマーク仮説: 銀河渦状肢との周期的遭遇で気候変動
- 現代的な銀河円盤シミュレーションではこういうことはおこらない
- が、太陽のエピサイクル運動による銀河中心からの距離変化が周期的環境変化を起こしている
- この周期は気候変動の周期と実際に一致していて、関係している可能性はある。
- バーとの相互作用も考えると **6-10** 億年スケールでの変動もありえる
- 「銀河古気候学」みたい感じのことができるかも？

# 星だけの円盤

(Fujii et al. 2010)

animation a1

animation a2

animation b1

- Stable against radial mode (a1, a2)
- Spiral arms form
- They seem to be maintained for very long time

円盤系についてのまとめここになにか