

宇宙惑星科学

牧野淳一郎

惑星学専攻

事務連絡

- 今日はおテストなし。

事務連絡

- 評価は小テスト (初回はなし) (レポートはなし)
- 連絡は **BEEF** か状況によって **Google Classroom** を使うので、**Gsuite** のアカウントを有効にしておくこと。「宇宙惑星科学1」の招待がいつているはずである。

講義概要

1. ビッグバン宇宙論: **2**コマ分くらい
2. 天体形成 (主に銀河): **2**コマ分くらい
3. 星形成・進化、惑星形成: **3**コマ分くらい

講義の目的

- 惑星形成を、宇宙における階層的構造形成全体の中で理解する
- 同時に、惑星形成研究を天文学・天体物理学研究の中で位置付ける
- そのために宇宙の始まり、銀河等の天体形成、星形成、惑星形成の順にトップダウンで話を進める

ビッグバン宇宙論

- 宇宙論の歴史
- 現在の描像
- 残っている問題
 - インフレーション
 - ダークマター
 - ダークエネルギー

天体形成

- 大規模構造・重力不安定(ジーンズ不安定)
- 重力熱力学的不安定
- 円盤構造、軸対称不安定、スパイラルモード
- 銀河形成
- 銀河と太陽

星形成と惑星形成

- 星形成
 - 星形成を考えるいくつかの立場
 - 初代星
- 恒星進化
 - 星の一生
 - 中性子星・ブラックホール・重力波
- 惑星形成の標準ないし京都/林モデル
 - **minimum solar nebula model**
 - シナリオ紹介
 - 理論的問題
 - わかっていないこと

マイクロ波で実際に見えるもの

- ものすごく正確に熱平衡分布(プランク分布)に近い電波が
- 宇宙のあらゆる方向からものすごく高い精度で同じ強さで

きているのが観測された。これは、一方ではビッグバン宇宙論をサポートする証拠である。陽子と電子の結合(何故か再結合 **recombination** という)が起こったことを示す。

が、他方で、「あまりに正確に一様過ぎる」という問題を引き起こした。

一様過ぎることの問題

- ある範囲で十分に一様になるためには、その範囲でほぼ熱平衡になる必要がある。
- しかし、そのためには少なくともその範囲の大きさがその時点での宇宙年齢で光が届く距離より小さくなければならない。
- ところが、普通の宇宙モデルでは、宇宙膨張は次第に減速していくため、現在見えているマイクロ波背景放射は、当時の宇宙の「外側」からきている。
- つまり、違う方向からの放射が全て熱平衡にあったはずはない。

インフレーション

A. Guth、佐藤勝彦らがほぼ同時、独立に提唱

- インフレーションモデルでは、ビッグバン後のある時期に宇宙が指数関数的に膨張したとする。
- 宇宙膨張が指数関数的なため、元々は宇宙の内側だった領域がはるかに外側まで広がる
- マイクロ波背景輻射がきているのはその時には宇宙の外側だったとしても、インフレーション前には内側だったので問題ないことになる。

それ単に都合のいい仮定をもちこんだだけでは？という気もするが、、、

インフレーション(続き)

- 何故インフレーションのようなことが起きるか、ということに説明がついているわけではない
- が、そのようなことがおきたとすると、いろいろなことが決まってしまう。(しかも妙に上手くいく)
- 特に、銀河等の成長の種となる密度ゆらぎの波長依存性が、インフレーションを仮定すると、宇宙そのものに量子ゆらぎがあるということから説明される。
- 「宇宙全体」がもっていた量子ゆらぎが、インフレーションによって宇宙がひき伸ばされるとそのまま固定されるので、基本的には波長によらずゆらぎの大きさが同じになる

インフレーションモデルの問題点と現状

明らかな問題点

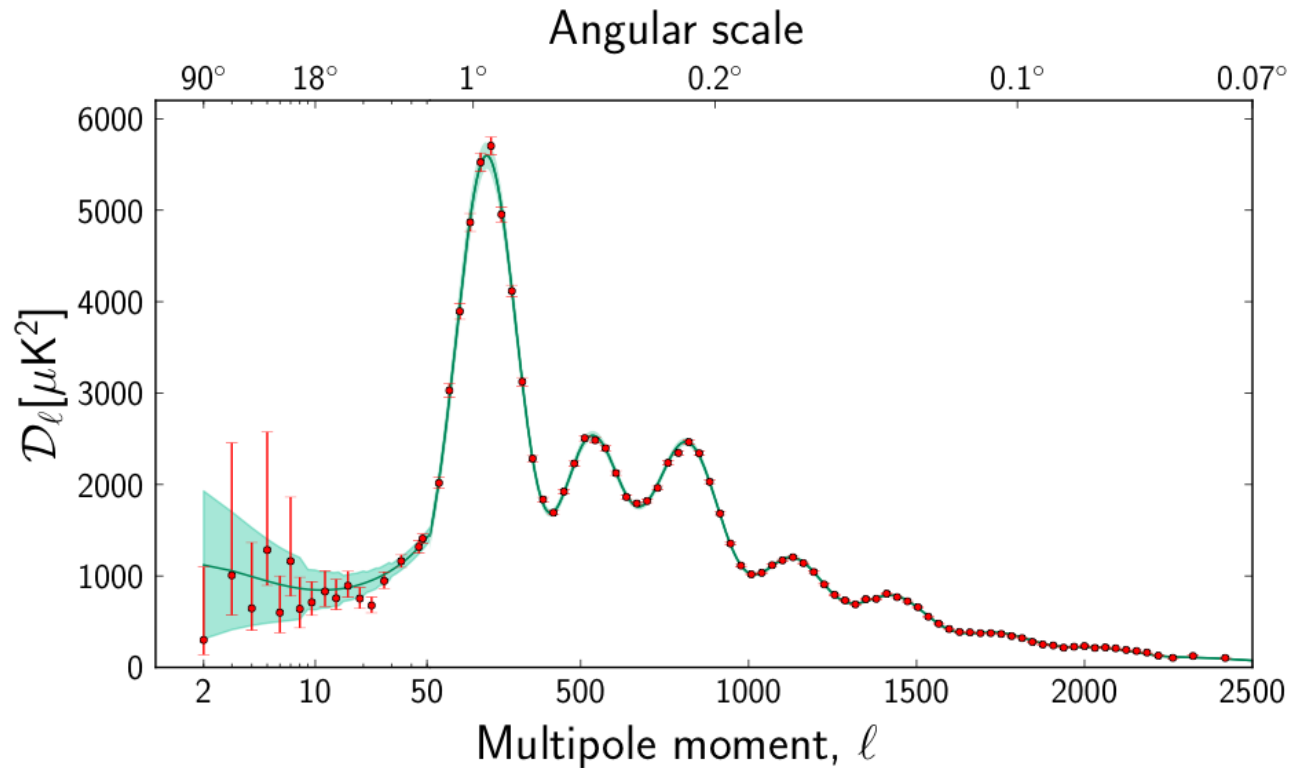
- 始まりは適当な場を仮定すれば起こるが、何故止まるのか？
- 適当な場は本当にあるのか？
- あるかどうか確認する方法はあるのか？

よくわからないが、しかし

- マイクロ波背景放射のゆらぎ(あとでもうちょっと述べる)
- 銀河の分布

はインフレーションが予言するものと非常に良く一致。

マイクロ波精密観測



PLANCK 衛星によるマイクロ波背景放射ゆらぎの角度依存性の観測結果

マイクロ波精密観測

これだけからやたら色々なものが精密に決まる。

Ω : 物質・エネルギーの密度 (物質だけの場合、放物線

解: $\Omega = 1$

Ω_Λ : 物質以外のエネルギーの密度

Ω_b : 物質 (宇宙物理では「バリオン」という) 密度

ダークマターの密度

宇宙年齢

密度ゆらぎの大きさ

密度ゆらぎのスケール依存性 (べき指数)

というわけで、現在の理解をもう一度

- 物質+ダークエネルギーで「平坦」
- ダークエネルギーは重力とは逆に働いて、空間を膨張させる。遠い未来には指数関数的に膨張
- つまり、宇宙初期のとは違うけれど、現在の宇宙も「インフレーション」的な膨張過程にある
- 「ダークエネルギー」は、全く正体不明。ほぼ名前つけただけ

最近の考え方

- 宇宙の「始まり」を考えなくても、そこらじゅうでインフレーションしていると思えばいい。
- 何故かインフレーションが止まったところで色々な「宇宙」ができる。
- (これはある意味ビッグバンから定常宇宙にもどっている気も)

では「物質」のほうは？

- 観測の示唆: ダークエネルギー+物質=「1」
(臨界密度に等しい、ということ)
- ダークエネルギー: **68.3%**, 「**ダークマター**」: **26.8%**, 普通の物質: **4.9%**
- 普通の物質: 陽子、電子、中性子からなる普通の元素。それぞれクォークからできている。
- ダークマター: 普通の物質「ではない」なにか。現在の宇宙ではほぼ重力しか働いていない

話がちょっともどってダークマター

- **1970**年代になると、宇宙にある物質は通常のバリオン、つまり、普通の原子を作っている陽子・中性子と電子だけではないらしいということが明らかになってきた。
- 大きな理由:円盤銀河(我々の銀河系のような渦巻銀河)があること、その回転曲線(回転速度を中心からの距離の関数として書いたもの)
- 銀河系外の円盤銀河のガスを電波で観測することで、その回転速度の半径方向の分布を求めることができる。
- 多くの銀河で、回転速度がかなり外側までほぼ一定で、なかなか小さくならない、ということがわかってきた
- 見えている星の明るさから、質量を推定して回転曲線を作ったものとはあわない。

- また、円盤銀河は、見えている星だけだとすると円盤が不安定で、薄い円盤銀河は存在できない(これはあとでもうちょっと詳しく)

円盤銀河とダークマター

- 普通の物質とは違う、重力以外ではほとんど相互作用しない物質が実は宇宙の物質の大半を占めると「仮定」する。
- そうすると、そういう物質は、バリオンと違って重力で集まっても薄い円盤にならない。球状の形をとる
- みえている銀河は薄い円盤だが、実はそれはダークマターがほぼ球状に分布しているものの底に沈んでいるものだということになる。
- 回転曲線の問題も安定性の問題も解消

こんな都合のいいものが本当にあるのか？

- わかっている(と思っている、、、)ことは、重力以外では相互作用していない、ということだけ
- あらゆる可能性が検討された:太陽質量の**100**万倍程度のブラックホールからニュートリノまで
- 現在のところ一番もっともらしい:未知の素粒子で比較的質量が大きいもの

何故他は駄目か

- ニュートリノは相互作用が非常に弱く、また質量があることはほぼ確定した (**2015年**ノーベル物理学賞)
- もしもダークマターの大半がニュートリノだとすると、宇宙初期のゆらぎのうち銀河団くらいの大きさより小さいものは、ニュートリノの運動によってならされて、消えてしまうこと
- つまり、銀河が存在していないはず。
- なので、もっと重い素粒子でないといけない。(一部はニュートリノというのは最近流行のきざし)

コールドダークマター

というわけで

- ダークマターは重い素粒子であるというのが現在の支配的理論
- 銀河団より大きなスケールでは大きいほどゆらぎの振幅が小さく、それより小さなスケールでは漸近的に一定となる。
- この一定値は無限に続くわけではなく、ダークマター粒子の質量に関係した限界のところであらされる。(地球質量くらい)

これを **CDM**(コールドダークマター) モデルという。**CDM** モデルは、銀河団や銀河の空間分布、質量分布を非常に良く再

現できることが知られている。

ダークマター探査

2つの方針:

- 直接検出: 検出器を通り抜けるダークマター粒子が普通の物質とぶつかり、はね飛ばすのを検出(日本の **XMASS**、アメリカの **CDMS-II** など) **CDMS-II** は「発見したかも」と数年前に発表したか???
- 間接検出: 宇宙の中でダークマター粒子が集まっているところでの対消滅からでてくるなにか(γ 線? 電子? 陽電子?)を人工衛星で観測(**Fermi** 望遠鏡の天体の中にないか? **AMS** 実験:**ISS** 上で反粒子を観測) **AMS** も「発見したかも」と数年前に発表したか???

もちろんまだ見えてないので、どこにどれだけあるのかよくわからない

宇宙の始まりから今まで

をもう一度簡単にまとめておく

- 宇宙初期には非常に高温・高密度であり、普通の元素はまだ存在していなくて全てがクォークである状態があったはずである(クォーク・グルーオンプラズマ)
- ある程度膨張が進むと、普通の陽子、中性子、電子になる
- さらに膨張が進み、温度、密度が下がると、陽子、中性子の集合状態から原子核に分かれる。この過程を元素合成という
- さらに膨張し、温度が下がると、それまで電離していた陽子(水素原子イオン)と電子が結合する(宇宙の晴れあがり)

- このあと、重力不安定によりダークマターやバリオン(普通の物質)が集まって天体が形成され、それらからの放射によって水素原子がもう一度電離する(宇宙の再電離)

どこまで信用できるか？

- 現在の標準的な理解が確立したのは、比較的最近のこと
- ビッグバンの確実な証拠とされるマイクロ波背景放射が発見されたのは **1960** 年代
- インフレーションモデルの提案は **1980** 年代
- 新星の観測結果からダークエネルギーが必要という理解が標準的になったのは **2000** 年代にはいつてから
- 現在の標準的理解はまだ **15** 年ほどの歴史しかない。

どこまで信用できるか？

- ビッグバンがあって、宇宙の始まりがある、という仮説については、近年あまり疑う余地はなくなってきたかに見える。
- 上に述べたマイクロ波背景放射は重要だが、他の傍証の一つとして、遠方(赤方偏移大)の銀河は形態も数も質量も我々の近傍と大きく違う、というのがサーベイ観測でわかってきた、ということがある。
- 仮にビッグバンがなく、宇宙が無限の過去から定常であるなら、見える範囲の過去で銀河の形態等が大きく変わる、ということは考えにくい。
- 他の細かいこと、ダークマターやダークエネルギーについてはまだガラガラ変わるかもしれない

天体形成

- とりあえず見た目を
- 重力(だけ)による天体形成

とりあえず見た目を

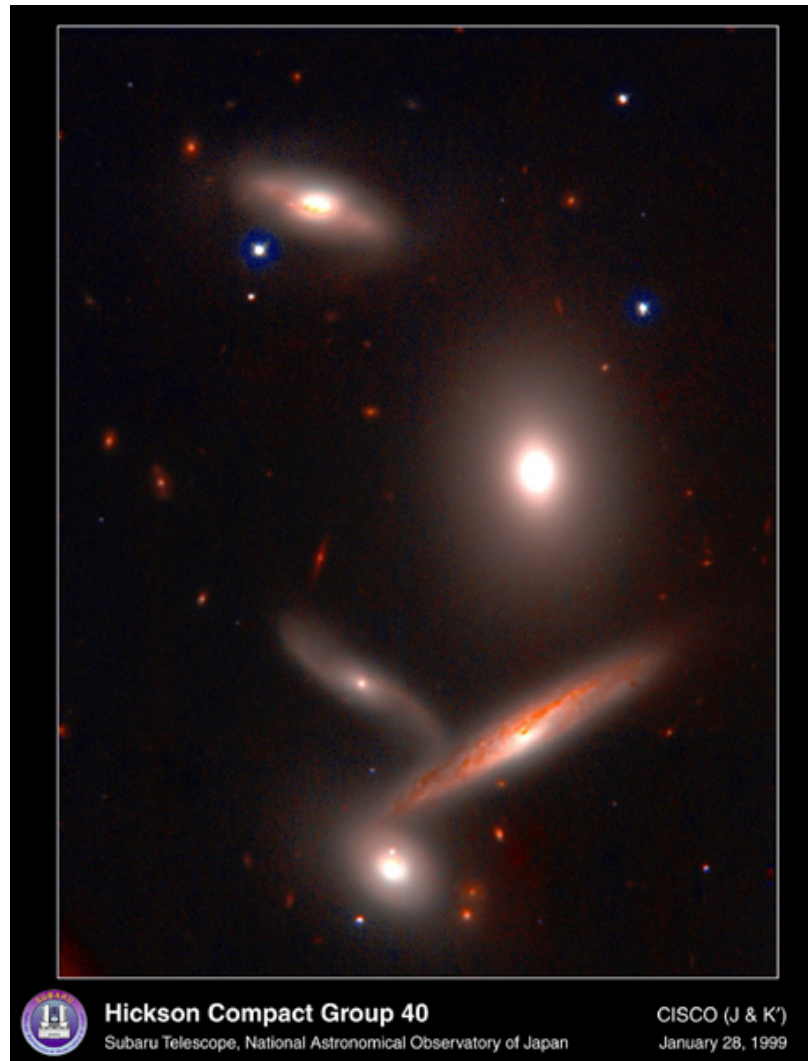
銀河



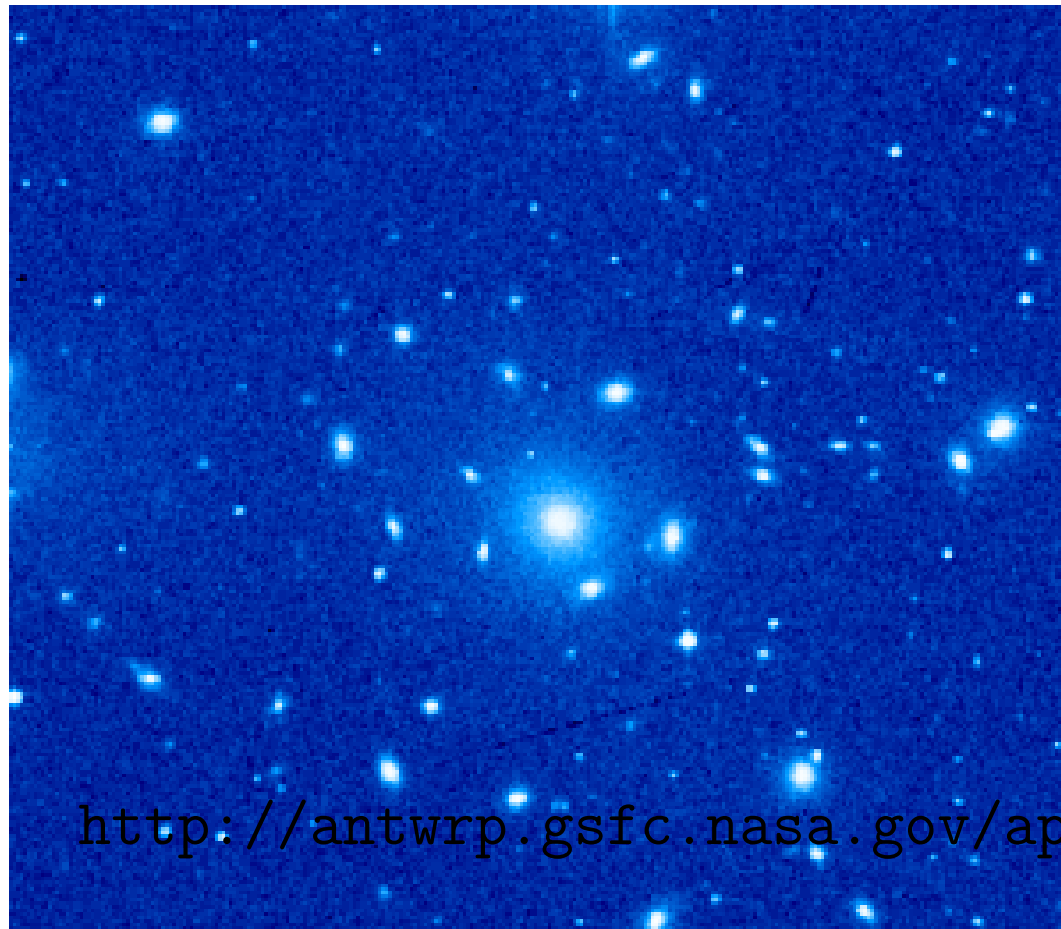
球状星団



銀河群

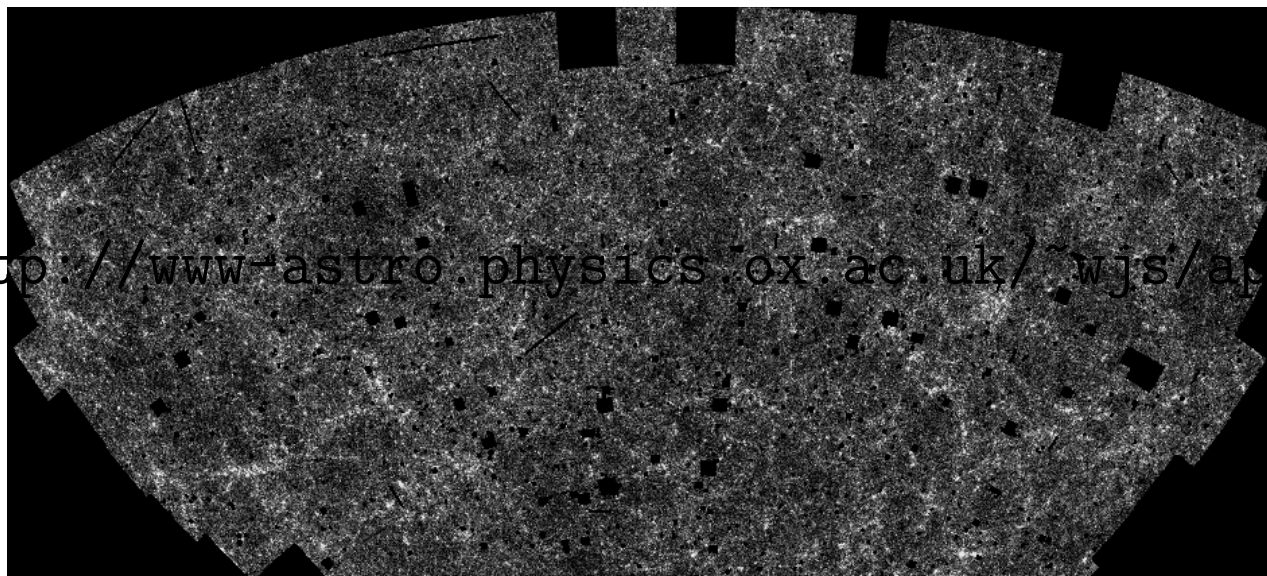


銀河団



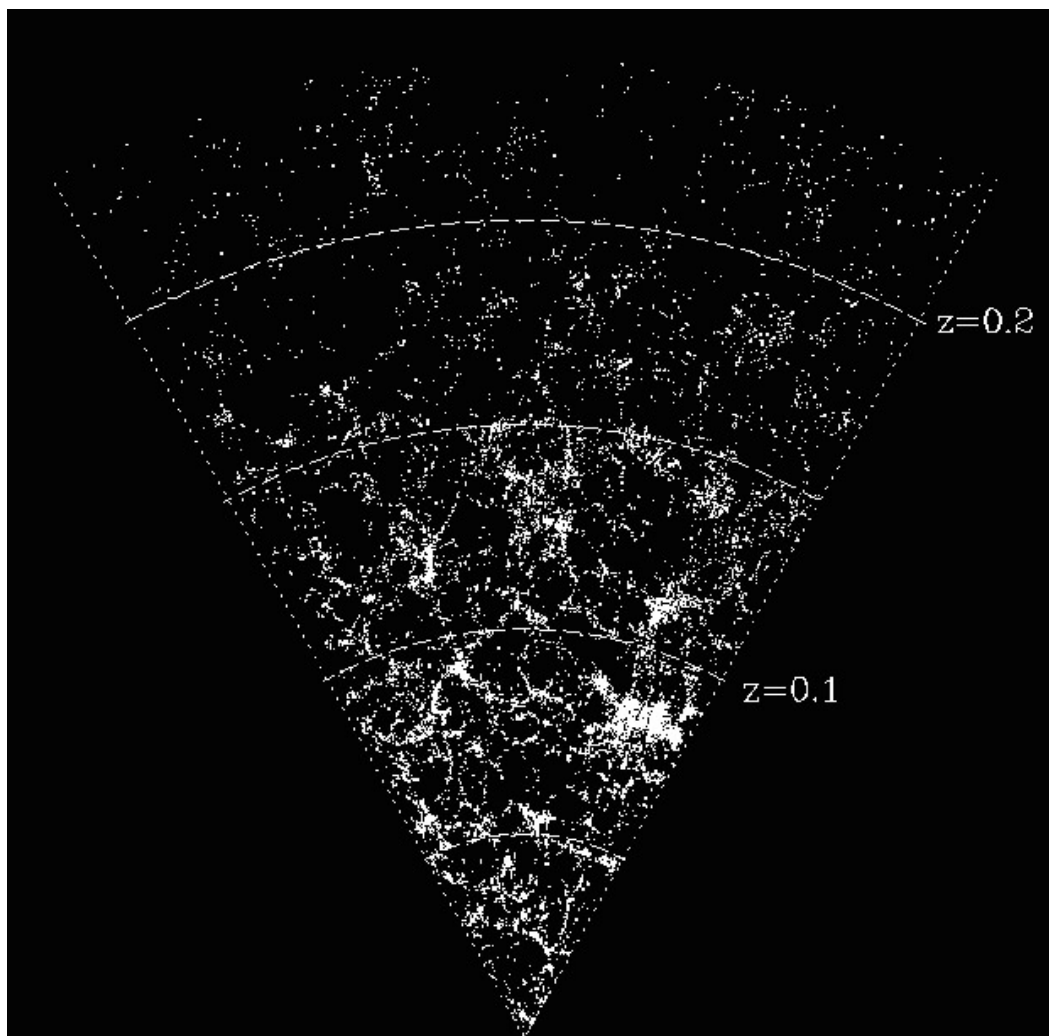
<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html>

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



支配方程式:

太陽系、星団、銀河、銀河団、宇宙の大規模構造などの基本方程式

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j r_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- それぞれの星（あるいは惑星）を一つの「粒子」と思った時に、ある粒子は他のすべての粒子からの重力を受ける。位置、質量: r_i, m_i 、重力定数: G
- 大抵の場合に相対論的効果は考えなくていい（速度が光速にくらべてずっと小さい）

重力多体系の基本的性質

惑星や星と、それ以上の大きさの構造の基本的な違い：

圧力が重力とつりあっているわけではない

では、どうして潰れてしまわないか？

— **Newton** 以来の疑問。

- 太陽系
- 銀河
- 宇宙全体

太陽系の場合

太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からののに比べて **3** 桁程度小さい（木星の質量は太陽のほぼ **0.1%**）。従って

ケプラー問題＋摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか？（惑星の軌道は本当に安定か？）というのは現在でもまだ完全に解決されていない大問題。

何故(本当に)安定か？は現在、わかったとはいえない。

なにが問題か？

銀河とか星団とかはそもそもどうしてそこにあるのか？

それらは安定なのか？

どうやってできたのか？

というようなことが問題。

銀河等はどうやってできたか？

- 宇宙全体は一様に膨張しているとすると、惑星とか、太陽とか、銀河はどうやってできたのか？
- 銀河は重力で星が集まっているだけなのにどうして潰れてしまわないのか？

という問題。

まず、どうしてそれら、とりあえず銀河とか、ができたのか？ということ。

重力不安定による揺らぎの成長

宇宙全体としては、(非常に大きなスケールでは)一様で密度一定であるとしても、小さなスケールになると揺らぎのために一様からずれている。

宇宙が熱い火の玉から現在まで膨張する過程で、その揺らぎが自分自身の重力のために成長して、ものが集まってできるのが銀河とか銀河団ということになる。つまりは、ニュートンが最初に心配した、「星が落ちてくるのではないか」という問題に対する答は、「おちてきちゃってる」というもの。

では、銀河はどうやって形を保っているか？

宇宙はなにからできているか

(復習)

そのへんにある普通の物質：バリオン（陽子、中性子）＋電子でできている。

宇宙のバリオンのほとんどは水素原子のまま（ビッグバンの最初にヘリウムやリチウムが少しできて、あとは星のなか、特に超新星爆発の時にもっと重い元素が核反応で作られる）

ダークマター

見えるバリオンの量（星と、あとは電波や X 線でみえる水素ガスの量）：例えば銀河系の質量や、銀河団の質量のほんの一部でしかない。

銀河：回転曲線

銀河団：X線ガスの温度から質量を推定

- 重力の理論が間違っている？
- なんだかわからないものがある？

ダークマター

どちらが本当かというのは簡単にはいえないわけだが、今のところ「なんだかわからないものがある」というほうが主流。

これはいろいろな状況証拠があるが、（僕の意見としては）大きいのは重力理論が違うことにした時に、銀河毎に重力理論が違うというわけにはいかない（統一的な説明があるはず）とすると説明が難しいということ。

現在の宇宙に対する我々の基本的な理解とその「検証」

- 宇宙の物質のほとんどは、偉そうに言えば「未知の素粒子」、わかりやすくいえば**なんだかわからないもの**である。
- 宇宙は全体としては一様だが、揺らぎがあって完全に一様なわけではない。宇宙膨張の間にその揺らぎが成長して銀河とか銀河団ができてきた。

こういった理解が正しいかどうか：本当にこういうやり方で現在の宇宙の構造ができるかどうかを計算機シミュレーションで調べることである程度はチェックできる。

宇宙の大規模構造形成のシミュレーション

計算の 1 例（現在千葉大准教授・石山さん提供）

ここでやっていること：

- 基本的には「一様」な宇宙を、なるべく沢山の粒子で表現する
- 理論的に「こう」と思われる揺らぎを与える
- 理論的に「こう」と思われる初期の膨張速度を与える
- あとは各粒子の軌道を数値的に積分していく。基本的には太陽系の時と同じこと

わかること

- 宇宙全体としては膨張していく
- 最初に密度が高いところは、他に比べて相対的に密度がどんどん大きくなっていく。
- 特に密度が高いところは、そのうちに膨張しきって潰れ出す。
- （このシミュレーションでは）最初に小さいものが沢山できて、それらがだんだん集まって大きなものになる
- 大雑把にいうと、銀河とか銀河団はこのようにして潰れたもの。

宇宙論の問題としては：

- 観測される銀河や銀河団の性質、特に分布
- シミュレーションでできた銀河や銀河団の分布

を比べて、「どうすれば現在の宇宙ができるか」を決めることで、「宇宙の始まりはどうだったか」を逆に決めたい。

例えば宇宙の膨張速度、密度、宇宙項、初めの揺らぎの性質、ダークマターの性質

それは上手く決められる問題か？

つまり、、、

- 宇宙初期の揺らぎ：（銀河や銀河団になる細かいところまでは）直接には見えない
- 昔の宇宙の膨張速度：直接には見えない
- ダークマター：見えるかどうか（あるかどうか）わからない

これらを、全部同時に銀河の観測から決めたい。

そんなことは可能か？ という問題。

問題点

シミュレーションで出来るのは、本来はダークマターの分布だけ。

銀河になるにはそのなかでガスが収縮して星にならないといけない。

つまり、**どういう条件で星ができるかが決まらな**いと**本当には比べられない**

- 銀河の数が変わる（合体するとか）
- 銀河の明るさが変わる（若い星があると明るい。古くなると暗くなる）

原理的には

- こういった問題点の解決: 「ガスが収縮して星になる」ところも全部シミュレーションすればいい
- そういう方向の研究ももちろん進められている
- が、まだ、シミュレーションの信頼性その他に問題が、、、

シミュレーションの例

話を戻して、、、

なぜ銀河は潰れないか？

太陽系 太陽が圧倒的に重い — **2** 体問題+摂動

一般の **3** 体問題：不安定

安定（最終）状態：**2** 体の連星 + もう一つ（無限遠に飛ばされる）

銀河ではなにが起きるか？

銀河の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x, v)$: **6**次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x, v)dx dv$ がある「体積」 $dx dv$ の中の星の数を与えると
する。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

ここで Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho. \quad (2)$$

ここで、 G は重力定数である。

分布関数の従う方程式（続き）

ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \quad (3)$$

である。

この書き換えは難しいことではないんだけど、「面倒臭い」ので導出はここでは省略。

力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがある
(一般にいつでもそうというわけではもちろんない)

これを「力学平衡状態」という。

銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態に行くのか？

はよくわからない。

なぜ力学平衡にいくのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態にいく。

(但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、)

前に見せた銀河形成のシミュレーションはその一例。

ジーンズ不安定

良く考えると、宇宙膨張と構造形成の関係はあんまり簡単ではない。

- ビッグバン直後の宇宙は熱平衡、一様密度
- 今の宇宙は全く一様ではない(少なくとも「小さな」スケールでは。メガパーセクとか)
- 理論的にはどうやって一様でなくなったか？

理解する枠組み: 重力不安定(ジーンズ不安定)

ジーンズ不安定(続き)

- 「理論的」枠組み:大抵、摂動論(解けるものからの無限小のずれを扱う)
- ここでもそういう話
- で、ダークマター(無衝突ボルツマン方程式に従う)だと面倒なので断熱のガスで考える(あとで述べるが、安定性条件は同じになる)

流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4)$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (5)$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (6)$$

で記述される。

さらに状態方程式がある。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいい)

記号のリスト

ρ : 密度

t : 時間

v : 速度

p : 圧力

Φ : 重力ポテンシャル

G : 重力定数

線型化

- 平衡状態からの無限小のずれの変化を見るため、ベースの解とずれの部分にわけると
- ρ, p, v, Φ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好
- 添字 **0** がつくものはもとの方程式の平衡解であり、**1** がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）とする。

で、方程式を書き直す。

線型化した方程式

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 v_1) + \nabla \cdot (\rho_1 v_0) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) v_1 + (v_1 \cdot \nabla) v_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (8)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (9)$$

$$p_1 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho_1 = v_s^2 \rho_1 \quad (10)$$

ここで v_s は音速である。

ベースが無限一様の場合

ベースは無限一様でいたるところ密度、圧力が等しく、速度も**0**とすると、連続の式とオイラー方程式が

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (12)$$

となる。下**2**本は見かけはかわらない。

これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \quad (13)$$

この方程式の振舞いは？

- 最初の**2**項をみれば普通の波動方程式、
- 最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。
- 波長が短い極限では普通の波動方程式
- 波長が長い極限では空間2階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

分散関係 (空間波長と時間振動数の関係) を求める

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\rho_1 = C e^{i(k \cdot x - \omega t)} \quad (14)$$

として代入すれば

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (15)$$

ということになる。したがって、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \quad (16)$$

と書くことにする。

分散関係

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

なお、一応念のために書いておくと、式(14)の形の解だけを考えるのは任意の初期条件からの解が（連続性とかを仮定すれば）この形の解の線形結合で表現できるからである。解の線形結合が解であるのは方程式が線形だからであり、任意の解が表現できるのは要するにフーリエ変換が完全系をなすからである。

分散関係からいえること

- 波長が短ければ普通の音波
- 波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化
- つまり、長い波長のモードは密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）

いいかえると

- 十分に波長が長いと必ず不安定になる
- 重力があると無限に一様な状態というのは温度無限大でない限り必ず不安定

ジーンズ波長

k_J に対応する波長: ジーンズ波長 λ_J

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} v_s \quad (17)$$

ジーンズ波長くらい半径の球を考えると、

- 運動エネルギー: $M_J v_s^2$ の程度
- 重力エネルギーは GM_J/λ_J の程度、
- M_J はジーンズ質量で (半径 λ_J の球の質量)

計算すると、運動エネルギーと重力エネルギーが大体等しい。
ジーンズ波長はそういう長さ。

ここまでの解析でごまかしたところ

- 一様密度の物質があれば、ポアソン方程式の右辺が**0**じゃないから重力ポテンシャルは一様な値というのは何かおかしい
- が、一様で無限にひろがっているなら、重力ポテンシャルが場所によって違うのも何か変

宇宙全体の場合：宇宙膨張に対して不変な座標系(共動座標という)で方程式を書き換えるとこの問題は解消。但し、時間変換がはいるので、時間の指数関数的にはならない。

初期条件と力学平衡の状態の関係

あまり役に立つことはわかっていない。初期条件と最終状態の間関係をいろいろ調べている段階。

このへんは、基本的には前にいった数値計算でやられる。

- **1996** 年頃に、宇宙論で考えるような初期条件の範囲内ではいろいろパラメータを変えてもできるものはみんな同じであるというシミュレーション結果が出た。
- が、この結果は実は**間違い**であったことが、より大規模なシミュレーションからわかった。

というわけで、わかっていない問題は非常に多い。

もう一つ大きな問題

星の数は実際には無限大というわけではない。

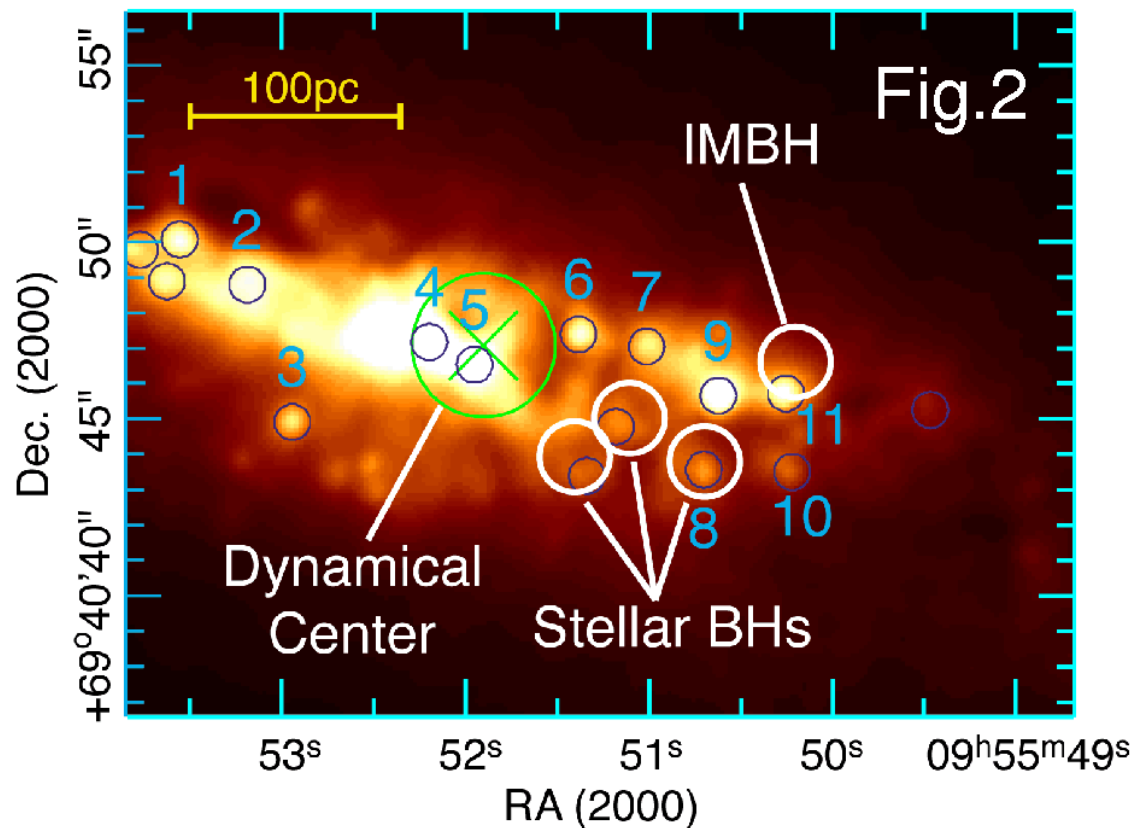
銀河： 10^{10} かなり多い、

散開星団、球状星団 $10^{4\sim6}$

銀河中心 巨大ブラックホール+ 10^7 個程度の星

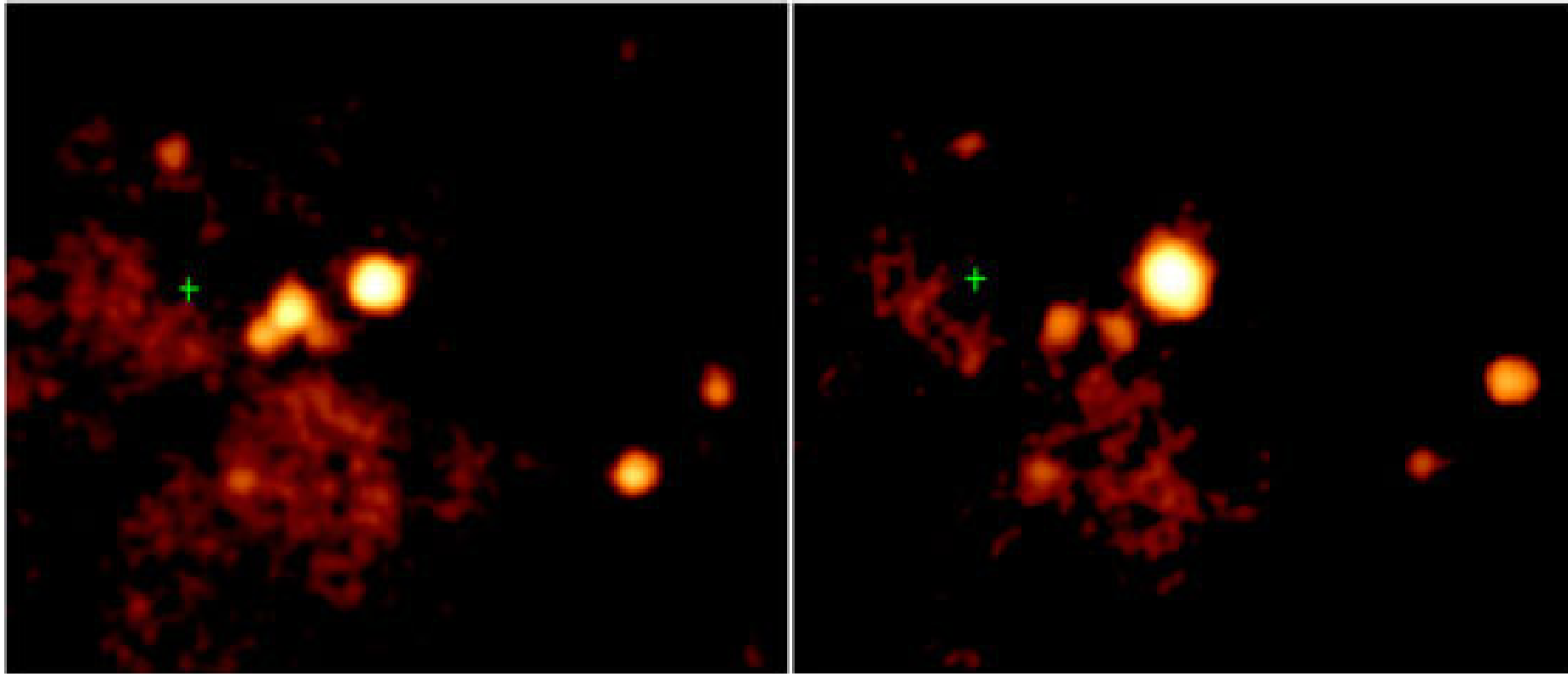
こういったところではどういことが起きるか

銀河中心



近傍の銀河 **M82** の中心部の「すばる」望遠鏡による写真

X線では



NASA Chandra X線衛星による写真

こういったところではいったい何がおきているか？

無限には星が多くない時

厳密には力学平衡にない

→それぞれの星の軌道はだんだん変わっていく

物理的には「多数の粒子が相互作用する系」

→統計力学的（熱力学的）に振舞うはず

つまり：**熱平衡状態（エントロピー最大）にむかって進化するはず。**

（普通の気体なんかと同じ）

普通の気体との違い

- 重力のエネルギーは質量の**2乗**に比例
- 粒子を閉じ込めておく箱（境界）があるわけではない

2つ違うとよくわからないので、違いを一つにしてみる。

具体的には：仮想的に球形の断熱壁でかこんだなかの理想気体を考える。

重力の効果があるくらい大きいもの。

星の集団とガスは違うのでは？という気もするが、熱平衡状態であれば分布関数は同じなのでまあいいかも。

断熱壁の中の理想気体

温度（熱エネルギー）が重力エネルギーよりもずっと大きい状態

これはもちろん重力がない時と変わらない

温度を段々下げていく（エネルギーを抜いていく）



重力の効果が出てくる。

具体的には、中心の密度が上がって、壁のところが下がる。これは、重力と圧力勾配を釣り合わせるため。地球の大気が上にいくほど薄くなるのと同じ。

方程式と解析解

球対称な壁の中の、等温熱平衡なガスの方程式はこんなふう。

$$\frac{dp}{dM} = -\frac{M}{4\pi r^4}, \quad (18)$$

$$\frac{dr}{dM} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \quad (19)$$

$M(r)$ は半径 r の中の質量、 p と ρ は圧力と密度、ここでは重力定数が 1 になるような単位系だとする。

方程式と解析解(続き)

座標系のとりかたが普通ではないが、恒星内部構造論では質量を座標にとる慣習がある。下の式は逆数とれば普通の式、上の式は

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho M}{r^2} \quad (20)$$

で、圧力変化が重力と釣り合う、という式である。温度は、状態方程式

$$p = \rho T \quad (21)$$

方程式と解析解(3)

- 一般の境界条件で解析解があるわけではないが、 $\rho \propto r^{-2}$ の形の解はある。(代入すれば解であることがわかる)
- 壁をつけた人工的な条件ではこの解は存在できるが、「自己重力系」としては存在できない(質量が無限大になる)
- 中心で有限密度の解も、 $r \rightarrow \infty$ の極限では解析解に漸近する
- そういう、解の系列を考える。

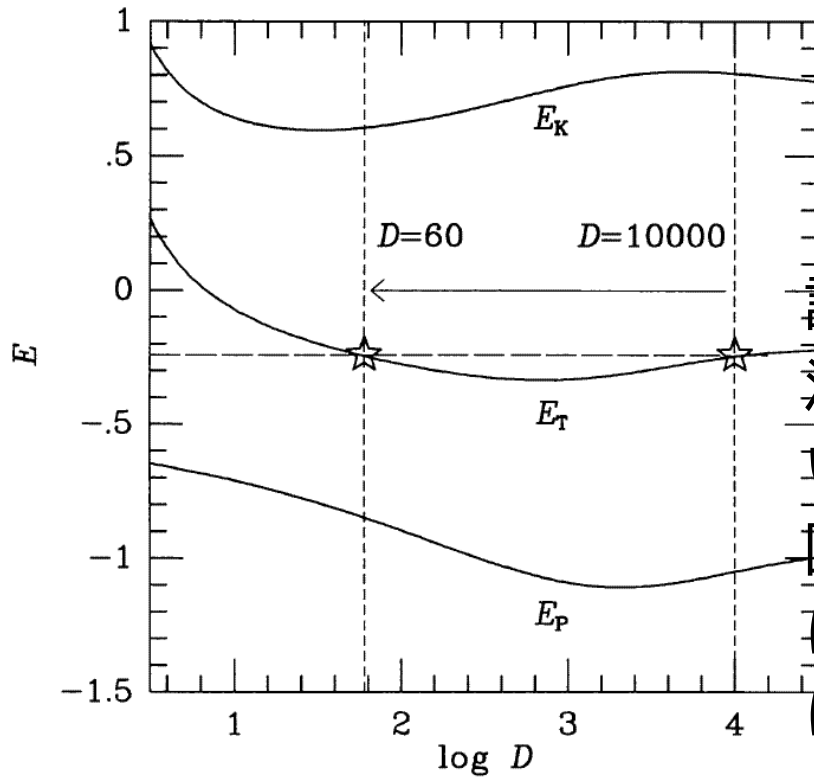
解の系列

- 物理的にしたいこと:ある質量のガスをある半径の球形の壁に置いて、段々温度を下げていく。そうすると、重力の効果が大きくなってきて中心と壁の密度比(**D**とする)が大きくなる
- 計算機でこの解を求めるには:中心で適当な密度から始めて、外側にむかって積分していく。任意のところである **D** の解が求まる。これを、質量、半径を(例えば) **1** になるようにスケール変換して、温度もあわせる。

スケール変換

- 半径 r , 質量 m , 温度 t の解があったとする。 $G = 1$ で考える。スケール変換では半径を $1/r$ 倍、質量を $1/m$ 倍するので、重力エネルギーは r/m^2 倍になる。
- 熱エネルギーを同じ比率でスケールすれば、圧力と重力がちゃんと釣り合う解になっているはずである (ビリアル定理からくる要請) ので、温度は t/m 倍すればいい (はず)
- 始めからエネルギーだけ与えて、壁の中にある、という境界条件を満たす解を求めようとするとどうすればいいかわからないが、スケール変換すれば求められる。

エネルギーの下限



計算してみるとどこまでも
温度を下げられるわけではない。

図に結果を示す。これは横軸
に中心と壁の密度の比、縦軸
にエネルギーをとったもの

熱平衡状態

$D = 709$ でエネルギーが最小になり、それ以上エネルギーが低い平衡状態はない。

さらに、エネルギーのほうから考えてみると、あるエネルギーに対してそれに対応する平衡状態が **2** つ以上あるところがある。

- もっとエネルギーが低い状態は？
- D が大きいところはいったいなにか？

密度比が限界より大きい状態

これは「熱力学的に不安定な平衡状態」になっている。

安定／不安定：ここでは「熱力学的」

温度が一様な平衡状態に、すこし温度差をつけてやる（熱エネルギーを移動してやる）

- もとに戻る：安定
- 戻らない：不安定

熱力学的安定性

普通の世の中のもの：戻るに決まっている。

熱をもらった方は温度が上がる。

とられたほうは温度が下がる。

熱い方から冷たい方に熱がながれるので、元に戻る。

ところが、、重力が効いているとそうなるとは限らない。

熱力学的不安定性

条件によっては以下のようなことが起こる

中心部から熱を奪う → 温度／圧力が下がる → 圧力を釣り合わせるために収縮 → 重力が強くなる → もっと収縮 → 結果として温度が上がる。

これが起きると、熱を奪われた方が温度が上がるので、ますます熱が流れだし、いっそう温度が上がるという循環にはいる。

これを、「重力熱力学的不安定性」という。

どうやって安定性を調べるか

「重力熱力学的不安定性」:

計算機によって安定性を調べることで初めて発見されたもの。

「計算機で安定性を調べる」というのはそもそもどういうことかという原理的な話をすこしだけしておく。

安定性解析の原理

ここで問題なのは適当な偏微分方程式（系）

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A(f(x)) \quad (22)$$

ここで、 A は「汎関数」(関数に作用する「関数」)。具体的には、例えば普通の熱伝導なら f の空間 **2** 階微分。 f は例えば温度。

の定常解 $f_0(x)$ があったとする。

定義により $A(f_0(x)) = 0$

少しずれた $f = f_0 + df$ 、 df の方程式を作る。

線形化(1)

df に何か入れればそれがどうなるかが計算できる

あらゆる可能な df について調べる？

そんなことがどうやってできるか？

これを可能にする方法が線形化して固有値問題にするということ。

線形化(2)

仮定: df が f_0 よりもずっと小さい

df について線形な式にできる。

線形:

$$\frac{\partial df}{\partial t} = B(df(x)) \quad (23)$$

という形だったとして、 B が線型とは

$$B(\alpha df_1(x) + \beta df_2(x)) = \alpha B(df_1(x)) + \beta B(df_2(x)) \quad (24)$$

という性質を満たすということ。

線形化(3)

もうちょっとわかりやすくいうと、

df_1 が解なら df_1 の定数倍も解

df_1, df_2 が解なら $df_1 + df_2$ も解

ということ。

固有関数

このように線形な方程式には、固有値、固有関数というものがある。

固有関数は、

$$\lambda df = B(df) \quad (25)$$

の解。 λ が固有値。

この時、時間発展が $df = e^{\lambda t} df_0$ の形に書ける。

一般には任意の関数が固有関数の重ね合わせで書けるので、これら固有関数だけを調べればよいことになる。

固有値と安定性

この解（固有関数）は一般には無限個ある。

対応する固有値も無限個ある。

「もっとも大きい固有値」から順に求めるような計算方法があるので、求まった最大の固有値が負（実数部分が）であれば安定ということになる。

もうちょっと具体的な計算法

まず f_0 自体が必要。

空間も細かい刻みにわけて、その各点での値を近似的に計算する。

出てくるのは連立方程式になる。これを計算機を使って解く。

f_0 が求まると、それを使って df についての方程式を具体的に書ける。

df についての方程式

これもやっぱり連立方程式になるが、線形であることから連立一次方程式になる。つまり行列でかける。

この行列の固有値、固有ベクトルを求めると、元の問題の固有値、固有関数の近似値になっている。

と、なんかややこしいが、計算機で安定性を調べるという時にはだいたいどんな分野でも同じようなことが出てくるので、ちょっと詳しく書いてみた。

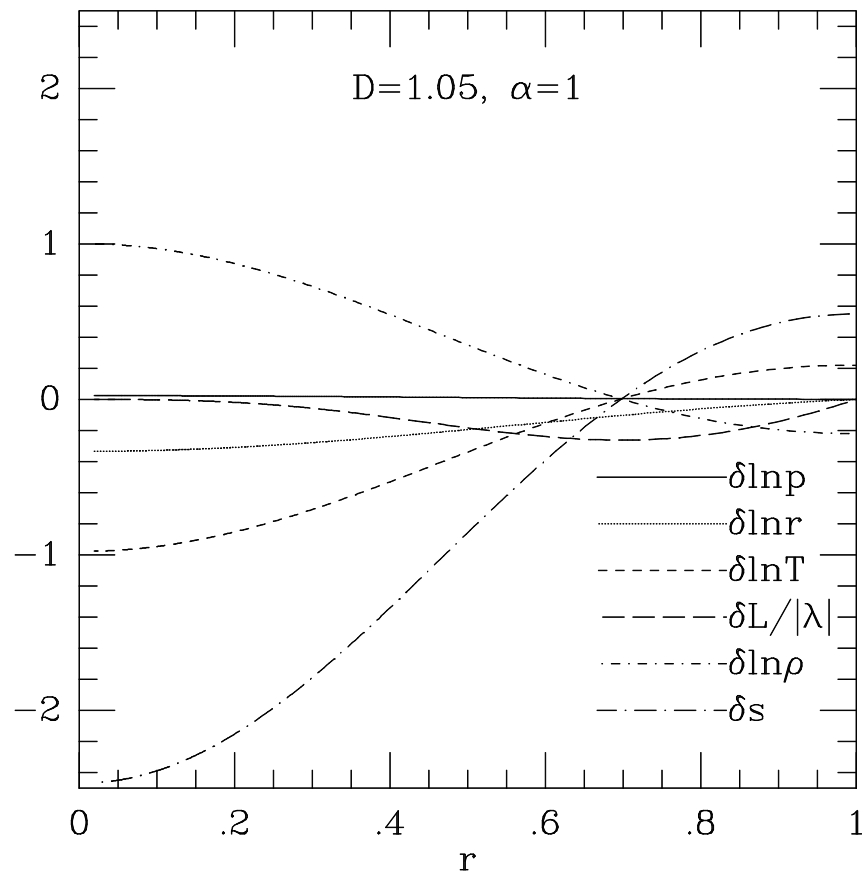
ジーンズ不安定の場合

先週扱ったジーンズ不安定は計算機とかつかわないで答がでた。何故？

- 平衡状態の解に「無限一様」をもってきた
- そうすると、線型摂動に対する偏微分方程式が定数係数になる。
- 変数分離で解ける。「全ての」固有値が解析的にもとまる。

「無限一様」とか「正方形」とか「一様球」とか以外が計算できるようになったのは電子計算機の発達以降。

安定な場合, $D = 1.05$

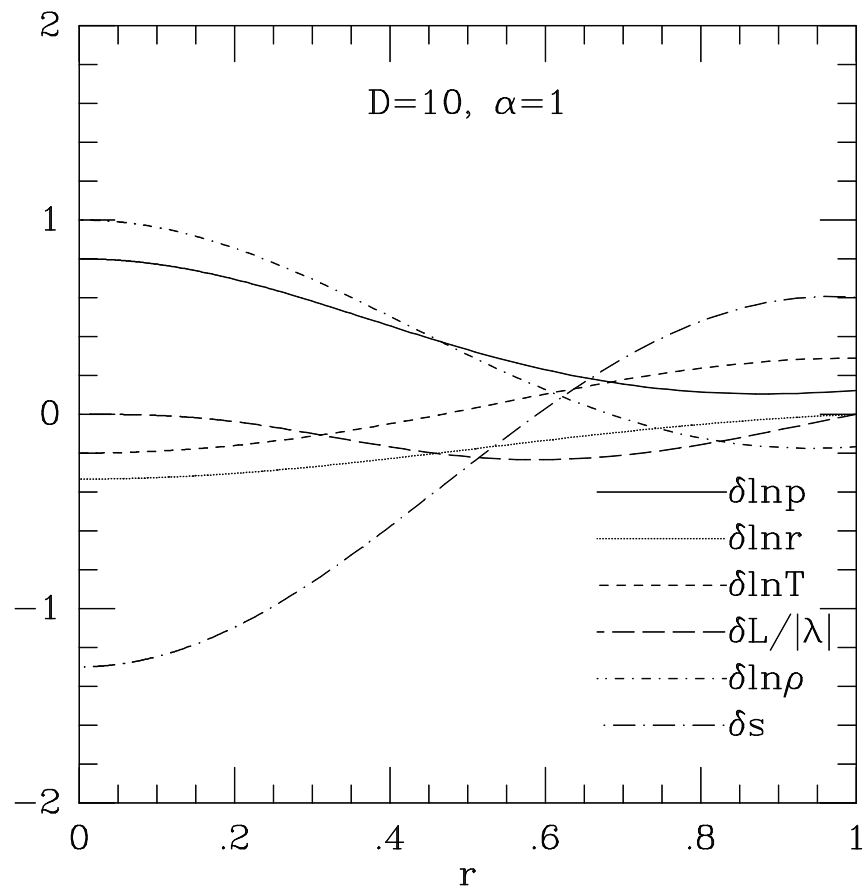


λ : 固有値

- 圧力は変化しない
- エントロピーと温度が比例

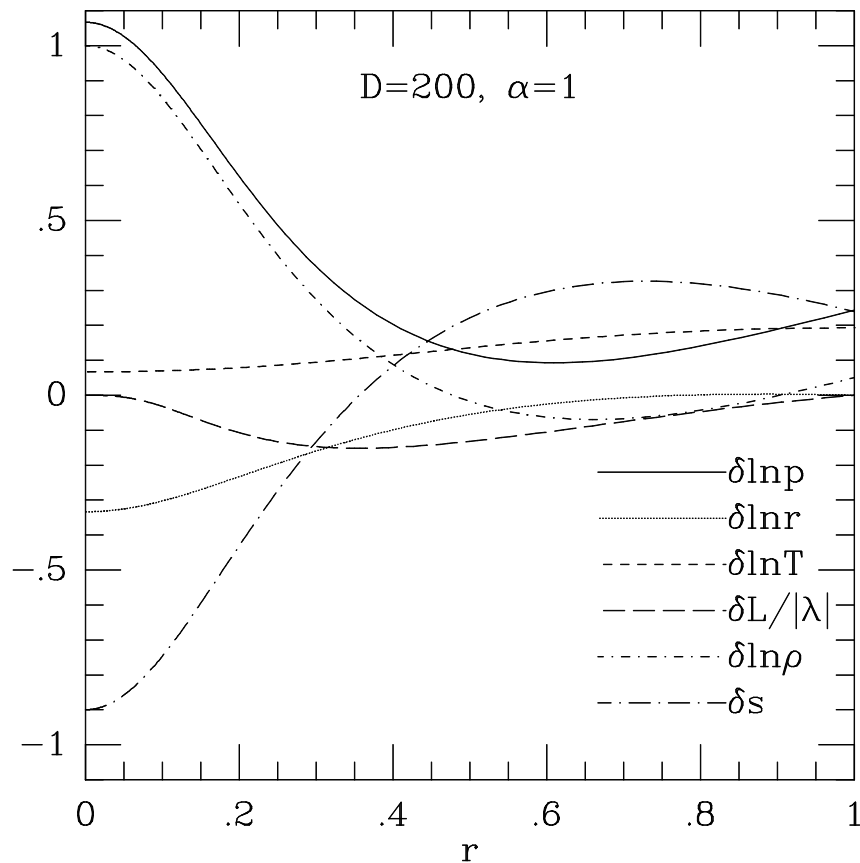
要するに、普通の断熱容器のなかのガス。

安定な場合(2), $D = 10$



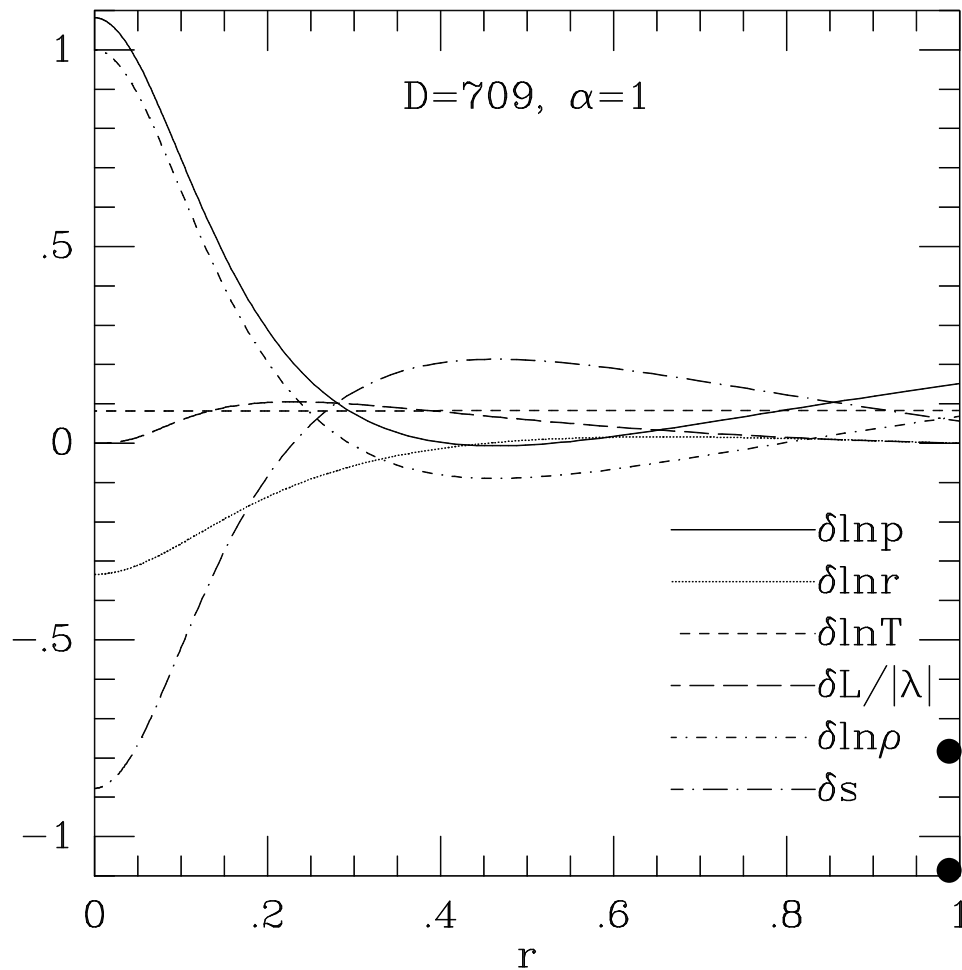
- 中心で圧力が上がる
- 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

安定な場合(3), $D = 100$



- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き（この場合中心の方が低温）
- 熱力学的には安定

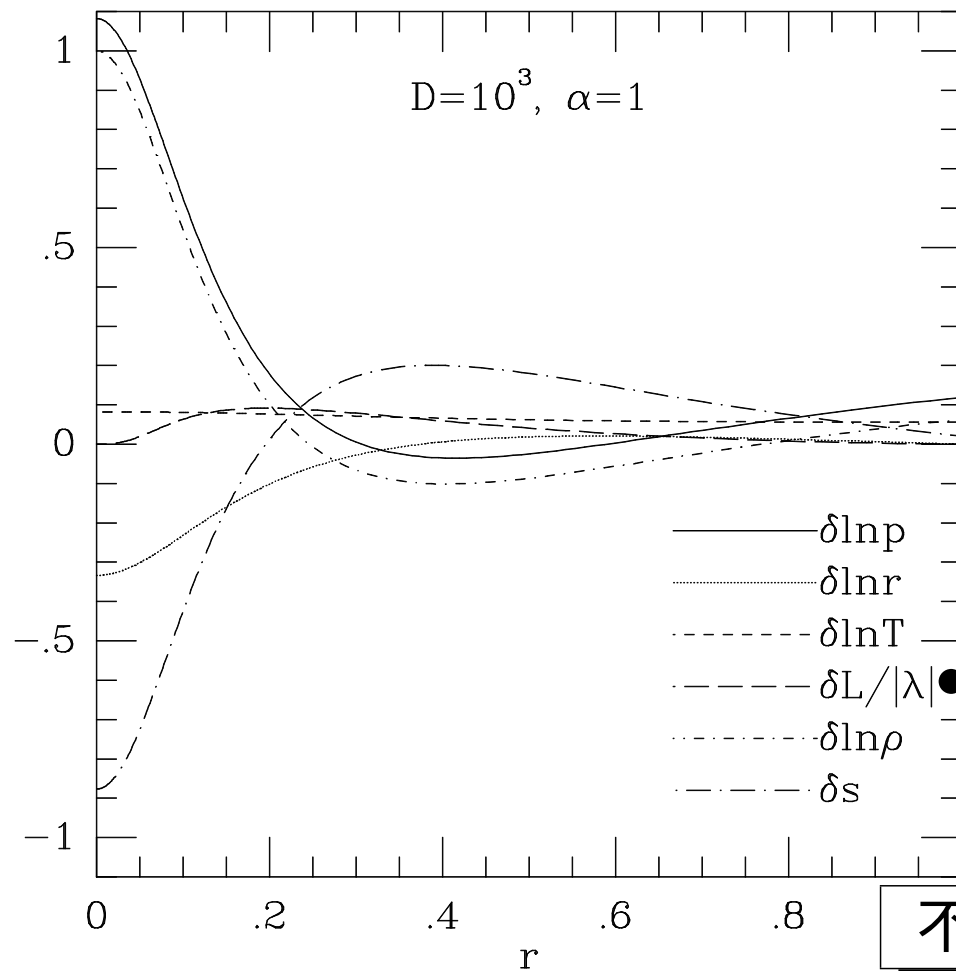
中立安定, $D = 709$



● 温度勾配ができない

● したがって、摂動がもとに戻らない

不安定, $D = 1000$



● 中心のほうで温度上昇が大きい

不安定になっている

重力熱力学的不安定性

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

「重力熱力学的不安定性」 **gravothermal instability** という名前がついている。

発見：**V. Antnov (1961)**

上のような安定性の明確な定式化：**Hachisu & Sugimoto (1978)**

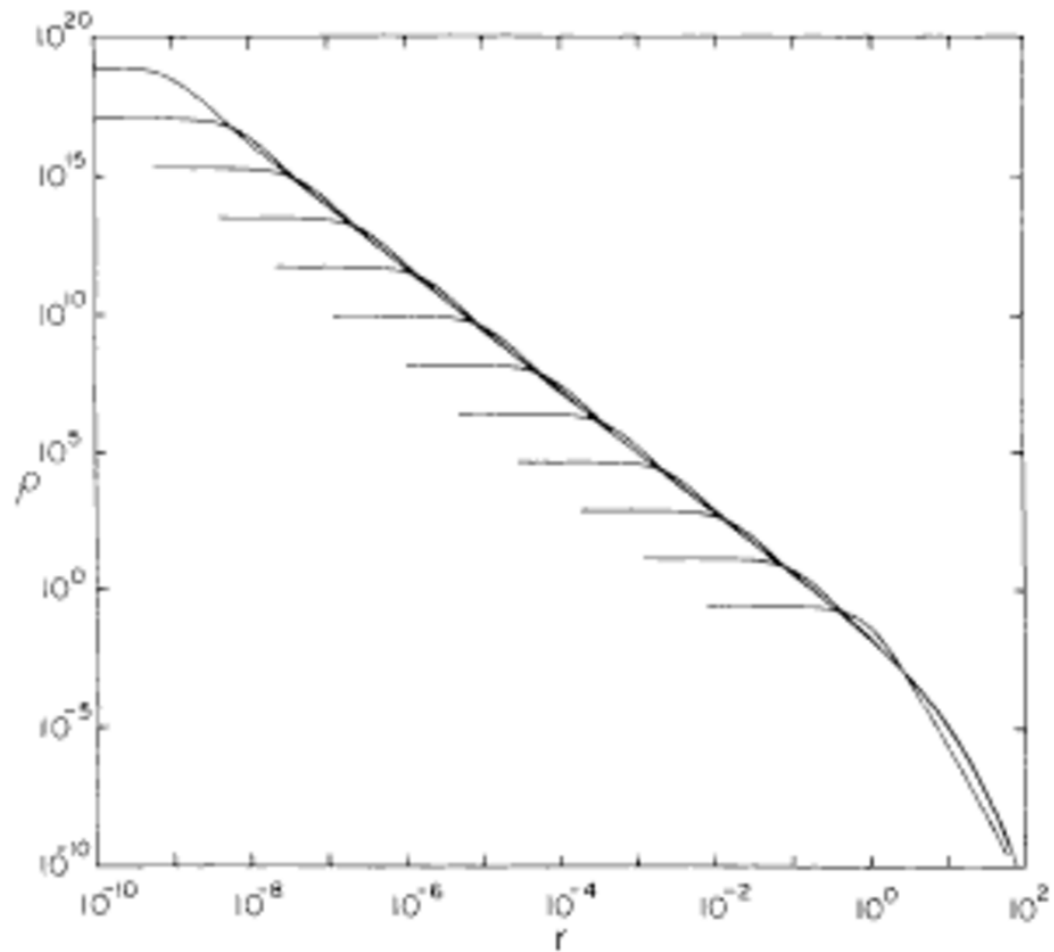
もっと先の進化

摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

Hachisu *et al.* (1978)：自己重力流体について数値計算した。

Cohn (1980)：流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。

自己相似解



最終状態？

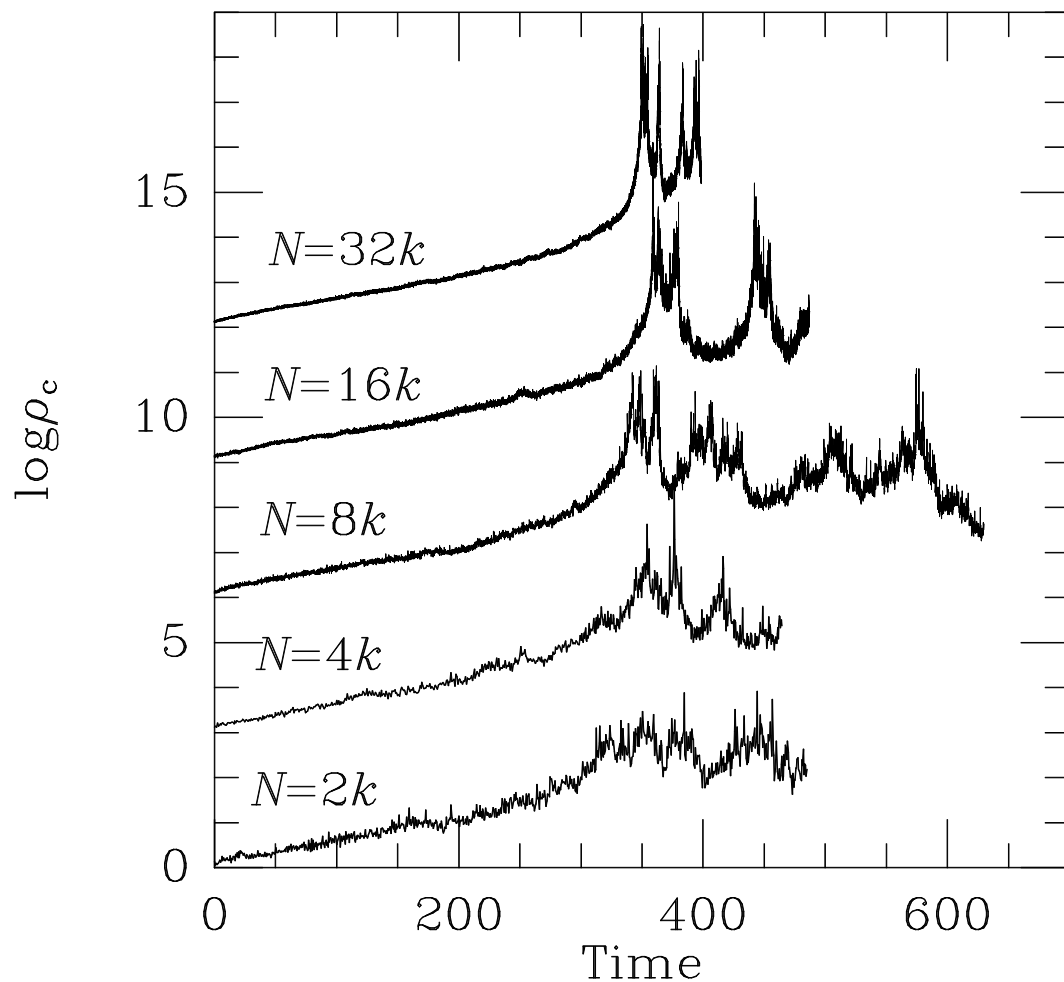
中心部の密度が非常に上がってくると、

- 星同士の近接遭遇
- **3**星が同時に近付く

連星ができる。これは「エネルギー放出反応」（核融合と同じ）

これにより、今度は中心部が膨張を始めると理論的には予測されている（重力熱力学的振動）

重力熱力学的振動



球状星団の中心部ではこのようなことが起こっている可能性が高い。

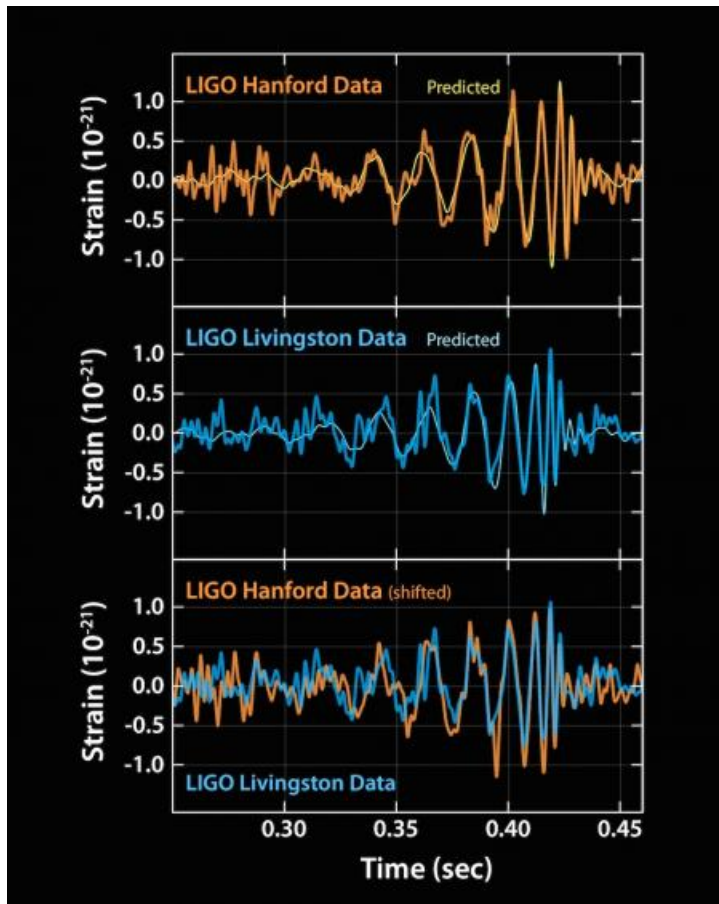
球状星団中心の天文学的意義

- 多数の連星が形成される。
- 熱力学的進化: 重い星は星団中心に沈む
- ブラックホールや中性子星の連星が多数形成される場所である可能性
- 低質量 X 線連星やミリ秒パルサーは実際に多数見ついている
- 重力波も検出されたのでこれから注目される？

重力波初観測

- **2017年の2月11日 10:30 (東海岸時間) LIGO グループ**
発表
“**We have detected gravitational waves. We did it!**”
- どこにあるどういう天体だったか
 - **13億光年先**
 - 太陽質量の **36倍**のブラックホールと **29倍**のブラックホールが合体、**62倍**のブラックホールになった (**3太陽質量**が重力波のエネルギーになった)

検出された波形



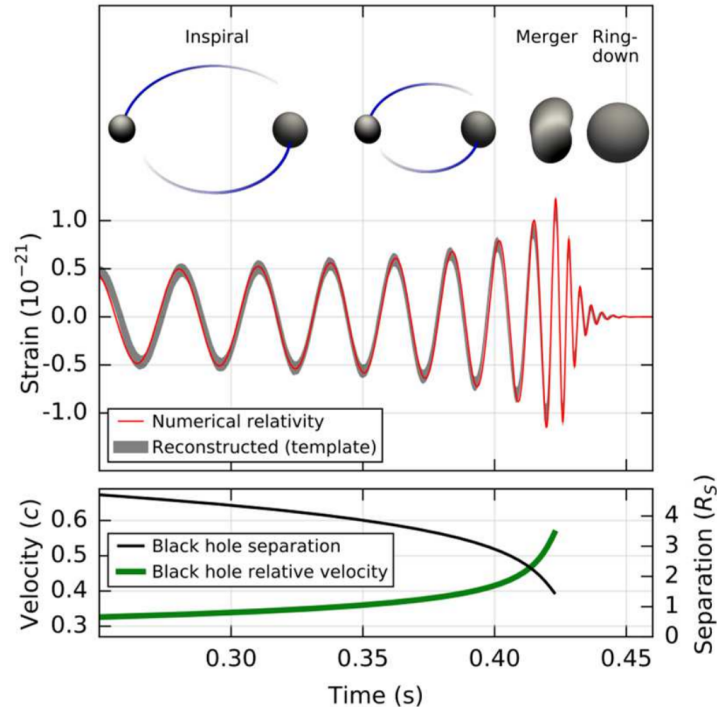
横軸: 時間

縦軸: 歪み (「空間の歪み」)

最大振幅: 10^{-21}

3000km 離れた **2**つの測定器
(基線 **4km** のマイケルソン・
モーレー干渉計) で同じ波形
観測

LIGO が捉えたもの



Inspiral: 合体直前、重力波放出によって軌道が近付き、周期が短く、振幅が大きくなる
合体の瞬間: 大振幅、高周波数の波
リングダウン: 1個のブラックホールになってからの時空の振動

シミュレーションで予測されていたものと非常に良く一致:
逆に合計の質量・質量比、距離を決められる

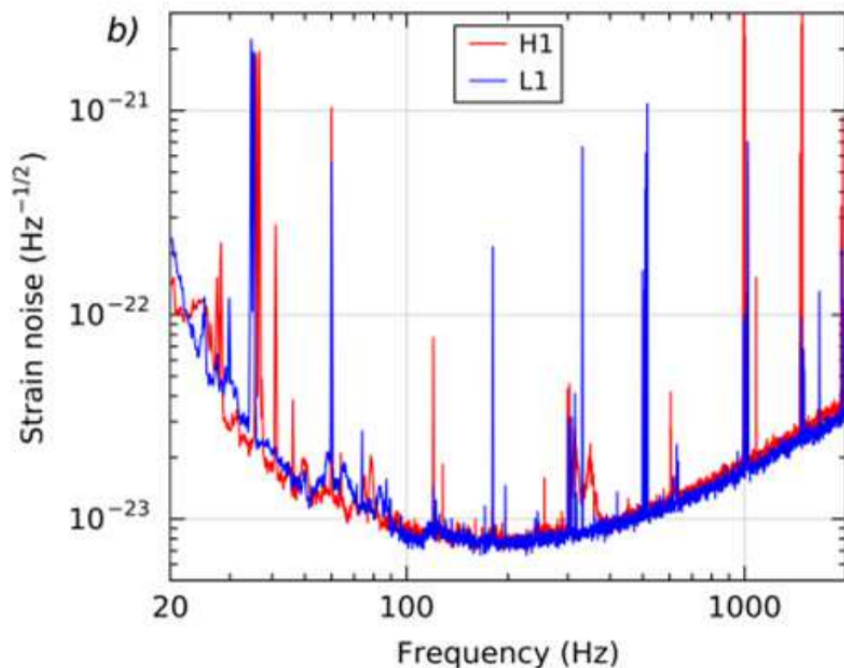
重力波検出の意義と今後の研究の方向

- 本当に重力波が世界で初めて検出された
 - 一般相対性理論が本当にそこまで正しいことの完全な証明 (線型の範囲で正しい代替理論はすべて否定されたといっている)
 - より精密な重力理論、ブラックホールの性質の研究への道 (スピン、電荷の影響他)
- **36** 太陽質量と **29** 太陽質量のブラックホール同士の合体だった
 - 全く予想外
 - 見つかると思っていた/見つけようとしていたもの:
連星中性子星の合体

何故予想外だったか？

- 中性子星は多数見つかっている。超新星爆発の後に普通にできる(かに星雲パルサー: **1054**年の超新星爆発でできた)。球状星団**1**つだけでその中に数十から数百個ある。
- 中性子星連星もいくつかは見つかっている。(連星パルサー)
- ブラックホールは**10**太陽質量を確実に超えるものは見つかっていなかった。ブラックホール連星はもちろん見つかっていない。
- なお、**100**万太陽質量を超える大きなブラックホールは多数見つかっている。これらは銀河中心にある。我々の太陽系の中心:**400**万太陽質量のブラックホール。

とはいえ理論的には、、、



LIGO の感度: **100Hz** あたり
で最も高い
今回のイベントはちょうどそ
の辺
イベントの重力波強度: 距離が
同じなら質量に比例。

宇宙の体積あたりのイベントレートが同じなら、(感度が落ちない範囲で) 重いものは質量の**3**乗に比例して検出レート上がる。ブラックホール合体が多いわけではない。中性子星合体の**1/1000**より多い、という程度。

170817 のイベントで、めでたく中性子星(少なくとも一方は)の合体が観測された。重力波だけでなく、ガンマ線、光、電波等でも。

これから期待されること

- 非常に沢山のイベントが検出される。特に **LIGO** の感度があがると増える。
- 観測される質量の上限: **100-200** 太陽質量。そこから上は **LIGO** は感度がない。
- 中性子星合体もそこそこの数検出されるはず

つまり: (**200** 太陽質量以下に限ると) 宇宙のどこでいつどういう質量のブラックホールや中性子星が合体したか、が大体わかる。

言い換えると:

メカニズムも距離も謎なガンマ線バーストや、**Kepler** 衛星まで数が少なかった系外惑星に比べると、突然膨大な観測情報がやってくる。