宇宙惑星科学

牧野淳一郎

惑星学専攻

評価等

- 小テスト (初回はなし) (レポートはなし)

講義概要

1. ビッグバン宇宙論: **2** コマ分くらい
2. 天体形成 (主に銀河): **2** コマ分くらい
3. 星形成・進化、惑星形成: **3** コマ分くらい

講義の目的

- 惑星形成を、宇宙における階層的構造形成全体の中で理解する
- 同時に、惑星形成研究を天文学・天体物理学研究の中で位置付ける
- そのために宇宙の始まり、銀河等の天体形成、星形成、惑星形成の順にトップダウンで話を進める

ビッグバン宇宙論

- 宇宙論の歴史
- 現在の描像
- 残っている問題
  - インフレーション
  - ダークマター
  - ダークエネルギー

天体形成

- 大規模構造・重力不安定 (ジーンズ不安定)
- 重力熱力学的不安定
- 円盤構造、軸対称不安定、スパイラルモード
- 銀河形成
- 銀河と太陽

星形成と惑星形成

- 星形成
  - 星形成を考えるいくつかの立場
  - 初代星
- 恒星進化
  - 星の一生
  - 中性子星・ブラックホール・重力波
- 惑星形成の標準ないし京都/林モデル
  - **minimum solar nebula model**
  - シナリオ紹介
  - 理論的問題
  - わかっていないこと

事務連絡

今日は講義のおわりに小テストはありません。前回の提出者の学生番号のリストは **Web** に あるので、もしも自分はだしたはずなのに番号ない、という人は牧野まで。講義のあとでもメイル（ **jmakino -at- people...**）でも。

なにが問題か？

銀河とか星団とかはそもそもどうしてそこにあるのか？

それらは安定なのか？

どうやってできたのか？

というようなことが問題。

銀河等はどうやってできたか？

- 宇宙全体は一様に膨張しているとすると、惑星とか、太陽とか、銀河はどうやってできたのか？
- 銀河は重力で星が集まっているだけなのにどうして潰れてしまわないのか？

という問題。

まず、どうしてそれら、とりあえず銀河とか、ができたのか？ということ。

重力不安定による揺らぎの成長

宇宙全体としては、(非常に大きなスケールでは) 一様で密度一定であるとしても、小さなスケールになると揺らぎのために一様からずれている。

宇宙が熱い火の玉から現在まで膨張する過程で、その揺らぎが自分自身の重力のために成長して、ものが集まってできるのが銀河とか銀河団ということになる。つまりは、ニュートンが最初に心配した、「星が落ちてくるのではないか」という問題に対する答は、「おちてきちゃってる」というもの。

では、銀河はどうやって形を保っているか？

宇宙はなにからできているか

(復習)

そのへんにある普通の物質：バリオン（陽子、中性子）＋電子でできている。

宇宙のバリオンのほとんどは水素原子のまま（ビッグバンの最初にヘリウムやリチウムが少しできて、あとは星のなか、特に超新星爆発の時にもっと重い元素が核反応で作られる)

ダークマター

見えるバリオンの量（星と、あとは電波や X 線でみえる水素ガスの量）: 例えば銀河系の質量や、銀河団の質量のほんの一部でしかない。

銀河：回転曲線

銀河団：X 線ガスの温度から質量を推定

- 重力の理論が間違っている？
- なんだかわからないものがある？

ダークマター

どちらが本当かというのは簡単にはいえないわけだが、今のところ「なんだかわからないものがある」というほうが主流。

これはいろいろな状況証拠があるが、（僕の意見としては）大きいのは重力理論が違うことにした時に、銀河毎に重力理論が違うというわけにはいかない（統一的な説明があるはず）とすると説明が難しいということ。

現在の宇宙に対する我々の基本的な理解とその「検証」

- 宇宙の物質のほとんどは、偉そうにいえば「未知の素粒子」、わかりやすくいえばなんだかわからないものである。
- 宇宙は全体としては一様だが、揺らぎがあって完全に一様なわけではない。宇宙膨張の間にその揺らぎが成長して銀河とか銀河団ができてきた。

こういった理解が正しいかどうか：本当にこういうやり方で現在の宇宙の構造ができるかどうかを計算機シミュレーションで調べることである程度はチェックできる。

宇宙の大規模構造形成のシミュレーション

計算の 1 例（現在千葉大准教授・石山さん提供）

ここでやっていること：

- 基本的には「一様」な宇宙を、なるべく沢山の粒子で表現する
- 理論的に「こう」と思われる揺らぎを与える
- 理論的に「こう」と思われる初期の膨張速度を与える
- あとは各粒子の軌道を数値的に積分していく。基本的には太陽系の時と同じこと

わかること

- 宇宙全体としては膨張していく
- 最初に密度が高いところは、他に比べて相対的に密度がどんどん大きくなっていく。
- 特に密度が高いところは、そのうちに膨張しきって潰れ出す。
- （このシミュレーションでは）最初に小さいものが沢山できて、それらがだんだん集まって大きなものになる
- 大雑把にいうと、銀河とか銀河団はこのようにして潰れたもの。

宇宙論の問題としては：

- 観測される銀河や銀河団の性質、特に分布
- シミュレーションでできた銀河や銀河団の分布

を比べて、「どうすれば現在の宇宙ができるか」を決めることで、「宇宙の始まりはどうだったか」を逆に決めたい。

例えば宇宙の膨張速度、密度、宇宙項、 初めの揺らぎの性質、 ダークマターの性質

それは上手く決められる問題か？

つまり,,,

- 宇宙初期の揺らぎ：(銀河や銀河団になる細かいところまでは）直接には見えない
- 昔の宇宙の膨張速度：直接には見えない
- ダークマター：見えるかどうか（あるかどうかも）わからない

これらを、全部同時に銀河の観測から決めたい。

そんなことは可能か? という問題。

問題点

シミュレーションで出来るのは、本来はダークマターの分布だけ。

銀河になるにはそのなかでガスが収縮して星にならないといけない。

つまり、どういう条件で星ができるかが決まらないと本当には比べられない

- 銀河の数が変わる（合体するとか）
- 銀河の明るさが変わる（若い星があると明るい。古くなると暗くなる）

原理的には

- こういった問題点の解決: 「ガスが収縮して星になる」ところも全部シミュレーションすればいい
- そういう方向の研究ももちろん進められている
- が、まだ、シミュレーションの信頼性その他に問題が、、、

シミュレーションの例

話を戻して、、、

なぜ銀河は潰れないか？

太陽系 太陽が圧倒的に重い — $\mathbf{2}$ 体問題+摂動

一般の $\mathbf{3}$ 体問題：不安定

安定（最終）状態：$\mathbf{2}$ 体の連星 ＋ もう一つ（無限遠に飛ばされる）

銀河ではなにが起きるか？

銀河の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x, v)$： 6 次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x, v)dxdv$ がある「体積」 $dxdv$ の中の星の数を与えるとする。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\Phi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{\Phi}$ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\Phi} = -4\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{G} \boldsymbol{\rho}. \tag{2}$$

ここで、 $\boldsymbol{G}$ は重力定数である。

分布関数の従う方程式（続き）

$\boldsymbol{\rho}$ は空間での質量密度

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{m} \int \boldsymbol{dv f}, \tag{3}$$

である。

この書き換えは難しいことではないんだけど、「面倒臭い」ので導出はここでは省略。

力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがありえる（一般にいつでもそうというわけではもちろんない）

これを「力学平衡状態」という。

銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態にいくのか？

はよくわからない.

なぜ力学平衡にいくのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態にいく。

（但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、）

前に見せた銀河形成のシミュレーションはその一例。

ジーンズ不安定

良く考えると、宇宙膨張と構造形成の関係はあんまり簡単ではない。

- ビッグバン直後の宇宙は熱平衡、一様密度
- 今の宇宙は全く一様ではない (少なくとも「小さな」スケールでは。メガパーセクとか)
- 理論的にはどうやって一様でなくなったか？

理解する枠組み: 重力不安定 (ジーンズ不安定)

ジーンズ不安定(続き)

- 「理論的」枠組み:大抵、摂動論 (解けるものからの無限小のずれを扱う)
- ここでもそういう話
- で、ダークマター (無衝突ボルツマン方程式に従う) だと面倒なので断熱のガスで考える (あとで述べるが、安定性条件は同じになる)

流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\rho v}) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{t}} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\nabla p} - \boldsymbol{\nabla \Phi} \tag{5}$$

ポアソン方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{4\pi G\rho} \tag{6}$$

で記述される。

さらに状態方程式がいる。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいい)

記号のリスト

$\boldsymbol{\rho}$**:** 密度

$\boldsymbol{t}$**:** 時間

$\boldsymbol{v}$**:** 速度

$\boldsymbol{p}$**:** 圧力

$\boldsymbol{\Phi}$**:** 重力ポテンシャル

$\boldsymbol{G}$**:** 重力定数

線型化

- 平衡状態からの無限小のずれの変化を見るため、ベースの解とずれの部分にわける。
- $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Phi}$ をそれぞれ $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{1}}$ という格好
- 添字 $\mathbf{0}$ がつくものはもとの方程式の平衡解であり、 $\mathbf{1}$ がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）とする。

で、方程式を書き直す。

線型化した方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\rho}_0 \boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 \boldsymbol{v}_0) = \mathbf{0} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial \boldsymbol{t}} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{\rho}_1}{\boldsymbol{\rho}_0^2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{p}_0 - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}_0}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Phi}_1 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\Phi}_1 = 4\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{G} \boldsymbol{\rho}_1 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{p}_1 = \left(\frac{\boldsymbol{dp}}{\boldsymbol{d\rho}}\right)_0 \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{v}_s^2 \boldsymbol{\rho}_1 \tag{10}$$

ここで $\boldsymbol{v}_s$ は音速である。

ベースが無限一様の場合

ベースは無限一様でいたるところ密度、圧力が等しく、速度も $\mathbf{0}$ とすると、連続の式とオイラー方程式が

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho_1}}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\rho_0 v_1}) = \mathbf{0} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v_1}}{\partial \boldsymbol{t}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho_0}} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\Phi_1} \tag{12}$$

となる。下 $\mathbf{2}$ 本は見かけはかわらない。

これを、 $\boldsymbol{\rho_1}$ だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho_1}}{\partial \boldsymbol{t^2}} - \boldsymbol{v_s^2} \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\rho_1} - \mathbf{4} \boldsymbol{\pi G \rho_0 \rho_1} = \mathbf{0} \tag{13}$$

この方程式の振舞いは？

- 最初の $\mathbf{2}$ 項をみれば普通の波動方程式、
- 最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。
- 波長が短い極限では普通の波動方程式
- 波長が長い極限では空間２階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

分散関係(空間波長と時間振動数の関係)を求める

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\boldsymbol{\rho_1 = Ce^{i(\mathrm{k}\cdot x - \omega t)}} \tag{14}$$

として代入すれば

$$\boldsymbol{\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0} \tag{15}$$

ということになる。したがって、

$$\boldsymbol{k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2}} \tag{16}$$

と書くことにする。

分散関係

- $\boldsymbol{k > k_J}$ なら $\boldsymbol{\omega}$ は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $\boldsymbol{k = k_J}$ なら $\boldsymbol{\omega = 0}$ で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $\boldsymbol{k < k_J}$ なら $\boldsymbol{\omega}$ は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

なお、一応念のために書いておくと、式 $(\mathbf{14})$ の形の解だけを考えるのは任意の初期条件からの解が（連続性とかを仮定すれば）この形の解の線形結合で表現できるからである。解の線形結合が解であるのは方程式が線形だからであり、任意の解が表現できるのは要するにフーリエ変換が完全系をなすからである。

分散関係からいえること

- 波長が短ければ普通の音波
- 波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化
- つまり、長い波長のモードは密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）

いいかえると

- 十分に波長が長いと必ず不安定になる
- 重力があると無限に一様な状態というのは温度無限大でない限り必ず不安定

ジーンズ波長

$\boldsymbol{k_J}$ に対応する波長: ジーンズ波長 $\boldsymbol{\lambda_J}$

$$\boldsymbol{\lambda_J} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{G\rho_0}}}\boldsymbol{v_s} \tag{17}$$

ジーンズ波長くらいの半径の球を考えると、

- 運動エネルギー: $\boldsymbol{M_J v_s^2}$ の程度
- 重力エネルギーは $\boldsymbol{G M_J^2/\lambda_J}$ の程度、
- $\boldsymbol{M_J}$ はジーンズ質量で (半径 $\boldsymbol{\lambda_J}$ の球の質量)

計算すると、運動エネルギーと重力エネルギーが大体等しい。
ジーンズ波長はそういう長さ。

ここまでの解析でごまかしたところ

- 一様密度の物質があれば、ポアソン方程式の右辺が $\mathbf{0}$ じゃないから重力ポテンシャルは一様な値というのは何かおかしい
- が、一様で無限にひろがっているなら、重力ポテンシャルが場所によって違うのも何か変

宇宙全体の場合: 宇宙膨張に対して不変な座標系 (共動座標という) で方程式を書き換えるとこの問題は解消。但し、時間変換がはいるので、時間の指数関数的にはならない。

初期条件と力学平衡の状態の関係

あまり役に立つことはわかっていない。初期条件と最終状態の間の関係をいろいろ調べている段階。

このへんは、基本的には前にいった数値計算でやられる。

- **1996** 年頃に、宇宙論で考えるような初期条件の範囲内ではいろいろパラメータを変えてもできるものはみんな同じであるというシミュレーション結果が出た。
- が、この結果は実は間違い であったことが、より大規模なシミュレーションからわかった。

というわけで、わかっていない問題は非常に多い。

もう一つ大きな問題

星の数は実際には無限大というわけではない。

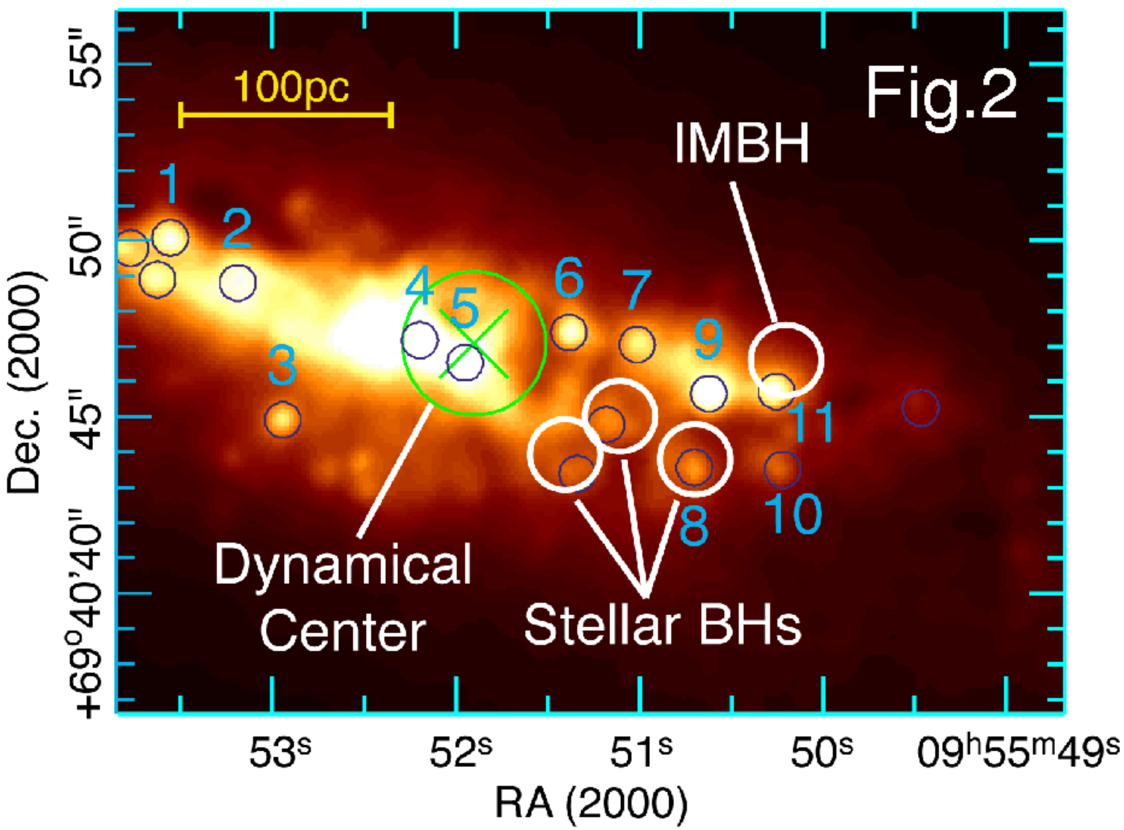
銀河： $\mathbf{10^{10}}$ かなり多い、

散開星団、球状星団 $\mathbf{10^{4\sim6}}$

銀河中心 巨大ブラックホール$+\mathbf{10^{7}}$個程度の星

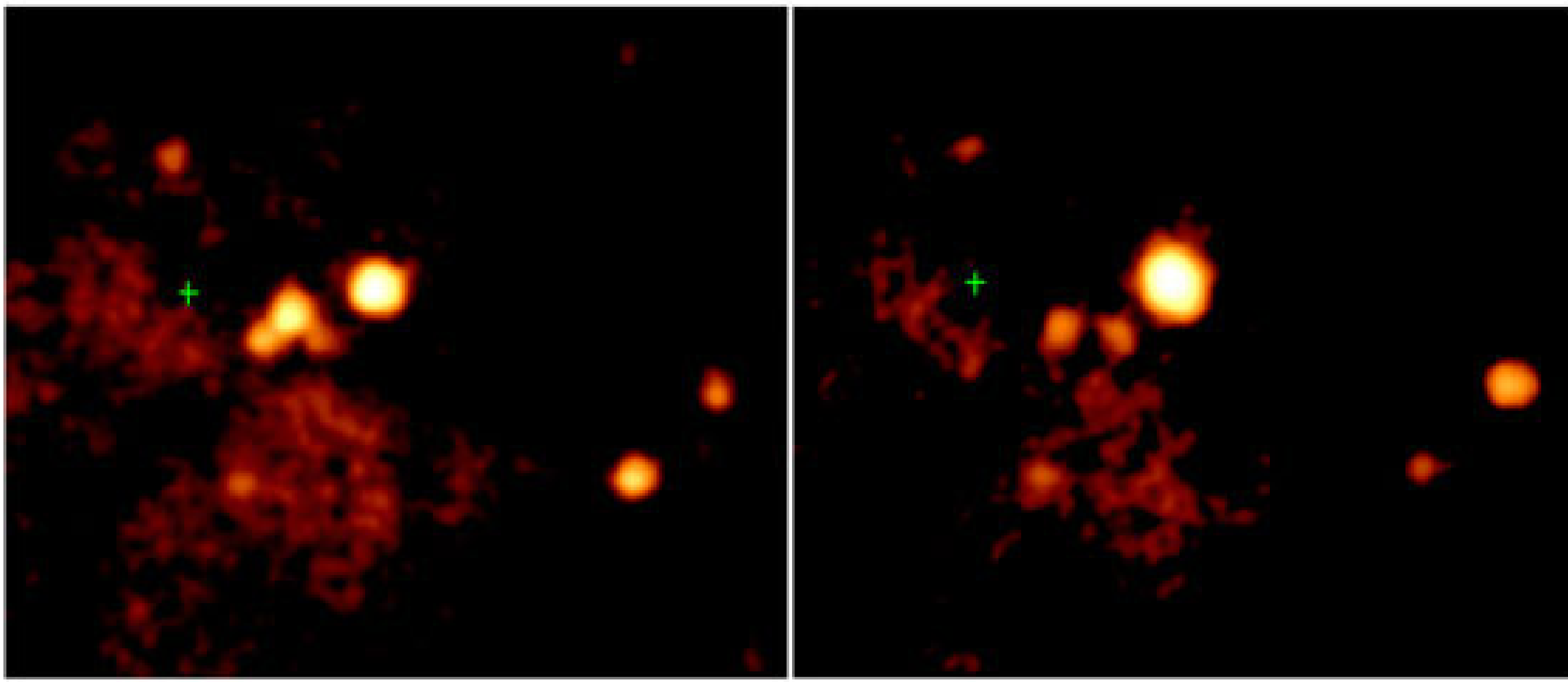
こういったところではどういうことが起きるか

銀河中心



近傍の銀河 M82 の中心部の「すばる」望遠鏡による写真

X線では



NASA Chandra X線衛星による写真

こういったところではいったい何がおきているか？

無限には星が多くない時

厳密には力学平衡にない

→ それぞれの星の軌道はだんだん変わっていく

物理的には「多数の粒子が相互作用する系」

→ 統計力学的（熱力学的）に振舞うはず

つまり：熱平衡状態（エントロピー最大）にむかって進化するはず。

（普通の気体なんかと同じ）

普通の気体との違い

- 重力のエネルギーは質量の 2 乗に比例
- 粒子を閉じ込めておく箱（境界）があるわけではない

2 つ違うとよくわからないので、違いを一つにしてみる。

具体的には：仮想的に球形の断熱壁でかこんだなかの理想気体を考える。

重力の効果があるくらい大きいもの。

星の集団とガスは違うのでは？という気もするが、熱平衡状態であれば分布関数は同じなのでまあいいかも。

断熱壁の中の理想気体

温度（熱エネルギー）が重力エネルギーよりもずっと大きい状態

これはもちろん重力がない時と変わらない

温度を段々下げていく（エネルギーを抜いていく）
↓
重力の効果が出てくる。

具体的には、中心の密度が上がって、壁のところが下がる。これは、重力と圧力勾配を釣り合わせるため。地球の大気が上にいくほど薄くなるのと同じ。

方程式と解析解

球対称な壁の中の、等温熱平衡なガスの方程式はこんなふう。

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\boldsymbol{M}} = -\frac{\boldsymbol{M}}{4\boldsymbol{\pi r}^4}, \tag{18}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{M}} = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi r}^2\boldsymbol{\rho}}, \tag{19}$$

$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ は半径 $\boldsymbol{r}$ の中の質量、$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{\rho}$ は圧力と密度、ここでは重力定数が $\mathbf{1}$ になるような単位系だとする。

方程式と解析解(続き)

座標系のとりかたが普通ではないが、恒星内部構造論では質量を座標にとる慣習がある。下の式は逆数とれば普通の式、上の式は

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho M}{r^2} \tag{20}$$

で、圧力変化が重力と釣り合う、という式である。温度は、状態方程式

$$p = \rho T \tag{21}$$

方程式と解析解 (3)

- 一般の境界条件で解析解があるわけではないが、$\boldsymbol{\rho} \propto \boldsymbol{r}^{-2}$ の形の解はある。(代入すれば解であることがわかる)
- 壁をつけた人工的な条件ではこの解は存在できるが、「自己重力系」としては存在できない (質量が無限大になる)
- 中心で有限密度の解も、$\boldsymbol{r} \rightarrow \infty$ の極限では解析解に漸近する
- そういう、解の系列を考える。

解の系列

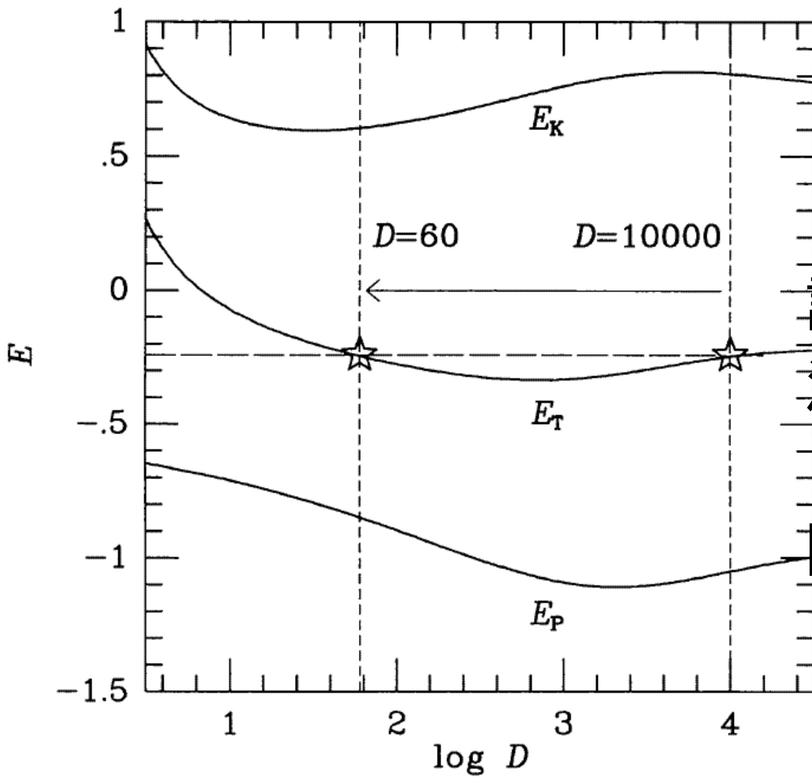
- 物理的にしたいこと:あるる質量のガスをある半径の球形の壁にいれて、段々温度を下げていく。そうすると、重力の効果が大きくなってきて中心と壁の密度比 (**D** とする) が大きくなる

- 計算機でこの解を求めるには:中心で適当な密度から始めて、外側にむかって積分していく。任意のとこである **D** の解が求まる。これを、質量、半径を (例えば) **1** になるようにスケール変換して、温度もあわせる。

スケール変換

- 半径 r, 質量 m, 温度 t の解があったとする。$G = 1$ で考える。スケール変換では半径を $1/r$ 倍、質量を $1/m$ 倍するので、重力エネルギーは r/m^2 倍になる。
- 熱エネルギーを同じ比率でスケールすれば、圧力と重力がちゃんと釣り合う解になっているはずである (ビリアル定理からくる要請) ので、温度は t/m 倍すればいい (はず)
- 始めからエネルギーだけ与えて、壁の中にある、という境界条件を満たす解を求めようとするとどうすればいいかわからないが、スケール変換すれば求められる。

エネルギーの下限



計算してみるとどこまでも温度を下げられるわけではない。
図に結果を示す。これは横軸に中心と壁の密度の比、縦軸にエネルギーをとったもの

熱平衡状態

$\boldsymbol{D = 709}$ でエネルギーが最小になり、それ以上エネルギーが低い平衡状態はない。

さらに、エネルギーのほうから考えてみると、あるエネルギーに対してそれに対応する平衡状態が $\mathbf{2}$ つ以上あるところがある。

- もっとエネルギーが低い状態は？
- $\boldsymbol{D}$ が大きいところはいったいなにか？

密度比が限界より大きい状態

これは「熱力学的に不安定な平衡状態」になっている。

安定／不安定：ここでは「熱力学的」

温度が一様な平衡状態に、すこし温度差をつけてやる（熱エネルギーを移動してやる）

- もとに戻る：安定
- 戻らない：不安定

熱力学的安定性

普通の世の中のもの：戻るに決まっている。

熱をもらった方は温度が上がる。

とられたほうは温度が下がる。

熱い方から冷たい方に熱がながれるので、元に戻る。

ところが､､､重力が効いているとそうなるとは限らない。

熱力学的不安定性

条件によっては以下のようなことが起こる

中心部から熱を奪う → 温度／圧力が下がる → 圧力を釣り合わせるために収縮 → 重力が強くなる → もっと収縮 → 結果として温度が上がる。

これが起きると、熱を奪われた方が温度が上がるので、ますます熱が流れだし、いっそう温度が上がるという循環にはいる。

これを、「重力熱力学的不安定性」という。

どうやって安定性を調べるか

「重力熱力学的不安定性」:

計算機によって安定性を調べることで初めて発見されたもの。

「計算機で安定性を調べる」というのはそもそもどういうことかという原理的な話をすこしだけしておく。

安定性解析の原理

ここで問題なのは適当な偏微分方程式（系）

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \tag{22}$$

ここで、 $\boldsymbol{A}$ は「汎関数」(関数に作用する「関数」)。具体的には、例えば普通の熱伝導なら $\boldsymbol{f}$ の空間 $\boldsymbol{2}$ 階微分。$\boldsymbol{f}$ は例えば温度。

の定常解 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x})$ があったとする。

定義により $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$

少しずれた $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{df}$ 、$\boldsymbol{df}$ の方程式を作る。

線形化 (1)

df に何か入れればそれがどうなるかが計算できる

あらゆる可能な df について調べる？

そんなことがどうやってできるか？

これを可能にする方法が線形化して固有値問題にするということ。

線形化 (2)

仮定: $\boldsymbol{df}$ が $\boldsymbol{f_0}$ よりもずっと小さい

$\boldsymbol{df}$ について線形な式にできる。

線形:

$$\frac{\partial \boldsymbol{df}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x})) \tag{23}$$

という形だったとして、$\boldsymbol{B}$ が線型とは

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha df_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\beta df_2}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\alpha B}(\boldsymbol{df_1}(\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{\beta B}(\boldsymbol{df_2}(\boldsymbol{x})) \tag{24}$$

という性質を満たすということ。

線形化 $(\mathbf{3})$

もうちょっとわかりやすくいうと、

$\boldsymbol{df_1}$ が解なら $\boldsymbol{df_1}$ の定数倍も解

$\boldsymbol{df_1}, \boldsymbol{df_2}$ が解なら $\boldsymbol{df_1} + \boldsymbol{df_2}$ も解

ということ。

固有関数

このように線形な方程式には、固有値、固有関数というものがある。

固有関数は、

$$\boldsymbol{\lambda df} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{df}) \tag{25}$$

の解。$\boldsymbol{\lambda}$ が固有値。

この時、時間発展が $\boldsymbol{df} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda t}}\boldsymbol{df_0}$ の形に書ける。

一般には任意の関数が固有関数の重ね合わせで書けるので、これら固有関数だけを調べればいいことになる。

固有値と安定性

これの解（固有関数）は一般には無限個ある。

対応する固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ も無限個ある。

「もっとも大きい固有値」から順に求めるような計算方法があるので、求まった最大の固有値が負（実数部分が）であれば安定ということになる。

もうちょっと具体的な計算法

まず f_0 自体が必要。

空間も細かい刻みにわけて、その各点での値を近似的に計算する。

出てくるのは連立方程式になる。これを計算機を使って解く。

f_0 が求まると、それを使って df についての方程式を具体的に書ける。

df についての方程式

これもやっぱり連立方程式になるが、線形であることから連立一次方程式になる。つまり行列でかける。

この行列の固有値、固有ベクトルを求めると、元の問題の固有値、固有関数の近似値になっている。

と、なんかややこしいが、計算機で安定性を調べるという時ににはだいたいどんな分野でも同じようなことが出てくるので、ちょっと詳しく書いてみた。

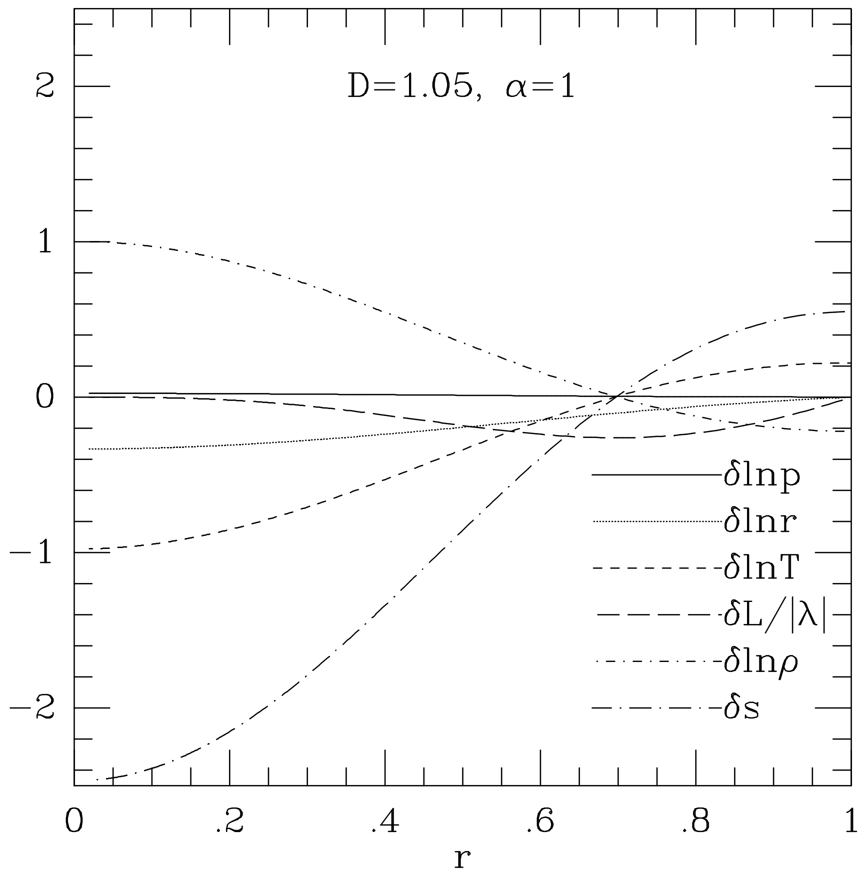
ジーンズ不安定の場合

先週扱ったジーンズ不安定は計算機とかつかわないで答がでた。何故？

- 平衡状態の解に「無限一様」をもってきた
- そうすると、線型摂動に対する偏微分方程式が定数係数になる。
- 変数分離で解ける。「全ての」固有値が解析的にもとまる。

「無限一様」とか「正方形」とか「一様球」とか以外が計算できるようになったのは電子計算機の発達以降。

安定な場合, $D = 1.05$

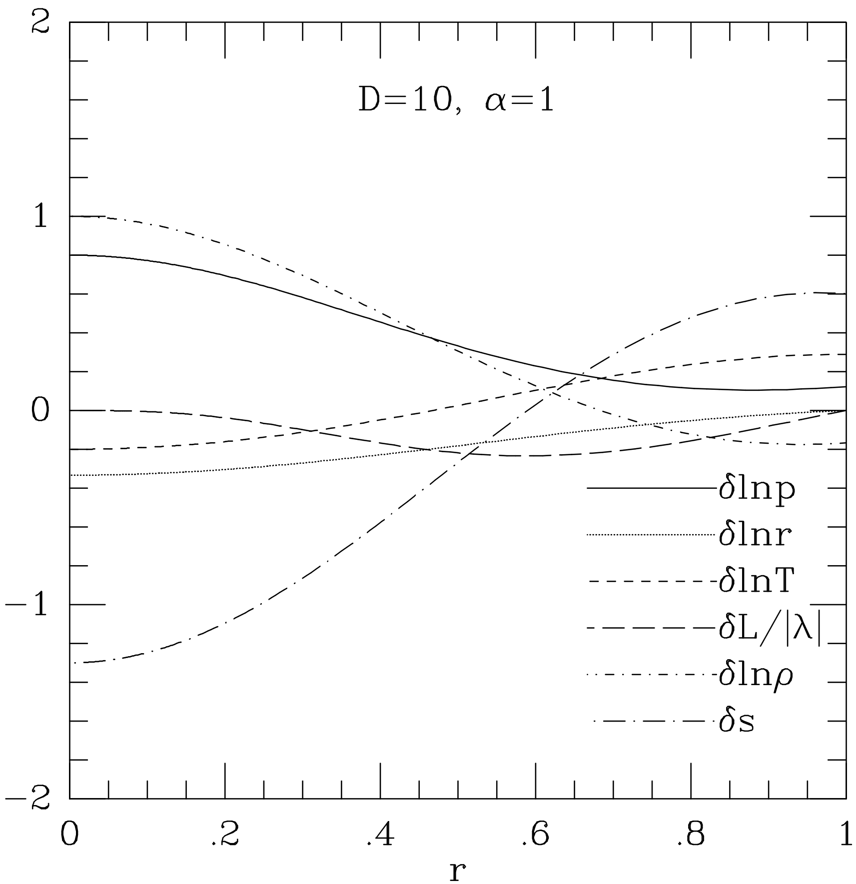


λ: 固有値

- 圧力は変化しない
- エントロピーと温度が比例

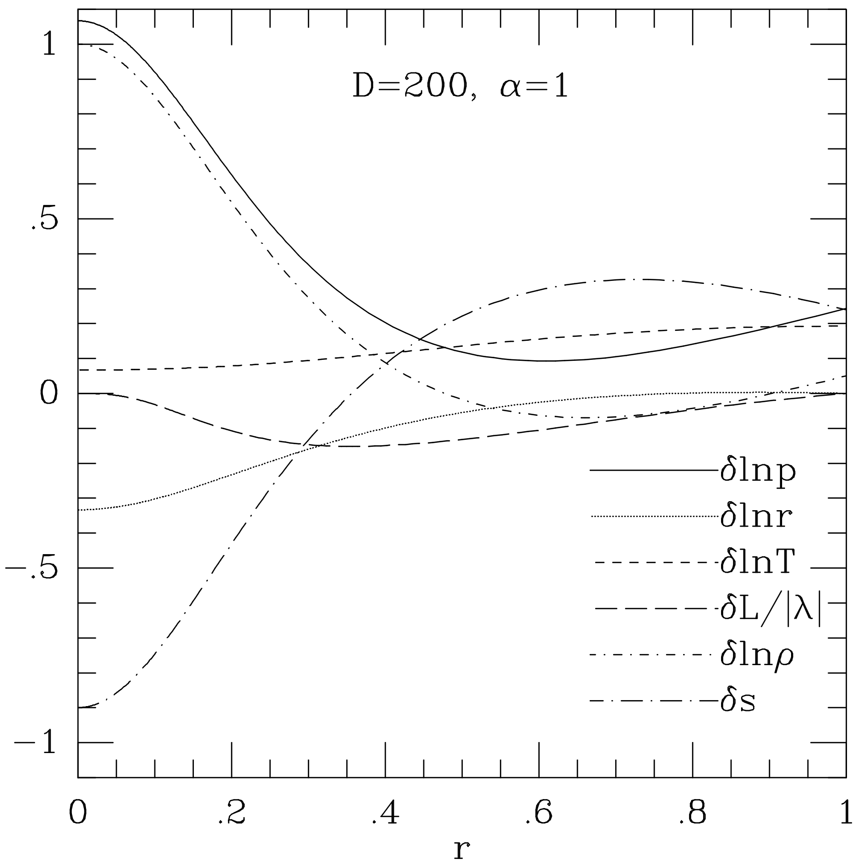
要するに、普通の断熱容器のなかのガス。

安定な場合(2), $D = 10$



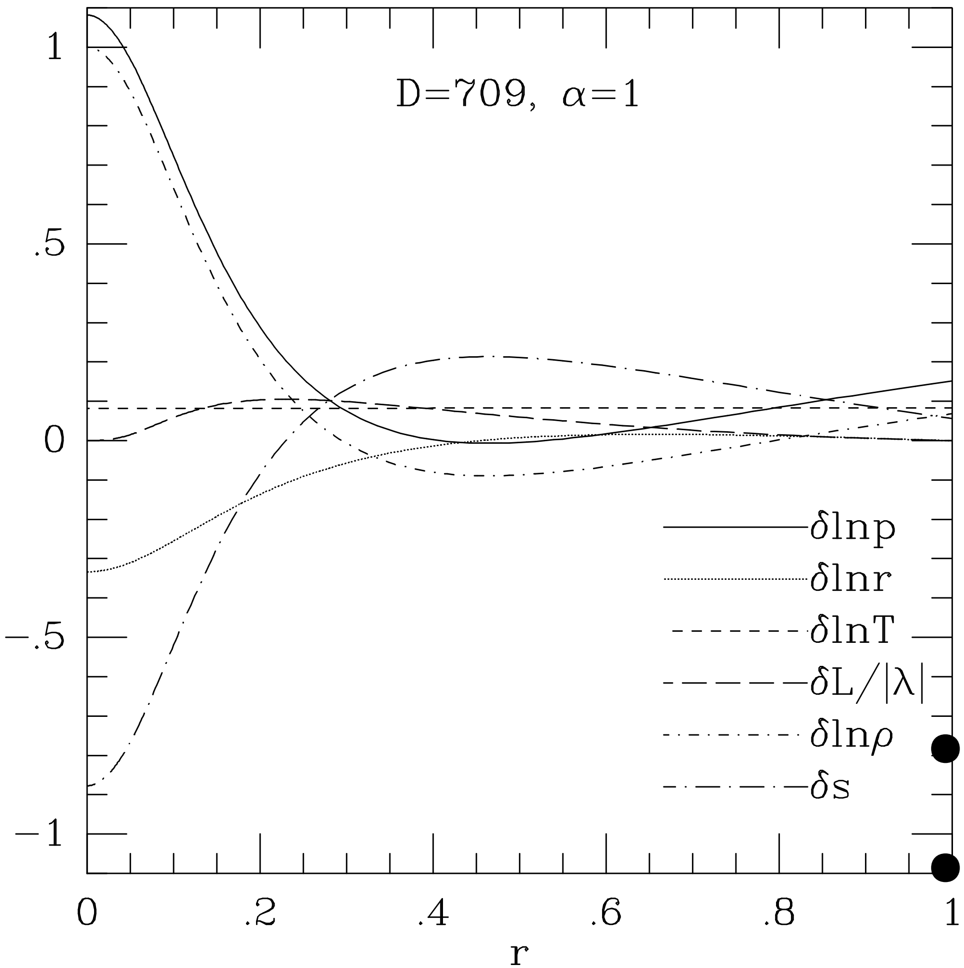
- 中心で圧力が上がる
- 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

安定な場合(3), $D = 100$



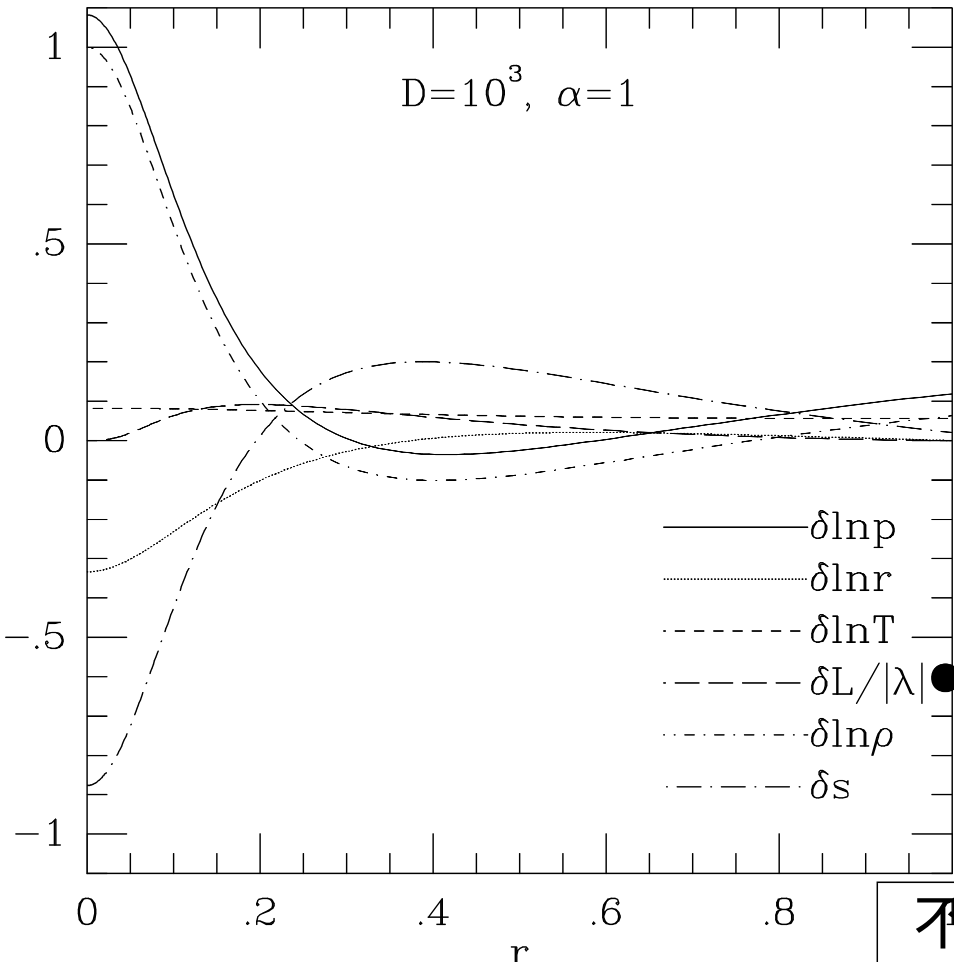
- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き（この場合中心の方が低温）
- 熱力学的には安定

中立安定, $\boldsymbol{D = 709}$



- 温度勾配ができない
- したがって、摂動がもとに戻らない

不安定, $\boldsymbol{D = 1000}$



- 中心のほうが温度上昇が大きい

不安定になっている

重力熱力学的不安定性

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

「重力熱力学的不安定性」 **gravothermal instability** という名前がついている。

発見： **V. Antnov (1961)**

上のような安定性の明確な定式化: **Hachisu & Sugimoto (1978)**

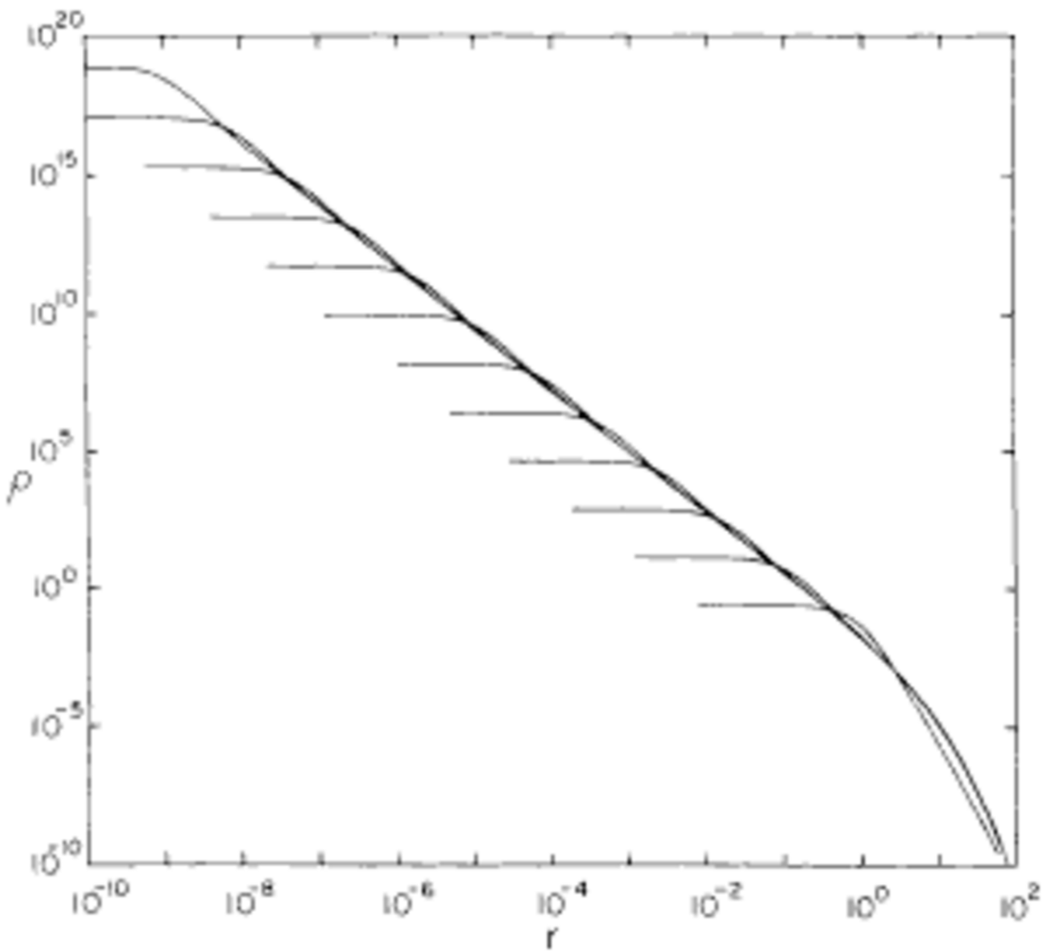
もっと先の進化

摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

Hachisu *et al.* **(1978)**： 自己重力流体について数値計算した。

Cohn (1980): 流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。

自己相似解



10^{20}
10^{15}
10^{10}
10^{5}
ρ
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
r

最終状態？

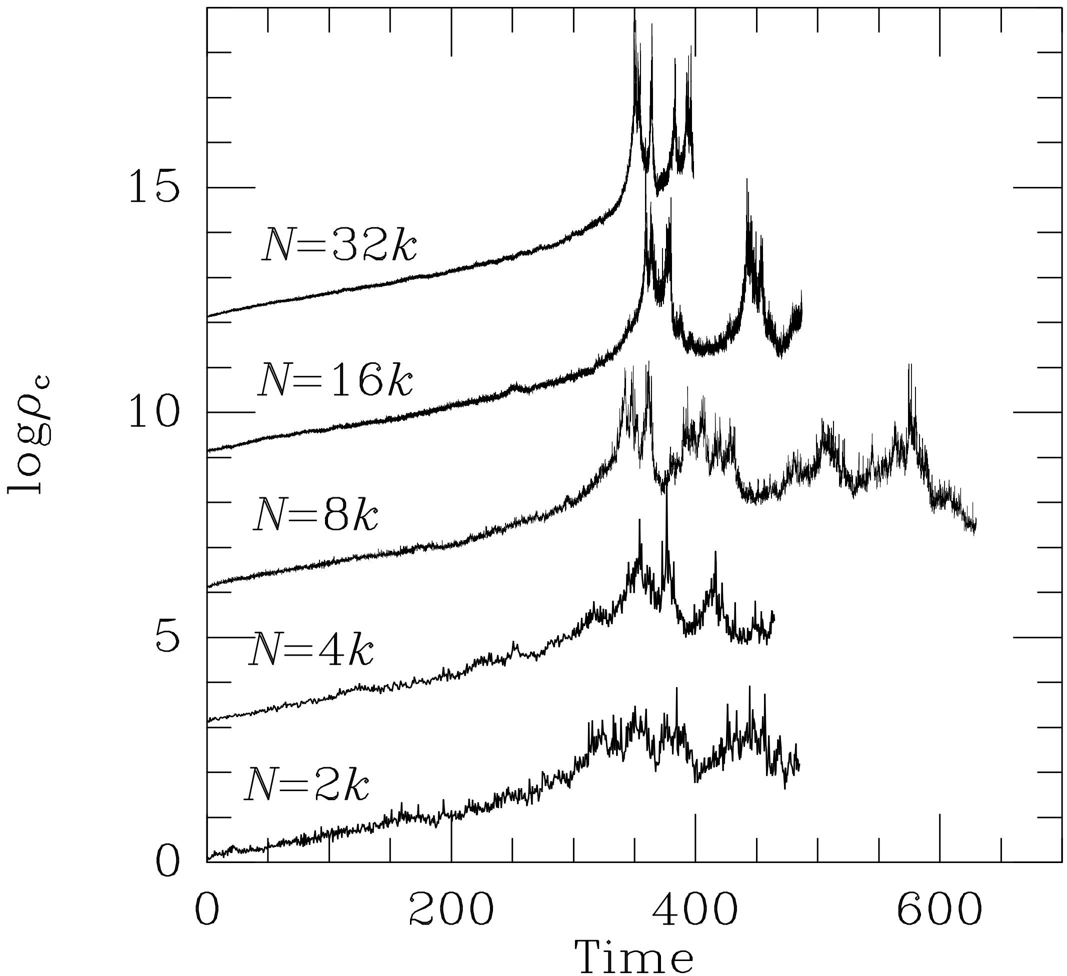
中心部の密度が非常に上がってくると､､

- 星同士の近接遭遇
- 3 星が同時に近付く

連星ができる。これは「エネルギー放出反応」（核融合と同じ）

これにより、今度は中心部が膨張を始めると理論的には予測されている（重力熱力学的振動）

重力熱力学的振動



球状星団の中心部ではこのようなことが起こっている可能性が高い。

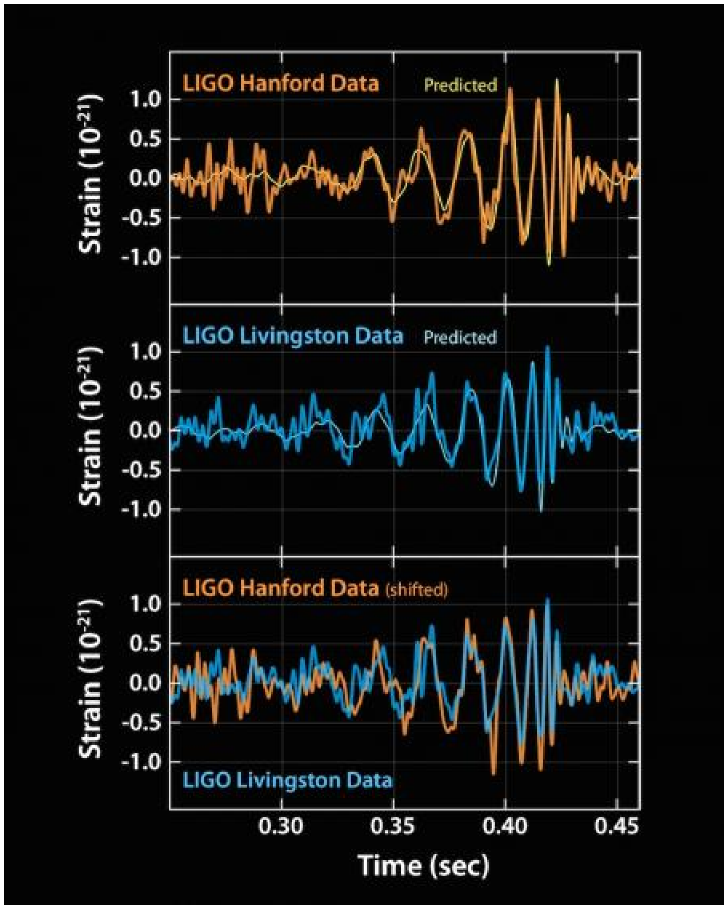
球状星団中心の天文学的意義

- 多数の連星が形成される。
- 熱力学的進化: 重い星は星団中心に沈む
- ブラックホールや中性子星の連星が多数形成される場所である可能性
- 低質量 X 線連星やミリ秒パルサーは実際に多数見つかっている
- 重力波も検出されたのでこれから注目される？

重力波初観測

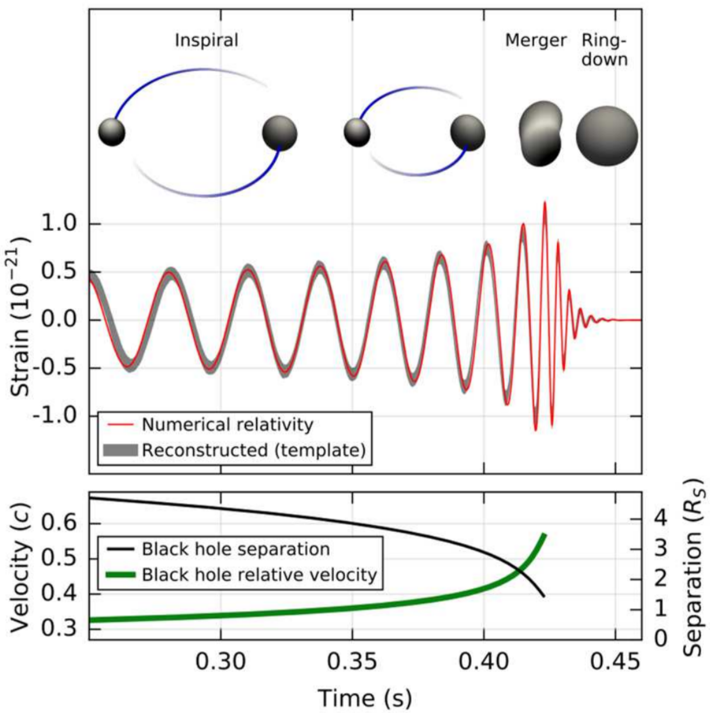
- 去年の **2** 月 **11** 日 **10:30** (東海岸時間) **LIGO** グループ発表
  "We have detected gravitational waves. We did it!"
- どこにあるどういう天体だったか
  - **13** 億光年先
  - 太陽質量の **36** 倍のブラックホールと **29** 倍のブラックホールが合体、**62** 倍のブラックホールになった (**3** 太陽質量が重力波のエネルギーになった)

検出された波形



横軸: 時間
縦軸: 歪み(「空間の歪み」)
最大振幅: 10^{-21}
3000km 離れた2つの測定器(基線 4km のマイケルソン・モーレー干渉計)で同じ波形観測

LIGO が捉えたもの



Inspiral: 合体直前、重力波放出によって軌道が近付き、周期が短く、振幅が大きくなる

合体の瞬間: 大振幅、高周波数の波

リングダウン: **1**個のブラックホールになってからの時空の振動

シミュレーションで予測されていたものと非常に良く一致:
逆に合計の質量・質量比、距離を決められる

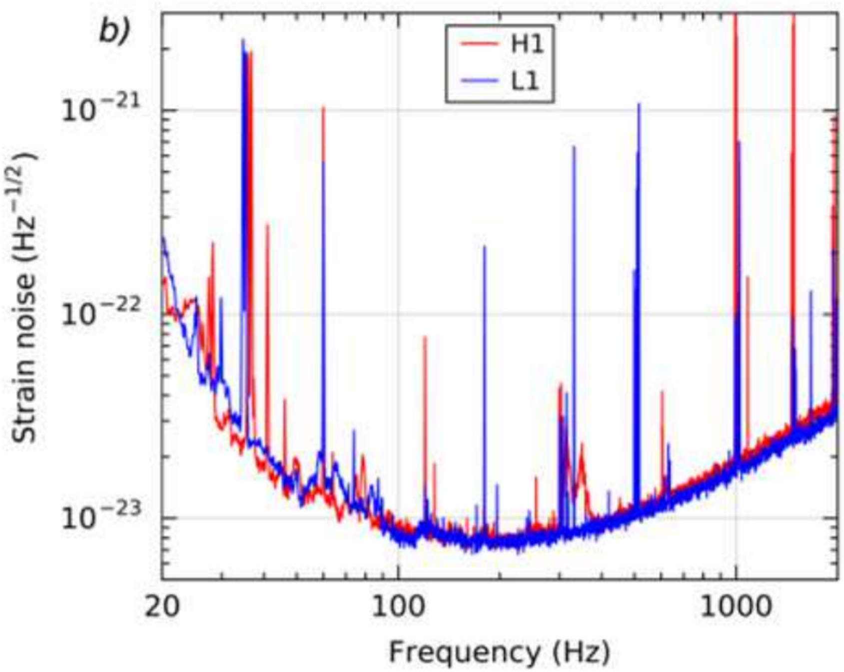
重力波検出の意義と今後の研究の方向

- 本当に重力波が世界で初めて検出された
  - 一般相対性理論が本当にそこまで正しいことの完全な証明 (線型の範囲で正しい代替理論はすべて否定されたといっていい)
  - より精密な重力理論、ブラックホールの性質の研究への道 (スピン、電荷の影響他)
- **36** 太陽質量と **29** 太陽質量のブラックホール同士の合体だった
  - 全く予想外
  - 見つかると思っていた/見つけようとしていたもの:
    連星中性子星の合体

何故予想外だったか？

- 中性子星は多数見つかっている。超新星爆発の後に普通にできる (かに星雲パルサー: **1054** 年の超新星爆発でできた)。球状星団 **1** つだけでその中に数十から数百個ある。
- 中性子星連星もいくつかは見つかっている。(連星パルサー)
- ブラックホールは **10** 太陽質量を確実に超えるものは見つかっていなかった。ブラックホール連星はもちろん見つかっていない。
- なお、**100** 万太陽質量を超える大きなブラックホールは多数見つかっている。これらは銀河中心にある。我々の太陽系の中心:**400** 万太陽質量のブラックホール。

とはいえ理論的には、、、



LIGO の感度: **100Hz** あたりで最も高い
今回のイベントはちょうどその辺
イベントの重力波強度: 距離が同じなら質量に比例。

宇宙の体積あたりのイベントレートが同じなら、(感度が落ちない範囲で) 重いものは質量の **3** 乗に比例して検出レート上がる。ブラックホール合体が多いわけではない。中性子星合体の **1/1000** より多い、という程度。

170817 のイベントで、めでたく中性子星 (少なくとも一方は) の合体が観測された。重力波だけでなく、ガンマ線、光、電波等でも。

これから期待されること

- 非常に沢山のイベントが検出される。特に **LIGO** の感度があがると増える。
- 観測される質量の上限: **100-200** 太陽質量。そこから上は **LIGO** は感度がない。
- 中性子星合体もそこそこの数検出されるはず

つまり: **(200** 太陽質量以下に限ると**)** 宇宙のどこでいつどういう質量のブラックホールや中性子星が合体したか、が大体わかる。

言い換えると:

メカニズムも距離も謎なガンマ線バーストや、**Kepler** 衛星まで数が少なかった系外惑星に比べると、突然膨大な観測情報がやってくる。