

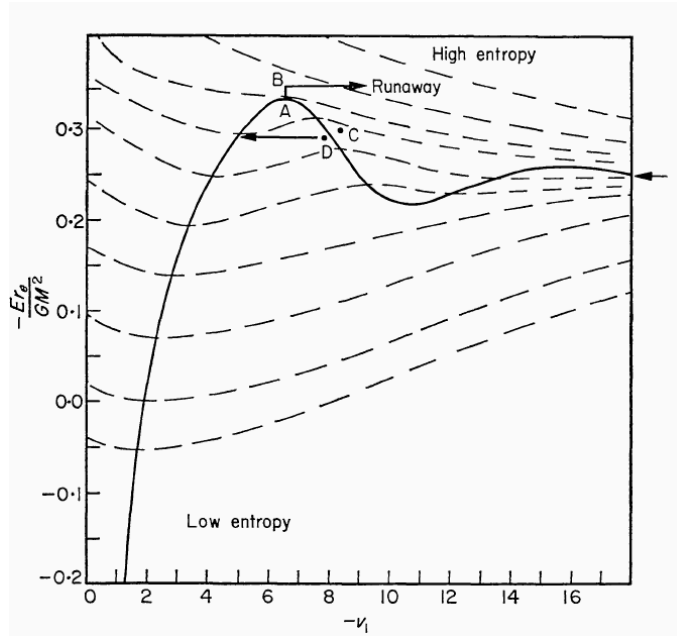
天文学特別講義 IV

牧野淳一郎

1 Linear Series Analysis と関係した話題

ここまでの線形解析は、極めて普通のもの（平衡状態からの摂動の発展の線形解析）を考えてきた。が、これは歴史的には最初にやられたものではない。歴史的には、Linear Series Analysis というもうちょっと簡便な方法が使われてきた。これは一体どういうものか、を Lynden-Bell and Wood (1968, MNRAS 138, 495) に従って見ていく。半径、質量一定の平衡形状の系列を考える。実際に計算するには、等温解をどこか有限の半径で切ったもので、半径、質量等をスケールしなおせばいい。とにかく、これで例えば中心と壁のところの密度比 D をパラメータとして系列ができる。

1.1 系の全エネルギー



図は、横軸は $\ln D$ 、縦軸はエネルギー（符号逆）を書いたものである。 $D = 709$ でエネルギー極小になり、この点が中立安定点に対応し、それよりも大きな D では系は熱力学的に不安定である。

1.2 エネルギー極小と安定性

何故エネルギー極小が中立安定だったり、そこから先が不安定だったりするのか、というのはあんまり自明ではないと思う。原論文の説明も要領を得ない。

一応、中立安定点には以下のような解釈が可能である。

エネルギー極小点: エネルギーを変えないで (断熱的に) D を (微量) 変えることができる。
つまり、系を等温に保つ摂動で、エントロピーを保存して構造を変えるものがある。
つまり、中立安定な摂動がある。

1.3 線型安定性解析との関係

中立安定点では、ゼロ固有値に対応する固有関数は温度勾配を作らないものであった。
従って、中立安定点を探しただけなら、摂動を温度勾配を作らないものに制限してかまわない。
逆に、温度勾配を作らない摂動は、熱平衡状態を熱平衡状態に移すものしかない。
従って、エネルギーを保存して温度勾配を作らない摂動は、エネルギーが極値をとるところにしかない。

と、これはいいけど、中立安定点より先がどうなってるかは linear series analysis では本当は良くわからない。

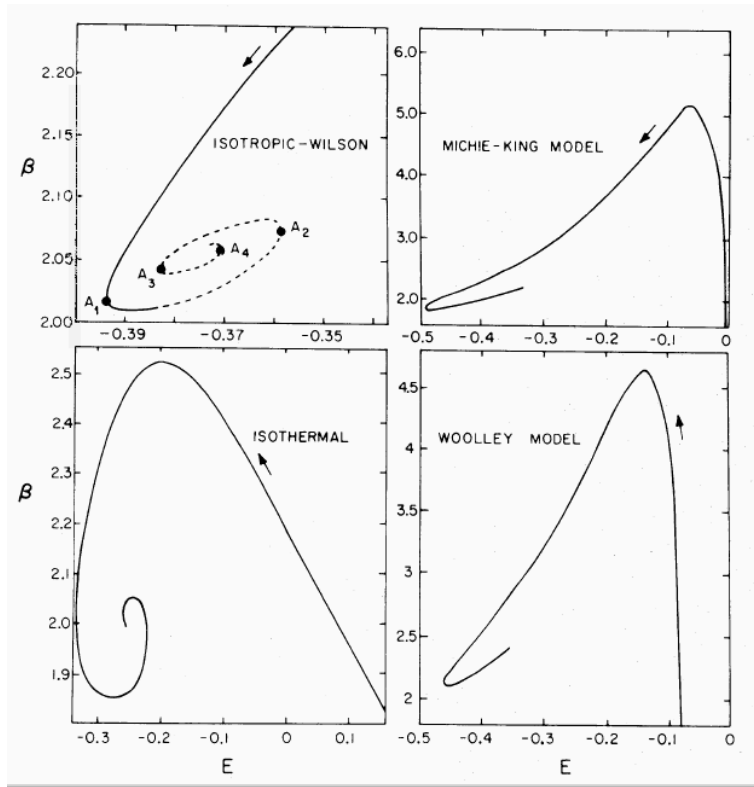
1.4 Linear Series Analysis が危ない例

固有値問題を解くのと違って、Linear Series Analysis は平衡系列を求めるだけでできちゃうので、いろいろな論文が発生する。

- Katz 1980, MNRAS, 190, 497
- Taruya and Sakagami, 2002, Physica A, 307, 185

他にもいろいろあるけど、影響が割合大きいものということで。

1.5 Katz 1980



King model の系列に Linear Series Analysis を適用。

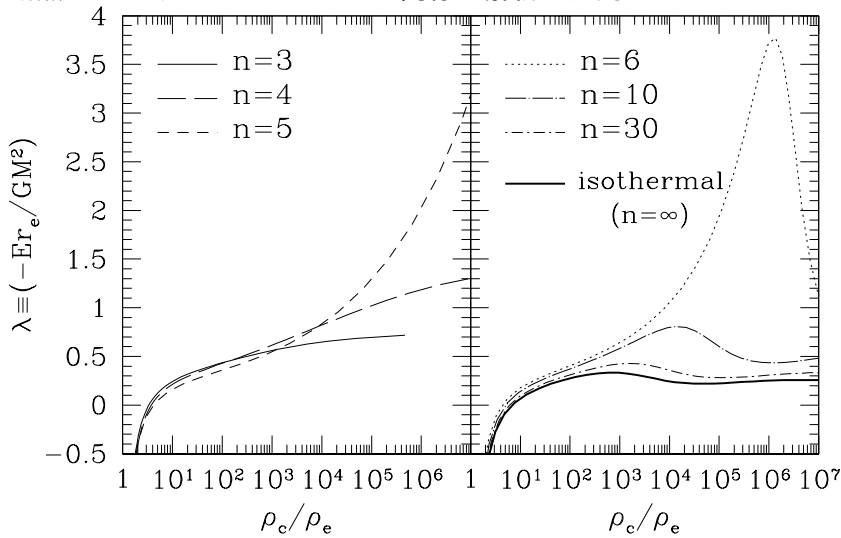
「中立安定点」を「発見」 ($W_0 \sim 12$)

もともと等温平衡解ではないもの:

エネルギー一定の摂動が中立安定に対応するわけではない。

1.6 Taruya & Sakagami 2002

断熱壁をつけたポリトロープに同様な解析を適用



$n \geq 5$ で「不安定性」発見

1.7 Taruya & Sakagami 2002 再考

実際には彼らは単にポリトロープをなんかしたわけではない。

Tsallis エントロピー $(f^q - f)/(q - 1)$

普通のエントロピー $f \ln f$ を $q \rightarrow 1$ の極限として含む、「一般化された」エントロピー。

この極値を取る分布 = ポリトロープ (q と n は対応する)

そういうものを考える意味: 正直に言って「よくわからない」

Tsallis エントロピー極値は熱平衡であるわけではないので、「安定性」に意味があるわけではないのは King model の場合と本質的には同じ。

2 有限振幅での進化

前回は、断熱壁に囲まれた自己重力ガスの熱平衡状態の安定性を検討した。基本的な結論は、重力の寄与が大きくなると、熱平衡状態が不安定になるということであった。

このあとどうなるかということ調べるためには、数値計算をする必要がある。Hachisu *et al.* (1978) は、自己重力流体についてそのような数値計算を行なった。

結果の詳細は省くが、重要なことは、中心から熱をとったときに自己相似解が現れる場合があるということである。

中心に熱を与えると、中心は温度を下げつつ膨張する。このときは、結局最終的には安定平衡になってしまうことになる。しかし、中心から熱をとったときにはどこかいき先があるわけではない。

この後の進化は、熱伝導のタイムスケールによる。密度が上がるとタイムスケールが長くなるような場合には、大雑把に言ってかなり大きなものが全体として収縮していく。

これに対し、恒星系に対応する場合には、密度が上がるとタイムスケールが短くなる。この時は、密度の高い「コア」が出来、それがどんどん収縮を続けるということになる。これに関する詳細な解析は Lynden-Bell & Eggleton (1980, MNRAS 191, 483) に与えられているので以下考え方を示す。

自己相似解というのは、ある物理量 y が

$$y(r, t) = y_0(t)y_*[r/r_0(t)]. \quad (1)$$

と書けるようなものである。さらに、 r_0 と y_0 が時間のべきで書ける（これは数値計算の結果がそうなっている）とすれば、

$$r_0 = (t_0 - t)^\beta, \quad (2)$$

とか

$$y_0 = (t_0 - t)^\gamma, \quad (3)$$

と書け、結局

$$y_0 = r_0^{\gamma/\beta}. \quad (4)$$

という関係が出てくる。

自己相似解ということで、いろんな無次元量は一定と考えられる。特に、今コアというものを考えて、その半径を r_c とすれば

$$\sigma^2 \propto \frac{GM_c}{r_c} \sim \rho_0 r_0^2. \quad (5)$$

ここで ρ_0 を

$$\rho_0 = r_0^\alpha, \quad (6)$$

と書けば

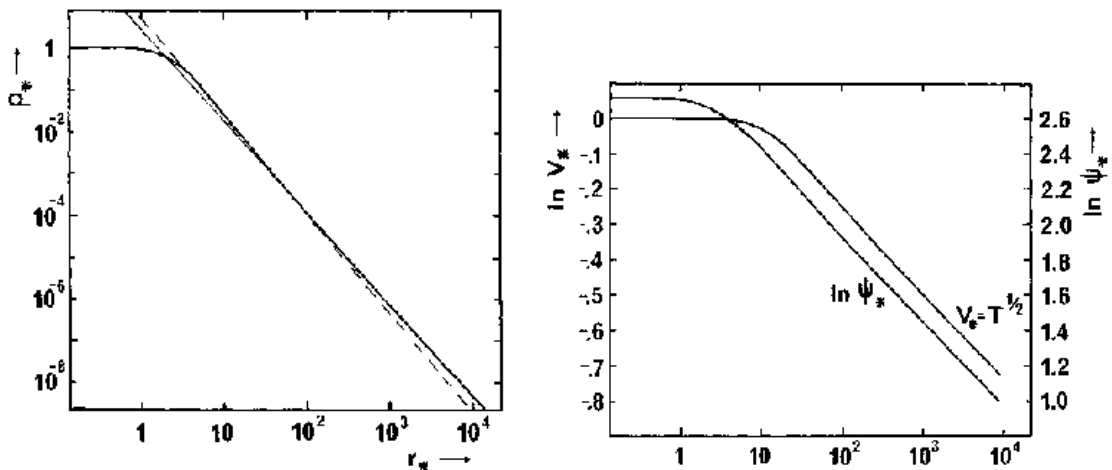
$$r_0 = (t_0 - t)^{2/(6+\alpha)}. \quad (7)$$

となる。

実際に $r_0(t)$ とかを求めるには、やはり固有値問題をとくことになる。Lynden-Bell & Eggleton は実際において、

$$\rho = r^{-2.21}. \quad (8)$$

という答を得た。以下に、彼らの求めた固有関数を示す。



2.1 ガスと N 体の違い

実は、このあたりの進化、すなわち重力熱力学的不安定や自己相似解については、ガス近似、FP 計算、 N 体間の一致は素晴らしくよい。ガスではうまく表現出来なくなるのは、質量分布がある場合、非等方性が発達する場合等である。

3 自己相似解の後の進化

さて、自己相似解は、ある時刻 t_0 で密度が無限大になる。これを collapse と呼んでいる。実際にそんなことが起きるのか、また、そのあとはどうなるのかというのは現実的には重要な問題である。というのは、多くの球状星団、あるいは dwarf E では、タイムスケールを見積もるとすでに collapse しているはずだからである。

その後どうなるかについては、いろんな可能性が考えられた。特に、これによってブラックホールを作るというアイデアはそれなりに真剣に検討された。

現在のところ、典型的な球状星団とか dwarf E では、ブラックホールが出来るというのはありそうにない。コアが十分に小さくなると、エネルギー供給源が出来るからである。

ここでのエネルギー供給の元は連星である。仮に星団があらかじめ連星をもっていなかったとしても、コアが十分に小さくなると、そのなかで 3 体相互作用で連星ができるようになる。これは基本

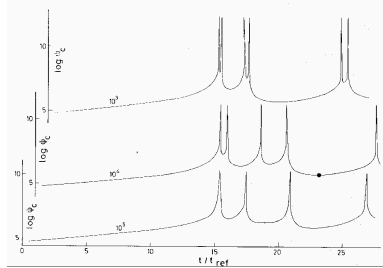
的には星のなかで温度、密度が上がると核融合が始まるというのと変わるところはない。ただし、量子力学的な効果はないので、連星の出来やすさは密度と温度（平均速度）の関係だけで決まる。

連星によるエネルギー供給が入ると、コアの収縮は止まる。熱源として連星を考えた計算を始めて行なったのは Henon (1975) であり、1982 年ころまでにいくつかそのような計算が行なわれた。それらでは、コアからの熱伝導による熱の流出と連星からのエネルギー入力バランスし、系全体がホモロガスな膨張をするという結果が得られていた。特に、Goodman (1984) は実際にそのようなホモロガスな解を求めた。

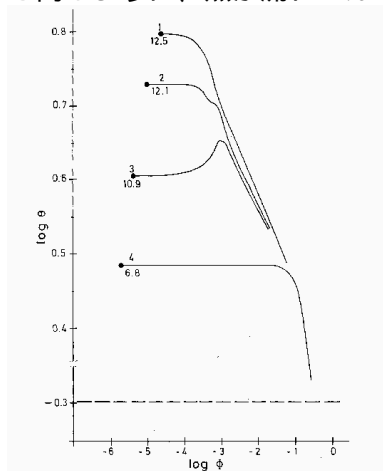
しかし、1983 年になって、Sugimoto & Bettwieser は、実はこのホモロガスな膨張解も熱力学的に不安定であるという発見をし、その結果起きる振動に「重力熱力学的振動」という名前をつけた。

以下に示すのが彼らの見いだした振動の様子である。

まず、この図は中心密度の時間変化である。3 本線があるのは、エネルギー生産の係数である。小さいほうがより振動の振幅が大きくなっているのがわかる。



これは膨張中の温度分布の変化。注意して欲しいのは、膨張中 (3 番の線) では、温度のピークがコアの外側にあることである。このような温度の逆転があることで、コア付近では熱が外側から内側に流ることが可能になる。この時には、等温状態の線型解析で膨張に対しても不安定であったのと同じように、熱が流れこんで膨張することで一層温度が下がり、さらに熱が流れこむ。

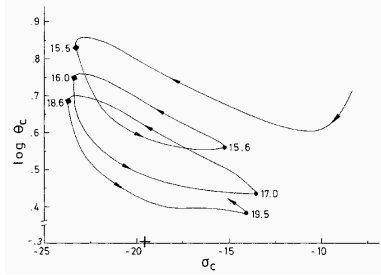


最後に、これはエントロピーと温度の平面でのコアの軌跡である。注意して欲しいのは、この軌跡はこの平面で反時計回りになっていることである。これはどういう意味があるかを考えてみる。

カルノーサイクルはこの平面上で長方形だが、熱機関は時計回りである。この時に、 $\Delta Q = T\Delta S$ を積分して正になって元に戻るの、外への仕事 ΔW は ΔQ と等しく正になる。熱機関であるとはそういうことであった。

これに対して逆に回るとは、冷凍機 (ヒートポンプ) のサイクルになっていることに対応する。つまり、低温の時に吸収した熱を高温になってから放出しており、そのために外からの仕事を利用している。このことは、この振動が本質的に熱力学的な不安定性によって起きているということの意味している。

もしも単に連星のエネルギー生産が密度が上がると始まり、密度が下がると止まるということで振動が起きているとすると、この時にはコアの軌跡は熱機関的になるはずである。そうではないということが現象を理解する上では極めて重要なことであった。



とはいえ、彼らの結果はただちに広く受け入れられたわけではなく、そのあと数年に渡る論争があった。その理由は、「それまでの他の人の計算ではいずれも振動が起きていなかった」ためである。具体的には、フォッカープランク方程式を解く計算、ガスモデルでの計算、また、フォッカープランク方程式をモンテカルロ法で解く計算のいずれでも振動は起きていなかった。また、直接の多体計算では、計算機の能力が不足で振動ははっきり見える粒子数を扱うことがそもそもできなかった。

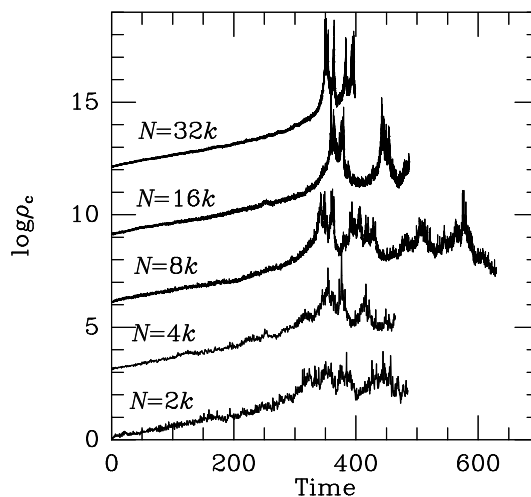
が、1985年には他のグループによるガスモデル計算、1986年にはFP計算でも振動が確認された。このきっかけになったのは、1984年のIAU Symposium No. 113であり、ここで杉本がD. C. Heggieと議論し、Heggieの流体コードの出力を見て、「時間ステップが大き過ぎるのではないか」と指摘した。

すなわち、自己重力質点系の流体モデルの計算では、それまでのほとんどの計算で、時間刻みは可変であったものの、「1ステップでの変化がある程度以上大きくならないようにする」という基準での時間刻みが使われていた。しかし、この基準での時間刻みと、熱伝導を安定に解く数値計算法を組み合わせると、結果として本来不安定な系でも数値解は安定になってしまうという問題が発生する。

杉本は、元々恒星の内部構造の研究者であり、特に様々な熱的不安定の数値シミュレーションを行ってきたのでこれらの点には注意深かった。このために、元々Bettwieserの数値計算で振動が起こった時にその結果に「正しい」解釈を与えることができたのである。

さらに、1987年にはGoodmanが自分の求めたホモロガスな膨張解の安定性解析を行い、粒子数が大きい(正確にはエネルギー生産の密度依存性の係数が小さい)と膨張解が不安定になることを示した。

実際に粒子系でそんなものが起きるかどうかにはさらに議論があったが、1995年になってN体数値計算でも確かに振動が起きることが見いだされた。



4 「現実の」球状星団

先ほど述べたように、球状星団の進化を普通に考えると、適当な初期条件から始めると典型的には数十億年程度の時間がかかって重力熱力学的なコラプスを起こす。その後の進化は、球状星団が理想的な質点系ならば重力熱力学的振動を起こすということになるが、実際にそうなるかどうかにはいろいろな問題がある。

1. 星同士の物理的な衝突・合体の効果は無視できるとは限らない
2. 始めから連星があるとまた話が変わる

4.1 連星

まず、初期にある連星の効果を考えてみよう。連星は極めて一般的なものであり、太陽近傍の星は50%程度は連星である。また、種族 II の星も相当部分が連星という観測結果もある。

これに対して、1990年頃までは、「球状星団には primordial な連星はない」と思われていた。これは、Gunn and Griffin (1979, AJ 84, 752) の広く影響をもった仕事があり、かなり頑張って分光的な連星を球状星団で探したけれども全く見つからなかったという結果になったことが大きい。

しかし、1990年前後から状況が大きく変わる。結局、観測精度が上がると様々な方法で続々と連星が見つかってきたのである。

連星があるとコラプスの後の進化は大きな影響を受ける。これは、恒星進化で H の他に D があるようなもので、エネルギー生産率を非常に大きくするからである。

つまり、連星を作るためには、3つの星がたまたま同時に近くに来る必要があり、このためには非常に密度が高い必要がある。しかし、連星が初めからあれば、それが他の星と近づけばそれだけでエネルギー生産になるわけである。

また、連星はもちろん単独の星より重いので、2体緩和の時間スケールで系の中心に集まってくる。このために、星の場合とは違って、連星「燃焼」段階は簡単には終わらない。

単純に初期には球状星団の星の相当部分が比較的小さいコンパクトな連星であったとすると、緩和時間が短く重力熱力学的コラプスが起きるような星団でもほとんどの場合には現在まで連星燃焼段階が続くという結論になる。もっとも、そうだとすると極めて深くコラプスした M15 のような星団の存在が説明できないことになり、球状星団と連星の関係については理論的にはともかく観測的、実証的にはまだこれから研究すべき課題が多い。

4.2 星同士の衝突

現在の我々の銀河系では球状星団クラスの10万個以上星が集まったものは全て非常に古いものであり、従って現在ではあまり重い星はない。このため、特に密度が高い球状星団コアにある星はほとんどが中性子星や重い白色矮星であると考えられ、これらは非常にコンパクトな星であるために物理的な衝突は極めて稀である。また、もっと若い散開星団では重い主系列星もあるが、星団自体の密度が低くてやはり物理的な衝突はあまり重力ではないと考えられてきた。

しかし、観測技術が1990年代にはいって進んだことで、この辺りも描像が大きく変わってきた。一つは、我々の銀河中心近くで、非常に若くコンパクトな星団がいくつか見つかったことである。Arches, Quintuplet といった星団は、銀河中心から30pc程度の距離で1万個程度の星が集まった

星団であり、年齢も数 Myrs と極めて若い。これほど銀河中心近くで存在できているということはもちろん極めて高い密度を意味しており、星同士の衝突が特に中心部では無視できない。

また、LMC や M82 などの系外銀河の星形成領域では、非常にコンパクトで大質量な星団が見つかってきている。

最近のシミュレーションの結果では、これらの星団では中心で星同士の暴走的な合体が起きる可能性が指摘されている。つまり、元々重い星が中心の密度が高いところに集まってくるので、これら同士が選択的に衝突する。衝突によって重い星ができると、それは衝突断面積が大きくなるので他の星より衝突しやすくなり、ますます衝突・合体によって成長する。これは、この暴走的に成長した星が超新星になるなりブラックホールになるなりするまでとまらない。

つまり、現在の球状星団ではこれから中心にブラックホールが形成されることはありえないが、最近見つかった若くて高密度の星団ではそのようなことが現在起きているかもしれない。これは、我々の銀河系の球状星団でも、昔にはそういうことがおきたかもしれないということでもある。

4.3 中心ブラックホールのある星団の構造と進化

では、中心にブラックホール(というか、なんか重いもの)がある星団ではどのような構造が見られることになるだろうか?これに理論的に答えたのは Bahcall and Wolf (1978) である。この頃には球状星団の中心にブラックホールがある可能性がかなり高いと考えられていたため、そのような方向の研究が盛んであった。しかし、球状星団の X 線源がほとんど Low-mass X-ray binary、つまり中性子星と小さな主系列星の連星であり、また必ずしも星団中心にあるわけでもないということが 1980 年代になって明らかになったため、しばらくこの方向の研究は止まっていた。

それはともかく、Bahcall and Wolf はフォッカー-プランク方程式を数値的に解くことで密度構造を決めたが、その結果は解析的に理解できることがわかっている。その考えは以下のようなものである。

中心部分の、ブラックホールの重力が支配的な領域を考え、また簡単のために分布関数は等方的であるとすると、速度分散はポテンシャルで決まるので、ケプラー速度になって速度は $v \propto r^{-1/2}$ になる。密度が ρ であるとしよう。

中心に向かって温度があがっているので、熱は中心から外側に向かって流れる。ここで、定常状態ならば熱流 L が半径に依存しない。

大雑把にいうと、ある半径での熱流は、そこでの緩和時間くらいにその領域の全エネルギーぐらゐが流れ出すと考えることで見積もることができる。これはなんか根拠がない仮定であると思うかもしれないが、仮に密度が半径のべきであるとするれば、温度は元々半径のべきなので無次元量としての温度勾配の大きさはどこでも同じになるため、この仮定は正しいことになる。

問題は、ではそういうべき乗の解はあるかどうかということだが、緩和時間は $t_r \sim v^3/\rho$ の程度、全エネルギーは $T = Mv^2 \sim \rho r^3 v^2$ の程度なので、 $T/t_r = \text{一定}$ と置くことで

$$\rho \sim r^{-7/4} \tag{9}$$

という関係がでてくる。

こんな大雑把な計算でいいのかと思うであろうが、割合うまく数値計算の結果を説明できている。

4.4 熱的進化以外の場合

ここまでは中心にブラックホールがある系について、周りにあるのが同一の質量の星の集団であり、熱力学的な定常状態になれば密度が半径の $-7/4$ 乗のべき分布になることを導いた。これは理論的には美しいが、必ずしも非常に現実的なケースとはいえない。以下では、より現実的と考えられるいくつかの場合について、分布がどのようになるべきかを考えてみる。具体的には、以下の3ケースを考える

1. 中心ブラックホールが断熱成長する場合
2. 力学的な時間スケールで「突然」中心ブラックホールができる場合
3. 質量分布がある系の熱力学的な進化

これらはそれぞれ、対応する現実的な系がある(かもしれない)と考えられる。

4.5 中心ブラックホールが断熱成長する場合

これは、例えばガス降着などでブラックホールが比較的ゆっくり成長する場合に、周りの恒星集団の分布がどう変わるかという話である。ゆっくりといっても、力学的な時間スケールよりは十分に遅いが2体緩和の時間スケールよりは速いものを考える。これは、銀河中心の巨大ブラックホールの場合にはありそうな話である。

QSO や AGN の central engine は巨大ブラックホールへのガス降着であると考えられているので、ガス降着が終わったあとの恒星系の分布は、この、ブラックホールが断熱成長した場合で与えられると考えられるであろう。この場合の分布関数の変化を数値的および解析的に調べたのは Young (1980, ApJ, 242, 1232) である。以下、彼の論文の議論を要約しよう。

始めはブラックホールがなかったとして、分布関数が $f(E, J)$ であるとする。考えないといけないことは以下の2つである。

- 最初に (E, J) にいた星はどこに移動するか
- その結果 $f(E, J)$ はどう変化するか

というわけで、順番に考えていこう。

まず、 (E, J) にいた星がどこに移動するかであるが、ポテンシャルは球対称のままなのでその形が変化しても角運動量 J は保存する。従って、 E の変化だけを考える。ポテンシャルの変化はゆっくりであるとしたので、断熱不変量がある、具体的には、radial action

$$I_R = \oint v_r dr = 2 \int_{r_-}^{r_+} [2(E - \phi) - (J/r)^2]^{1/2} dr \quad (10)$$

が保存することになる。

初めに恒星系は有限サイズのコアを持っていたとしよう。この時、コアの十分内側では、ポテンシャルは中心密度を ρ_0 として

$$\phi = \frac{2\pi}{3} \rho_0 r^2 \quad (11)$$

で与えられ、断熱不変量は

$$I_R = \oint v_r dr \propto \sqrt{\frac{3}{\rho_0 \pi}} E - J \quad (12)$$

(比例係数は無視) となる。さて、ブラックホールが十分に成長した後、元々コアの中心近くにいた星はブラックホールのポテンシャルの深いところにいると考えよう。この時には、新しいポテンシャルは $-M_{BH}/r$ であり、断熱不変量は

$$I_R^* = 2\pi(-J + M_B H \sqrt{-2E^*}) \quad (13)$$

となる。これを解けば E^* は求められる。但し、ここでは BH ができてからの量に * を付けて区別することにした。

さて、問題は、 $f^*(E^*, J)$ がどうなるかであり、これがわかれば密度分布がわかる。少しややこしいのは、最初のエネルギーが同じであっても最終のエネルギーは角運動量 J によって違うことで、このために算数が少し面倒になる。

分布関数 f ではなく、 (E, J) 空間での分布関数 $N(E, J)$ を考えると、ブラックホールの成長によってこれは滑らかに射影されるので

$$N^*(E^*, J) dE^* dJ = N(E, J) dE dJ \quad (14)$$

なる関係が成り立つ。 J は同じなので、これは

$$N^*(E^*, J) dE^* = N(E, J) dE \quad (15)$$

ということである。従って、 dE/dE^* が計算出来ればいい。ここでは、 I_R と E の関係を使ってみよう。つまり、 I_R を E で偏微分すると

$$\left. \frac{\partial I_R}{\partial E} \right|_J = P(E, J) \quad (16)$$

となることが知られている。但し、ここで $P(E, J)$ は半径方向の周期である。(計算は簡単であるのでやってみること) 従って、

$$\left. \frac{dE^*}{dE} \right|_J = \frac{P(E, J)}{P(E^*, J)} \quad (17)$$

となっただいぶ目標に近づいてきた。

後は f と N の関係だが、これは単に

$$N(E, J) = 8\pi^2 J f(E, J) P(E, J) \quad (18)$$

であるということが知られている。で、結局これらから何がわかるかというと、

$$f^*(E^*, J) = f(E, J) \quad (19)$$

ということである。と、これは Young の論文にそった議論だが、単にリウビルの定理からもこの場合に f が保存するのは当然な気がする。まあ、それはともかく、結局、初めにコアの中心近くにいたとすると f は一定なので、結局ブラックホールの近くではやはり f^* が一定となる。この時は、速度が $r^{-1/2}$ で上がるので、 f を一定に保つためには $\rho \propto r^{-3/2}$ でないといけなことがわかる。

つまり、ブラックホールが恒星系の中心で断熱的に成長する場合には、ブラックホールの十分近くでは $\rho \propto r^{-3/2}$ のカスプができることになる。

これは美しい理論であり、また重要な結果でもあるが、直接に天文学的な応用があるかと言われると難しい。ブラックホールがあるという観測的な傍証があるのはおもに巨大楕円銀河と近傍の円盤銀河であるが、どちらも中心スロープが $-3/2$ とは遠く離れているからである。

具体的には、巨大楕円銀河ではスロープが非常に浅く、 -0.2 から -1 程度の範囲に分布する。これに対して、我々の銀河系や近傍の円盤銀河では、 -2 的と考えられている (我々の銀河系でもブラックホールに本当に近い、距離にして 1 pc くらいのところなのでなかなか良くわからないが)。

巨大楕円銀河でカスプが非常に浅いことは、ブラックホール、巨大楕円銀河の起源を考える上では大きな問題である。もしも、QSO が巨大楕円銀河の直接の progenitor であって、QSO のガスが無くなって静かになったものが巨大楕円銀河であるとするなら、ブラックホールの周りの恒星の分布は $-3/2$ 乗カスプになりそうなものだからである。

それ以前に、そもそも -1 よりも浅いカスプを作る方法はあるのかというのも問題である。

ここまでは、

- 2 体緩和による進化での定常状態
- 断熱的なブラックホールの成長に対する無衝突恒星系の応答

を考えた。もうひとつの可能性として、力学的な時間スケールでブラックホールが形成されるか、あるいは系の中心以外のところから落ちてくることが考えられる。