天文学特別講義IV

牧野淳一郎

2009 年 6 月 15 日

1 Violent relaxation （続き）、２体緩和

1.1 中心部の構造

前回は、Violent relaxation の結果として自己重力系の外側 (virial radius のずっと外側) については、

- $N(E)$ が $E = 0$ で有限値をとる。
- その結果、密度分布は $\rho \propto r^{-4}$ になる。
- これは Hernquist model, Jaffe model 等に共通の性質であり、楕円銀河がいわゆる $r^{1/4}$ 則でよく表現できる理由の一部ではある。

というような話をした。

さて、それでは、中心部の構造についてはなにもいえないのであろうか？これは実はまだ良くわかっていない問題である。10 年前に、 Navarro たち （ApJ 1997, 490, 493) は、数値計算の結果をもとに以下のような主張をした

- CDM シナリオによる構造形成を考えた時、 CDM が作る自己重力系（ガスとか星を考えない）は
$$\rho \propto \frac{1}{r_*(1+r_*)^2} \tag{1}$$
の形に書ける
- この形はユニバーサルで、例えば一つの銀河でも銀河団でも同じである

これは、極めて有名になった NFW プロファイルである。

彼らはなぜそのようなことが起きるかについての解釈とか説明は特に与えていないが、例えば Syer and White (MN 1998, 293, 337) といった人達が説明を考えてはいる。

しかし、実は、Navarro たちの結果の解釈は割合すぐに異論がでており、 CDM と初期条件を制限しても、例えば Fukushige and Makino (ApJ 1997, 477 L9) とか Moore et al. (ApJ 1998, 499, 5L) を見ると、上の「ユニバーサル」な形になったのは数値誤差のせいという主張がなされている。これらの結果では Navarro たちのものより中心で等温に近くなっている。 Navarro らの結果は 1 万粒子程度であるが、 Fukushige ら、 Moore らは 100 万粒子程度であり、数値誤差の影響が小さくなっていることは間違いない。「真の」のスロープがどうなるかについては現在も活発な研究が続い

ているが、現時点では、CDM からの数値実験でできるハローの中心部は NFW よりもスロープの傾きが大きいということはほぼ万人の認めるところになったようである。

全く余談であるが、福重君はこの仕事とその続きで天文学会研究奨励賞をもらった。

さらにもっと余談であるが、福重君がこの計算をした動機は、1996 年に GRAPE-4 を使って何か大きな計算で高い実効性能を出したい (Gordon Bell Prize に応募したい)、そのためにはとにかく粒子数が沢山必要で、普通の treecode とかではできないようなシミュレーションでよいネタがないか？とか色々考えたことである。

つまり、現状では、中心部（というか、half mass radius より内側）の構造は、

- 第 0 近似としては半径の -1.5 乗程度のカスプになる。
- どういうメカニズムでそうなるかはまだよくわからない

という状況であるといえる。現在では、福重君の仕事からさらに 3 桁程度粒子数を増やした、 10^9 粒子程度の計算も行われているが、中心部の構造がどうなるか、それは何故か、というのは依然明確にはなっていない。

2　2 体緩和

2.1　前置き

さて、この講義も回数ではすでにほぼ半分弱が終り、当初予定していた

(1) 支配方程式（無衝突ボルツマン方程式）

(2) 球対称の力学平衡モデル

(3) ジーンズ不安定と力学平衡への緩和過程

(4) ２体緩和

(5) 重力熱力学的不安定と重力熱力学的振動

(6) 連星形成とその影響

(7) 中心ブラックホールのある恒星系

(8) 2 次元ディスク、渦巻構造

のうちの最初の３つまでが済んだということになる。もっとも、それぞれ大きなテーマであり、力学平衡モデルについては軸対称、あるいは３軸不等なモデル、あるいはディスク系とその不安定モードなどについては全く扱えていない。(これは後半でなんとかしたい) 力学平衡への緩和過程についても、例えば合体の場合、あるいは理想化された１次元系を例にとって具体的な話をする必要もあったかもしれない。が、しかし、世の中は無衝突系だけではないし、また、現実は無衝突系である場合でも、それを数値的にモデル化したものはそうでなくなってしまうことがある。従って、衝突系の進化がどのようなものかということは、実際になんらかの自己重力系を扱う場合には必ず理解しておく必要がある。というわけで、これから数回で衝突系の進化というものを考えることにする。

2.2 ２体緩和とはなにか？

まず、2体緩和とはいったいどういうものかというところから話を始めることにする。原理的には、これがなにかというのは結構厄介な問題である。

有限粒子数の自己重力多体系を考えると、これは以下のような進化をすると考えられる。まず、最初は力学平衡になかったとすると、とりあえず力学平衡に落ちつく。粒子数が無限大であれば、無限に細かく見れば無限に時間がたっても真の力学平衡に到達するわけではないが、まあ、漸近はしていく。この時、各粒子は与えられたポテンシャルの中を運動するだけになり、それ以上進化することはなくなる。

さて、実際には有限粒子数であるので、そもそも真の力学平衡というものはない。有限の質量をもった各粒子が系の中を運動するに従って、ポテンシャルは必ず変化するからである。この変化によって各粒子の軌道も変化することになる。

それでは、粒子の軌道の変化を、粒子数が有限であることから来る成分とそれ以外に分離することは可能であろうか？これは、系が力学平衡にあるとみなすことができればそれは可能である。つまり、力学平衡にあれば、粒子のエネルギー変化は定義によりすべて粒子数が有限であることによるからである。

が、良く考えると問題なのは、そもそも有限粒子数であるものを力学平衡とみなすとはどういうことかということである。このあたりを考えていると段々混乱してくるので、まず、理想化された状況から考えていくことにしよう。

2.3 理想化：一様等方な分布

理想化といえば例によって一様等方な分布を仮定することである。例えばマックスウェル分布があって、その中の一つの粒子をとって考えるということをしたいわけだが、これは結構厄介なのでさらに簡単な例を考える。すなわち、速度0で空間内に一様（ランダム）に分布した質点を考え、その中を質量0のテスト粒子を飛ばして見る。

もちろん、この場合エネルギー交換はないので速度は変わらず、単に散乱されるだけだが、しかし、この例は2体緩和のいくつかの重要な性質を示すのですこし詳しく見ていくことにする。分布している質点の質量を m、数密度を n とする。テスト粒子が一つの粒子から距離（インパクトパラメータ） b を速度 v で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{2b/b_0}{(b/b_0)^2-1} \\
b_0 &= \frac{Gm}{v^2} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

で与えられる。単位時間当たり、インパクトパラメータが $(b, b+db)$ の範囲にある散乱の回数は $2\pi nvbdb$ である。

さて、散乱の方向はランダムであると思われるので、平均としては（一次の項は）0 になる。しかし、 2 次の項は 0 にならない。これは

$$
<\Delta\theta^2>= 2\pi nv\int_0^{b_{max}} \delta\theta^2 bdb \qquad (3)
$$

で与えられることになる。

この式から既にいろいろな性質がわかる。が、その前に理論的な困難を解決しておく必要があるであろう。すなわち、この積分は $b\to\infty$ で発散しているのである。これについてはいくつかの考え

方があった。例えば、初めて２体緩和の性質を理論的に調べた Chandrasekhar は、以下のように考えた。

「平均粒子間距離よりもインパクトパラメータが大きいような散乱は、多体の干渉によって効かなくなるのでそこで積分を打ち切ってよい」

しかし、多体の干渉というようなものが実際にあるかどうかはあきらかではない。もっと素直な解釈は、実際に系にあるすべての粒子と常に同時に相互作用しているのだから、システムサイズくらいまで全部いれる（系が構造を持つ場合はちょっとややこしいが、密度の空間依存も積分のなかに入れて全空間で積分する）というものである。

数値実験の結果などから、後者の解釈すなわち全体が効くというほうが正しいということはかなり昔から大体わかっていた。歴史的には、どちらの解釈が正しいかについてはかなり最近まで論争があって、完全に決着がついたといえるのは 94-5 年頃である。が、これはまあそういうことをいっている人もいたっていうくらいのもので、定説となっているのは後者である。現在では後者の解釈が正しいということに疑いの余地はない。

上の式から、適当に近似すると

$$< \Delta\theta^2 > \sim Gnv^{-3}m^2 \log(R/r_0) \tag{4}$$

となる。ここで R は先に述べたシステムの大きさ、 r_0 は「大きく曲がる」ためのインパクトパラメータの値で、$b_0 = GM/v^2$ の程度である。

さて、これからどんなことがわかるかというわけだが、これから、逆に角度変化が１の程度になる時間というのを求めてみると、

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2 \log \Lambda} \tag{5}$$

となる。ここで Λ は上の R/r_0 を単に書き換えただけである。

今、$\log \Lambda$ の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の３乗、数密度の逆数、質量の２乗の逆数に比例するということがわかったことになる。特に、質量密度一定の場合というものを考えてみると、タイムスケールが各粒子の質量に比例するということがわかる。

ある大きさを持った多体系というものを考えてみよう。質量 M、特徴的な半径（ビリアル半径か何か） R、粒子数 N とすれば、ビリアル定理から $v^2/2 = GM/R$、力学的なタイムスケールが $t_d \sim \sqrt{R^3/GM}$ となる。これを使うと上の緩和のタイムスケールは

$$t_\theta \sim \frac{N}{\log N} t_d \tag{6}$$

となる。粒子数が大きいほど無衝突系に近付くのだから、まあ、当然の結果といえなくもない。

2.4 どういうことを考えるかということ：流体との違い

２体緩和によって、最終的には系が熱力学的に進化するわけであるが、これが普通の流体（ガス）とは本質的に違うものであるということをここで再確認しておこう。

ガスの場合、粒子の平均自由行程はシステムサイズよりもはるかに小さい。液体であれば平均粒子間距離は粒子のサイズ程度であるし、気体であっても通常の状況では考えている現象の空間スケールに比べて平均自由行程は小さい。ちなみに、非常に希薄な気体とか、あるいは本当に空間スケールの小さい現象では平均自由行程が問題になる。これは例えば超高層での人工衛星の回りの気体の流れとか、あるいは最近の磁気ヘッドの回りの空気の流れとかいったものである。

とにかく、通常のガスの場合、平均自由行程がシステムサイズより小さく、システムサイズよりは小さく平均自由行程よりは大きいような空間スケールを考えると、そのなかでほぼ熱平衡になっていると思っていいことになる。いいかえれば、いわゆる Local thermal equilibrium (LTE) の仮定が使える。こうなると、温度とか圧力とかいった量が近似的（といっても実際上非常に高い近似精度で）に定義でき、そういったマクロな量で系の進化を扱う、特に熱の流れを拡散方程式で書くということが可能になる。

しかし、自己重力質点系では状況が全くことなる。まず、粒子数が無限大の極限では、平均自由行程も無限大であった。つまり、 LTE がなりたたないどころか、そもそも熱平衡に向かう（すなわちエントロピーを生成する）ようなメカニズムがなかったわけである。

粒子数が有限の場合も、依然として平均自由行程が長い、つまり、粒子数無限大の時の軌道から、他の粒子との相互作用によって段々ずれていくわけだが、そのずれる典型的なタイムスケールは $Nt_d/\log N$ 程度であった。つまり、流体の場合とは全く逆に、ほとんど自由運動（というか、他の粒子全体が作るポテンシャルに沿った運動）をしていて、その場が有限の粒子で表現されるための揺らぎがあるので段々軌道が変わっていくということになるわけである。

従って、ローカルな熱平衡を仮定して拡散係数／輸送係数を求めるというのとは逆に、ある一つの粒子が系の中を動き回りながらどういうふうにエネルギー等を変化させていくかという観点で見ていくことになる。

これをすこし別ないい方をすれば、通常の空間のなかでの密度や温度の変化を考える代わりに、また 6 次元位相空間のなかでの分布関数の進化を考えるということに当たる。具体的には、これまで無視してきた「衝突項」というものをちゃんと評価して、どういうものかみてやろうということである。

2.5 バックグラウンドの分布のもとでの有限質量のテスト粒子の振舞い

さて、以下ではバックグラウンドの粒子分布のもとでの一つのテスト粒子の振舞いを考える。前と違うのは、バックグラウンドも動いていることと、テスト粒子も有限の質量を持つことである。バックグラウンドの粒子は一様に分布するものとし、ある速度分布に従うとする。さらに、バックグラウンドの粒子間の相互作用とかは考えないことにする。これで本当にいいかどうかはちょっと良くわからない問題であるが、まあ、とりあえずやってみることにしよう。

前と同じく、分布している質点の質量を m、数密度を n とする。テスト粒子が一つの粒子から距離（インパクトパラメータ） p を相対速度 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v}_f$ で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{2p/p_0}{(p/p_0)^2 - 1} \\ p_0 &= \frac{G(m_t + m_f)}{V^2} \qquad (7)\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、この曲がる角度は相対軌道のものであって、テスト粒子の軌道のものではないということに注意する必要がある。いきなり回りが動いていてしかもテスト粒子が質量をもつというのは難しくなるので、とりあえずテスト粒子は質量を持つが、回りは止まっている場合を考える。この時、一回の散乱での速度変化は以下の式に従う。

$$\Delta v_{\text{垂直}} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V \sin\theta = 2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{p/p_0}{1 + (p/p_0)^2} \qquad (8)$$

$$\Delta v_{\text{平行}} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V(1 - \cos\theta) = -2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{1}{1 + (p/p_0)^2} \qquad (9)$$

$$(10)$$

前の話との違いは、速度変化に係数 $m_f/(m_f+m_t)$ がついていることだけである。これにまた単位時間当たりの衝突回数 $2\pi p n_f V dp$ を掛けて積分するが、$\Delta v_{垂直}$ については前と同様 1 次の項は落ちる。それ以外については前と同様に計算出来て

$$< \Delta v_{垂直}^2 > \; = \; \frac{2n_f\Gamma}{V} \tag{11}$$

$$< \Delta v_{平行} > \; = \; -\left(1+\frac{m_t}{m_f}\right)\frac{n_f\Gamma}{V^2} \tag{12}$$

$$< \Delta v_{平行}^2 > \; = \; \frac{n_f\Gamma}{V\ln\Lambda} \tag{13}$$

ここで Γ は

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln\Lambda \tag{14}$$

である。ただし、 leading term でない項は適当に落ちてたりするので注意。

上の式で、$< \Delta v_{垂直}^2 >$ の項は前にでてきた角度の曲がる項と同じものである。前の話と違うのは、ネットに速度が小さくなる成分がある、すなわち $< \Delta v_{平行} >$ が負で有限の値をもつということである。

これは、実は前にやった dynamical friction そのものである。つまり、回りが止まっているなかを粒子が走っていくと、それが回りを引っ張って動かすので、その分エネルギーを失って段々速度が落ちるわけである。これは、 m が大きい（m_f が小さい）極限では $m_f n_f$ 、つまり質量密度によっていて、バックグラウンドの粒子の質量に依存しないことに注意してほしい。これに対し、他の項は $m_f^2 n_f$ に比例していて、質量密度が同じでも粒子の質量が大きいほうが値が大きくなるのは先週にやった通りである。

さて、ここではとりあえず 1 次と 2 次の項を求めたわけだが、それより先の項については考えなくてもいいのだろうか？ここでは粒子の軌道変化がたくさんの散乱のランダムな重ね合わせで書けるとした。この仮定が正しければ、たくさん散乱を受けた後の速度の分布は 1 次と 2 次のモーメントで決まるガウス分布になり、従って 3 次より高いモーメントの寄与は考えなくてもいいことになる。

問題はこの仮定が正しいかどうかであるが、実は理論的にはそれほど正確なわけではない。というのは、インパクトパラメータが例えば p_0 の程度の散乱というのも現実におき、その効果はそれ以外の散乱すべての寄与に比べてせいぜい $\ln\Lambda$ 程度でしか小さくないからである。まあ、しかし、そんなことをいっていても高次の項があっては計算出来ないし、とりあえず $\ln\Lambda$ 程度で小さいということも確かなので、以下高次のモーメントは考えない。

2.6 バックグラウンドが速度分布を持つ場合

というわけで、いよいよバックグラウンドが動いている場合ということになる。この時でも、相対速度の変化自体は前節に述べたもので正しいが、相対速度にフィールド粒子の速度成分が入ってくることになる。

以下、二種類の単位ベクトル系をとって、その上で考える。一つは $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ であり、元の空間に固定されている。もう一つは $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ であり、最初の成分を相対速度 $\boldsymbol{V}$ に平行にとる。従って、後者は相手の粒子によって違うわけである。この 2 つを考えることで、相対速度の変化をもとの静止系でのテスト粒子の変化に焼き直す。

まず、1 次の項は相対速度に平行な成分だけであった。このことから、ある方向の速度変化は

$$< \Delta v_i > = < \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1 \Delta v_{平行} >' \tag{15}$$

ということになる。もうすこし精密に書くと、右辺はインパクトパラメータと相手の速度の積分なので、以下のように書けることになる。

$$\begin{aligned} < \Delta v_i > &= \int dp 2\pi p V \int d\boldsymbol{v}_f f(\boldsymbol{v}_f) \Delta v_i & (16) \\ &= -\Gamma(1+m/m_f) \int \frac{f(\boldsymbol{v}_f)}{V^2} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1) d\boldsymbol{v}_f & (17) \end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{V}$ はフィールド粒子の速度、 f は速度分布関数である。 p についての積分を先にやったことに注意して欲しい。この積分は $v_f = 0$ であった時の結果をそのまま使っている。

さて、2 次の項についてであるが、前節で見たように $\boldsymbol{v}$ に垂直な成分、すなわち $\boldsymbol{e}'_2$ と $\boldsymbol{e}'_3$ の成分を考えればいい。従って、一つの方向からくるフィールド粒子との散乱を考えた時には

$$\begin{aligned} < \Delta v_i \Delta v_j > &= [(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}'_2 + (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}'_3] \cdot [(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}'_2 + (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}'_3] < \Delta v^2_{垂直} > /2 \\ &= [(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_2)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_2) + (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_3)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_3)] < \Delta v^2_{垂直} > /2 \\ &= Q_{ij} < \Delta v^2_{垂直} > /2 & (18) \end{aligned}$$

これもまた分布関数を掛けて積分すると、結局

$$< \Delta v_i \Delta v_j >= \Gamma \int \frac{f(\boldsymbol{v}_f)}{V} Q_{ij} d\boldsymbol{v}_f \tag{19}$$

ということになる。これで一応必要な 2 次までの係数はすべて書けたわけだが、あまり計算するのに使い易い形ではない。というのは、$\boldsymbol{e}'_i$ とか V とかいったものがまだややこしい形ではいったままであるからである。しかし、もうちょっと簡単な形に書き直せることが知られている。まず、1 次の項だが、

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial v_i} = \frac{V_i}{V^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1}{V^2} \tag{20}$$

という都合のよい関係がある。変形はとくにややこしいところはないと思う。$\boldsymbol{e}'_1$ をそもそも $\boldsymbol{V}$ に平行にとったから上のように出来るわけである。このため、

$$h(\boldsymbol{v}) = \int \frac{f(\boldsymbol{v}_f)}{|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_f|} d\boldsymbol{v}_f \tag{21}$$

なる関数 $h(\boldsymbol{v})$ を導入して、

$$< \Delta v_i >= -\Gamma(1+m/m_f)\frac{\partial h}{\partial v_i} \tag{22}$$

ということになる。

2 次の項についても同様な整理が可能である。Q_{ij} は $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ の $\boldsymbol{e}'_2$ と $\boldsymbol{e}'_3$ によって張られる平面への写像の内積なので、$\boldsymbol{e}'_1$ との内積の分をつけてやれば元の単位ベクトル同士の内積になる。つまり、

$$Q_{ij} = \delta_{ij} - (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_1) = \delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{V^2} \tag{23}$$

したがって、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_i \partial v_j} = \frac{1}{V}\left(\delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{V^2}\right) = Q_{ij}/V \tag{24}$$

というわけで、

$$g(v) = \int f(\boldsymbol{v}_f)|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_f| d\boldsymbol{v}_f \tag{25}$$

とおけば、

$$< \Delta v_i \Delta v_j >= \Gamma \frac{\partial^2 g}{\partial v_i \partial v_j} \tag{26}$$

2.7 バックグラウンド速度分布が熱平衡の場合

前節では、バックグラウンドの速度分布が任意のものについて、実際に計算可能な式を導いた。ここでは、速度分布が等方的な場合について式を単純化してみる。

速度分布が等方的な場合、h や g の積分を、 $\boldsymbol{v}_f$ の絶対値方向と角度方向に分けることができる。角度方向の積分については、 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}_f$ のなす角度を θ とし、$\mu = \cos\theta$ とすれば、球面上での積分が、まず h については

$$\int \frac{d\boldsymbol{v}_f}{|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_f|} = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{|v^2 - 2\mu v v_f + v_f^2|^{1/2}} = 4\pi \begin{cases} 1/v, & (v > v_f) \\ 1/v_f, & (v < v_f) \end{cases} \tag{27}$$

となる。これは、球面上に分布する電荷の作るポテンシャルと同じ式である。g についても同様に計算できて

$$\int |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_f| d\boldsymbol{v}_f = 2\pi \int_{-1}^{1} |v^2 - 2\mu v v_f + v_f^2|^{1/2} d\mu = \frac{4\pi}{3} \begin{cases} 3v + v_f^2/v, & (v > v_f) \\ 3v_f + v^2/vf, & (v < v_f) \end{cases} \tag{28}$$

となる。これから、

$$\begin{aligned} F_n(v) &= \int_0^v \left(\frac{v_f}{v}\right)^n f(v_f) dv_f \\ E_n(v) &= \int_v^\infty \left(\frac{v_f}{v}\right)^n f(v_f) dv_f \end{aligned} \tag{29}$$

というものを考えると、

$$\begin{aligned} h(v) &= 4\pi v[F_2(v) + E_1(v)] \\ g(v) &= \frac{4\pi v^3}{3}[3F_2(v) + F_4(v) + 3E_3(v) + E_1(v)] \end{aligned} \tag{30}$$

これらから、最終的な結果、すなわち、バックグラウンドが動いている時の、速度に平行な速度変化と垂直なそれを書き下せることになる。それらは、結局、

$$< \Delta v_{\text{平行}} > = -4\pi\Gamma \left(1 + \frac{m}{m_f}\right) F_2(v) \tag{31}$$

$$< \Delta v_{\text{平行}}^2 > = \frac{8\pi\Gamma v}{3}[F_4(v) + E_1(v)] \tag{32}$$

$$< \Delta v_{\text{垂直}}^2 > = \frac{8\pi\Gamma v}{3}[3F_2(v) - F_4(v) + 2E_1(v)] \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

これらから、粒子のエネルギーの変化 ΔE を出すことができる。

$$\Delta E = v\Delta v_{\text{平行}} + < \Delta v_{\text{平行}}^2 > /2 + < \Delta v_{\text{垂直}}^2 > /2 \tag{35}$$

と書けるので、1 次の項は

$$< \Delta E > = 4\pi\Gamma v \left[E_1(v) - \frac{m}{m_f} F_2(v)\right] \tag{36}$$

となる。2 次の項については、 $(v\Delta v_{\text{平行}})^2$ 以外の項は小さいので無視すると

$$< \Delta E^2 > = \frac{8\pi\Gamma v^3}{3}\left[F_4(v) + E_1(v)\right] \tag{37}$$

となる。

さて、速度分布を熱平衡、すなわち

$$f_0(\boldsymbol{v}) = \frac{n_f}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{38}$$

とすると、上の係数等を具体的に計算できることになって、その形は

$$< \Delta v_{平行} > \;=\; -4\frac{n_f\Gamma}{\sigma^2}\left(1+\frac{m}{m_f}\right)G(x) \tag{39}$$

$$< \Delta v^2_{平行} > \;=\; 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}G(x)/x \tag{40}$$

$$< \Delta v^2_{垂直} > \;=\; 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}\frac{\mathrm{erf}(x)-G(x)}{x} \tag{41}$$

$$< \Delta E > \;=\; \sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}\left[-\frac{m}{m_f}\mathrm{erf}(x)+\left(1+\frac{m}{m_f}\right)x\mathrm{erf}'(x)\right] \tag{42}$$

ここで erf は誤差関数であり、

$$G(x) = \frac{\mathrm{erf}(x) - x\mathrm{erf}'(x)}{2x^2} \tag{43}$$

また $x = v_t/(\sqrt{2}\sigma)$ である。

山ほど式はでてきたものの、全然なんだかわからないという気分になった人もまあいるのではないかと思うので、以下、上の式の意味についてちょっと考えてみよう。

まず、速度の 1 次の項を見てみる。これは、速度分布には F_2 だけを通して依存しているということに注目して欲しい。例えば、マックスウェル分布のようなものを考えた時、 v が大きい極限では $F_2 \sim 1/(2\pi v^2)$ となるので、回りが止まっているときと同じく速度変化は速度の 2 乗に反比例する。これに対して、v が小さい極限では、f を一定と見なすことが出来るので $F_2 \propto v$ となる。

これは、タイムスケールを考えてみると、速度が大きい極限では減速のタイムスケールが v^3 であるのに対し、逆の極限では 一定になるということである。すなわち、非常に速度が大きい粒子が出来てしまうとこれはなかなか減速しない。もちろん、自己重力系の場合には、そのようなものは系のなかに留まるのが困難だということもあるが。

これに対し、速度が小さいほうではタイムスケールがある一定値、つまりは $v \sim \sigma$ で決まる値あたりになるということである。

この 1 次の項は、前に述べたように dynamical friction を表している。これが問題になる場面は、例えば恒星系が質量の違う 2 つの成分から出来ているような場合である。力学平衡で、分布関数に質量依存がないようなものを考えると、これは熱平衡から遠くはなれている。従って、上の式で決まるタイムスケールで重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得る。

なお、、自己重力系ではこのエネルギー交換の結果熱平衡に向かうとは限らないということに注意する必要がある。つまり、重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得るということは、それぞれの分布関数が変わり、空間分布も変わるということである。具体的には、重いものは中心に落ちるし、軽いものは外側に押し出される。

さて、次に、2 次の項を見てみる。速度に平行な成分も垂直な成分も、 v が大きい極限では 0 にいく。特に、 垂直な成分は v に反比例する。これに対し、速度が 0 の極限では、どちらも一定値に収束する。これは停止している極限でも、回りの粒子によって揺さぶられるということを表しているわけである。