理論天文学概論

牧野淳一郎

1　フォッカープランク近似

さて、数値計算の精度がどうという話を別にすれば、2 体緩和を考える理由はそれにより系がどう進化するかを理解するということである。そのためには、粒子の速度変化のモーメントの式から、分布関数の変化についての方程式を導くことが有用であろう。

粒子の物理量の変化の 1 次と 2 次のモーメントから（高次の項の寄与を無視して）分布関数に対する移流拡散方程式を導くことができる。この操作を通常フォッカープランク近似といい、でてきた方程式をフォッカープランク方程式という。以下、その導出を行なってみる。これは、ボルツマン方程式の衝突項を求めることに対応する。

今、 $P(\boldsymbol{v}, \Delta\boldsymbol{v})d\Delta v$ が、速度 $\boldsymbol{v}$ の粒子が、時間 Δt の間に速度変化 $\Delta\boldsymbol{v}$ （の近傍の $d\Delta\boldsymbol{v}$ の範囲）を受ける確率であるとする。すると、 Δt たった後の分布関数は以下のように書ける

$$f(\boldsymbol{v}, t+\Delta t) = \int f(\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v}, t) P(\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v}, \Delta\boldsymbol{v}) d\Delta\boldsymbol{v} \tag{1}$$

これは $\boldsymbol{v}$ のところにやってくる可能性があるものすべてについての和をとっただけである。ここで、両辺を展開することを考える。左辺は

$$f + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t \tag{2}$$

である。右辺は

$$\int \left[fP - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(fP)}{\partial v_i}\Delta v_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2(fP)}{\partial v_i \partial v_j}\Delta v_i \Delta v_j + ... \right] d\Delta\boldsymbol{v} \tag{3}$$

ここで、

$$< \Delta v_i > \Delta t \quad = \quad \int P\Delta v_i d\Delta\boldsymbol{v} \tag{4}$$

$$< \Delta v_i \Delta v_j > \Delta t \quad = \quad \int P\Delta v_i \Delta v_j d\Delta\boldsymbol{v} \tag{5}$$

とおけることを使えば、微分と積分の順序を入れ換えて

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(f < \Delta v_i >}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2(f < \Delta v_i \Delta v_j >)}{\partial v_i \partial v_j} \tag{6}$$

これで、理屈の上では分布関数の変化が計算できるということになる。もちろん、実際にこれを解いて自己重力系の進化を調べるのは、必ずしも容易ではない。その理由は、分布関数が 6 次元位相空間上で定義されること、それがジーンズの定理を満たすように進化しなければいけないことである。具体的には、

- そもそも、球対称とかの仮定なしでは運動の積分だけの関数であるような分布関数が求まらない
- 実際に運動の積分の関数として分布関数が書ける場合でも、拡散係数を求めるのはそれほど容易ではない。
- 実際に拡散係数が求まっても、自己重力系なので分布関数が変化すると同時にポテンシャルも変化することになり、それによって粒子の軌道が断熱的に変化することになる。そのへんを考慮してつじつまがあうような計算プログラムを作るのは容易ではない。

というような困難があり、従来は、分布関数をエネルギーだけの関数と近似する計算しか行なわれていなかった。1994 年頃に、Takahashi が初めて $f(E, J)$ の場合に信頼できる結果を得ることに成功した。しかし、これも、拡散係数を求める時に、フィールドの分布は等方的であるという近似を行なっている。

なお、モンテカルロ法など、もうちょっといい加減な方法ではある程度のことは出来ている。この辺についてはまた後でもう少し詳しく触れる。

2 熱力学的進化

今日の残りの部分は、熱力学的な進化ということで、いくつかの理想化された場合を考えておく。なお、以下はまた流体近似で話をする。自己重力質点系の熱力学的な進化をそのまま考えるのはほとんど不可能だからである。原理的には、今やったような Fokker-Planck 方程式の平衡解をつくって、その安定性を調べればできるわけだが、これまでそのような研究はあまり行なわれていない。また、熱平衡状態とその安定性に関するかぎり、ガスか質点系かという違いには意味がない。まあ、そういうわけで、ガスで考えるということにもそれなりの意味はある。

もちろん、平衡状態からのずれの時間発展はガスか質点系かで大きく違うわけだが、おもな違いは熱伝導の係数の密度、温度への依存の違いとして理解できる。

3 等温状態の安定性

まず、もっとも単純な場合ということで、等温の平衡状態を考える。話を簡単にするために、球対称の断熱壁の中のガスということにする。平衡状態は、静水圧平衡の式

$$\frac{dp}{dM} = -\frac{M}{4\pi r^4}, \tag{7}$$

$$\frac{dr}{dM} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \tag{8}$$

を考えればいい。例によって球対称で、$M(r)$ は半径 r の中の質量、p と ρ は圧力と密度である。面倒なので、単位系として $G = M = R = 1$ となるようにとる。G は重力定数、M は壁（断熱壁）のなかの全質量、R は断熱壁の半径である。

温度は、状態方程式

$$p = \rho T \tag{9}$$

で決まる。単位質量当たりのエントロピーは

$$s = \ln(T^{3/2}\rho^{-1}) \tag{10}$$

であり、境界条件は

$$\begin{aligned} r &= 0 \quad \text{for} \quad M = 0, \\ r &= 1 \quad \text{for} \quad M = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

である。この解自体は、すでに何度か扱ったように数値的に求めることが出来る。

以下、熱力学的安定性について議論するわけだが、これにはいろんな流儀があって、なんだかよく理屈がわからないものもある。等温の自己重力ガスの安定性について初めて議論したのは Antonov (1961) であり、もうちょっと詳しい議論が Lynden-Bell & Wood (1968) によってなされた。しかし、これらはいずれも真の意味での安定性解析、すなわち、平衡解に対する摂動を考え、それが成長するかどうかをしらべたというものではない。

そのような意味での安定性解析を初めて適用したのは、 Hachisu & Sugimoto (1978) である。彼らの方法は、大雑把にいうと以下のようなものである。

- 平衡解の回りの線形化した摂動に対する方程式を作る
- 適当な制約条件のもとで、全エントロピーの 2 次の変分 ΔS^2 を最大にするような摂動を求める。これは、具体的な手続きとしては固有値問題を解くことに帰着される。
- 仮に求まった ΔS^2 が正であれば、これは、平衡状態がエントロピー極大の状態ではない、したがって、不安定点であるということを意味する。

等温状態なのでエントロピーは通常ならば極大値である。これは、任意のエントロピーの再分配に対して、$\Delta S = 0, \Delta S^2 < 0$ となっているということを意味する。

これは、熱をちょっとどこかからとって別のところに与えると、それによる温度変化を考えなければ（一次の変分）エントロピーは変わらない。また、温度変化を考えると（二次の変分）、熱をもらった方は温度が上がっているのでもらうエントロピーは少なく、出したほうは逆に温度が下がるので出ていくエントロピーが多い、従って、系全体としては普通は摂動を与えるとエントロピーが減る、すなわち、平衡状態はエントロピー極大に相当している。

以上から、もし、熱を取り去った時に温度が上がるようなことがあればエントロピー極大ではないかもしれないということが想像できよう。もちろん、常識的な熱力学の対象ではそんなことはあり得ないわけだが、自己重力系ではそうではないというのはすでにビリアル定理のところでやった通りである。

つまり、自己重力系を全体として考えると、熱を奪うと系が小さくなり、単位質量あたりの運動エネルギー、すなわち温度が大きくなるわけである。

断熱壁で囲んだ系では話はもう少しややこしいが、実際に、十分温度が低い、重力の影響が大きいような系では ΔS^2 が正になるということを示したのが Hachisu & Sugimoto である。

この解析は非常に見事なものなので、是非元論文 (PTP 60, 13) を読んで見て欲しい。まあ、それはそれとして、ここではもう少し違った解析方法をとってみよう。

3.1 等温状態からの時間発展

Hachisu & Sugimoto の方法では、摂動に対して ΔS^2 を求め、その符号から安定か不安定かを決めている。この方法では、もちろん、熱力学的に安定かどうかをきめることは出来るが、不安定性がどのように発展するかを調べることはできない。というのは、そのためには熱伝導の式もカップルさせて線形応答を求めないといけないのに、そのような解析は行なっていないからである。というわけで、しばらく前にそういう解析をやってみた (Makino and Hut 1991、APJ 383, 181) ので、今日はその結果に基づいて話す。

熱伝導の式は

$$K\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{L}{4\pi r^2} \tag{12}$$

と書ける。ここで、 $L(r)$ は半径 r のところでの熱流束であり、 K は熱伝導の係数である。K は温度、密度の関数だが、ここでは等温に近いので密度だけの関数として

$$K = \rho^\alpha \tag{13}$$

という形を仮定する。放射伝達であれば $\alpha = -1$ である。

自己重力質点系の場合は、密度が高いほうが緩和が速かった。このことを熱伝導係数でむりやりに表現すると、$\alpha = 1$ となる。

これは以下のように考えたことになっている。

速度分散が同じなら緩和時間 T は単純に密度 ρ に反比例する。自己重力系を考えると、やはり速度分散が同じなら系の特徴的な大きさ R は質量 $M \sim \rho R^3$ に比例するので、 $\rho \sim R^{-2}$ なる関係がある。

緩和時間を温度勾配と単位面積当りの熱流束の関係に直してみると、温度勾配は $1/R \sim \rho^{1/2}$ の程度、 単位面積当りの熱流束は $\rho R/T \sim \rho^{3/2}$ の程度である。従って $K \sim \rho$ ということになる。

エントロピーについての式は

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -4\pi r^2 \rho T \frac{\partial s}{\partial t}|_M. \tag{14}$$

で与えられ、境界条件は

$$L = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \quad \text{and} \quad M = 1. \tag{15}$$

ということになる。

3.2 線形化した方程式

微小な摂動に δ をつけることにして、線形化した方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta \ln p}{dM} &= \frac{M}{4\pi p r^4}(\delta \ln p + 4\delta \ln r), && (16)\\
\frac{d\delta \ln r}{dM} &= -\frac{1}{4\pi r^3 \rho}(3\delta \ln r + \delta \ln \rho), && (17)\\
\delta \ln p &= \delta \ln \rho + \delta \ln T, && (18)\\
\delta s &= \frac{3}{2}\delta \ln T - \delta \ln \rho, && (19)\\
& && (20)
\end{aligned}$$

境界条件は

$$3\delta \ln r + \delta \ln \rho = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \tag{21}$$
$$\delta \ln r = 0 \qquad \text{for} \quad M = 1 \tag{22}$$
$$\tag{23}$$

ということになる。

熱流束とエントロピーの変化については、もとの式が線形なのでそのまま使える。つまり、 $L = \delta L$ なので、 $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \delta T}{\partial r}$ であり、また $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial \delta s}{\partial t}$ となる。これらは始めから一次の微小量しか含んでいない。

この方程式系に対して、

$$\begin{aligned}
\delta \ln p =&\quad \delta \ln p_0 e^{\lambda t}, \\
\delta \ln r =&\quad \delta \ln r_0 e^{\lambda t}, \\
\delta \ln \rho =&\quad \delta \ln \rho_0 e^{\lambda t}, \\
\delta \ln T =&\quad \delta \ln T_0 e^{\lambda t}, \\
\delta L =&\quad \delta L_0 e^{\lambda t}, \\
\delta s =&\quad \delta s_0 e^{\lambda t}.
\end{aligned} \tag{24}$$

という形をした解を捜すわけである。ここで、添字 0 がついたものは時間発展解の空間依存性を表す。線形化したので固有モードが出てきて欲しいなという解析をしているわけである。これらを線形化した方程式に入れると、固有値問題

$$\frac{d\delta \ln p_0}{dM} = \quad \frac{M}{4\pi p r^4}(\delta \ln p_0 + 4\delta \ln r_0) \quad , \tag{25}$$
$$\frac{d\delta \ln r_0}{dM} = \quad -\frac{1}{4\pi r^3 \rho}(3\delta \ln r_0 + \delta \ln \rho_0) \quad , \tag{26}$$
$$KT\frac{d\delta \ln T_0}{dM} = \quad -\frac{\delta L_0}{(4\pi r^2)^2 \rho_0} \quad , \frac{d\delta L_0}{dM} = \quad -\lambda T \delta s_0 \quad , \tag{27}$$
$$\delta \ln p_0 = \quad \delta \ln \rho_0 + \delta \ln T_0 \quad , \tag{28}$$
$$\delta s_0 = \quad \frac{3}{2}\delta \ln T_0 - \delta \ln \rho_0 \quad . \tag{29}$$

が出てくる。ただし、境界条件は

$$3\delta \ln r_0 + \delta \ln \rho_0 = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \tag{30}$$
$$\delta \ln r_0 = 0 \qquad \text{for} \quad M = 1 \tag{31}$$
$$\delta L = 0 \qquad \text{for} \quad M = 0 \tag{32}$$
$$\delta L = 0 \qquad \text{for} \quad M = 1 \tag{33}$$

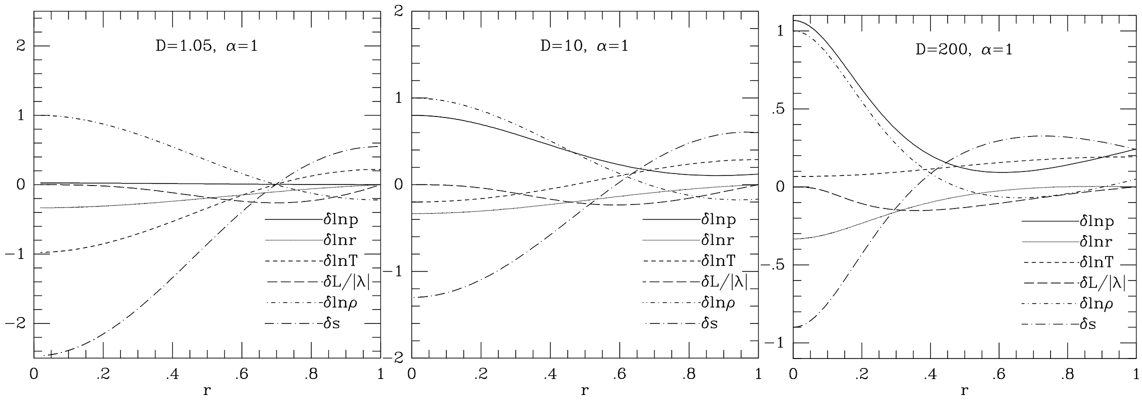
ということになる。

さて、これを解かないといけないわけだが、数値解法まで触れている余裕がないので詳細は省く。我々はいわゆる shooting method を使ったが、本当は緩和法のほうが安全であったかもしれない。

以下、どういう答が求まり、それはどういうものかということを簡単にまとめよう。

3.3 安定領域

面倒なので以下 $\alpha = 1$ の場合だけを考える。以下に示すのは第一固有値（ここではすべての固有値が負なので、最も 0 に近いもの）に対応する固有関数である。



ここで、 D は中心の密度と壁のすぐ内側での密度の比である。$D = 1$ というのは、温度が無限に高くて重力エネルギーが相対的に小さい極限である。これに対し、 $D = \infty$ は singular isothermal に対応する。

$D = 1.05$ は、要するに重力が無視できる場合である。この時はもちろん応答はベッセル関数かなにかで書ける。注意して欲しいことは、圧力の変化がないこと、エントロピーと温度がちゃんと比例関係にあることである。これは、重力が無視できるので普通の振舞いをしているわけである。つまり、密度、温度の変化が圧力変化がなくなるように働く。これは、静水圧平衡を保つためである。

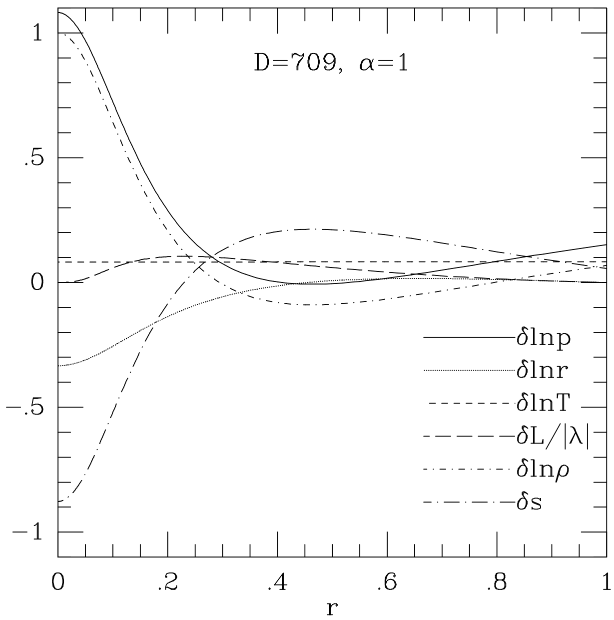
なお、ここでは、中心から熱を奪って外に与えるようなものを考えているが、その逆も固有関数であることに注意してほしい。これは、線形化した方程式の解だからである。

さて、少し中心密度を上げると、摂動に対する圧力の応答が変わって、中心で圧力が上がるようになる。これは、熱を奪われることに応答して縮むと、重力も強くなるので、つじつまをあわせるにはもうすこし縮んで圧力を上げる必要が起きるからである。このために、温度の応答は与えたエントロピーからはずれてくる。もっとどんどん温度をさげて、D を大きくすると、ついには、熱を奪ったにもかかわらず、温度が中心でも上昇するようになる。

もちろん、この解は負の固有値に対応するものであり、いぜんとして安定である。それは、温度勾配としては依然として中心に向かって下がっていて、ちゃんとエントロピー変化を打ち消す向きに熱がながれるからである。

3.4　中立安定

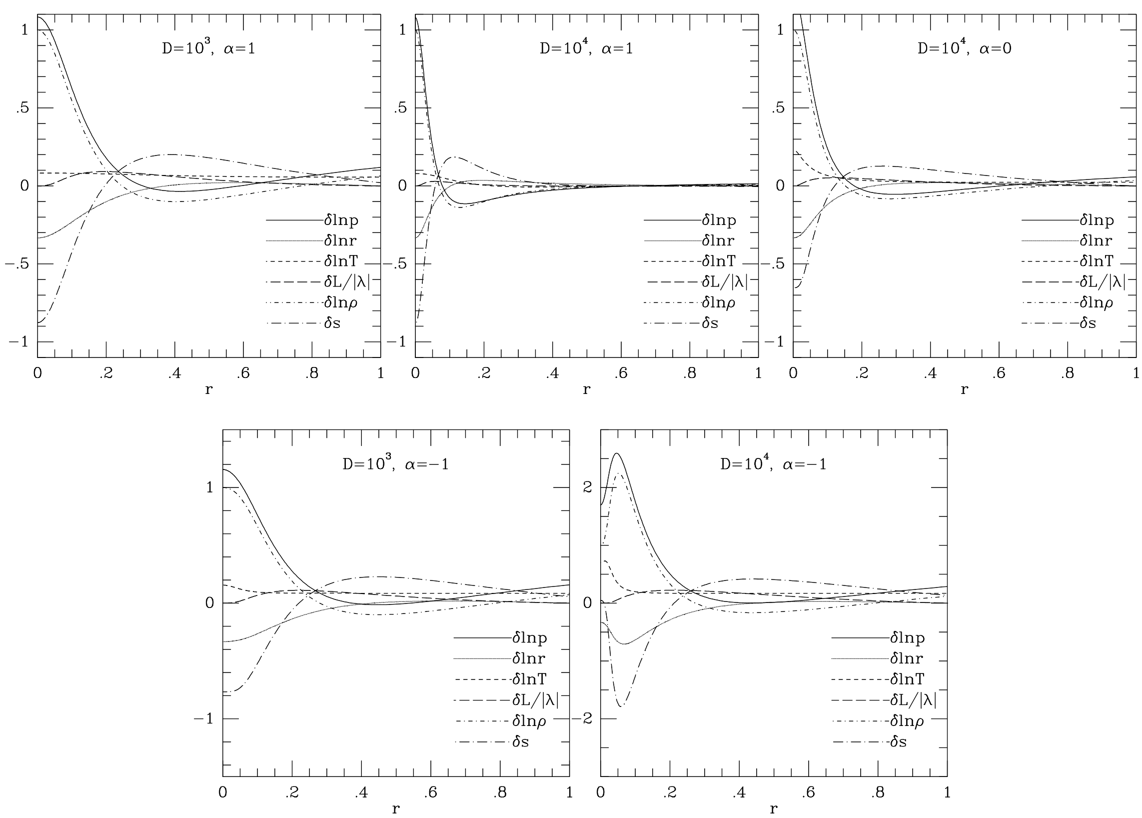
さて、もっと D を大きくすると、ついには固有値が 0、すなわち与えられた摂動が減衰しなくなる。この状況を以下に示す。



与えられた摂動が減衰しないということは、温度勾配ができないということである。実際、応答は δT が定数になっている。

3.5　重力熱力学的安定

さらにもっと温度を下げ、D を大きくすると、ついには固有値が正になる。以下にいくつかの例を示す



たくさん例を出したが、どの場合でも中心でエントロピーが減っているのに温度が大きく上がり、それが外側の温度上昇を追い越している。その結果中心から外に向かう熱流ができるのである。

なお、ちょっと注意して欲しいのは、α の値によって応答が大きく違うことである。D が同じ時、$\alpha = 1$ の方が $\alpha = -1$ に比べて中心に集まったような応答になっている。これは、熱伝導が密度の高いところで速いためと考えて良い。

なお、以下で関係するのでここで述べておくが、D の値と系の全エネルギーの間の関係は単純ではない。安定領域では D を大きくするためには系を冷やせばよく、したがってエネルギーと D は一対一に対応する。しかし、$D = 709$ の中立安定点はエネルギーの極小値になっていて、これよりエネルギーの低い熱平衡解は存在しない。言い換えれば、$D > 709$ の解には、それと同じエネルギーをもった安定解が常に存在する。

3.6 Hachisu and Sugimoto の解析の意味

HS は、安定性の問題を δs に対する変分問題として定式化した。具体的には、局所的なエントロピーの 2 次の変分 (1 次の変分は定義により 0 なので) を計算し、それを最大化する δs を固有値問題を解く形で求めている。つまり、

$$\int_0^1 \delta s dM = 0, \tag{34}$$

$$\int_0^1 \delta s^2 dM = 1. \tag{35}$$

という制約を加えた上で、系全体のエントロピー変化を最大化しているわけである。

これに対応する固有値問題は

$$\Lambda \left[\frac{d}{dM} \left(\frac{5p^2r^7}{TM} \frac{d}{dM} \right) - \frac{3}{8} \right] \delta s + \delta s + \frac{3}{8} = 0, \tag{36}$$

ちょっと書き換えると

$$\xi \frac{d}{dM} \left(\frac{5p^2r^7}{TM} \frac{d}{dM} \right) \delta \ln T = \delta s. \tag{37}$$

熱伝導からの我々の式を同じ形にすると

$$\frac{d}{dM} \left(4\pi r^4 \rho K \frac{d}{dM} \right) \delta \ln T = \lambda \delta s. \tag{38}$$

つまり、 HS の解析は

$$K = \frac{\rho r^3}{M}. \tag{39}$$

という形の熱伝導を考えたことに相当する。これはまあ大雑把にいって熱伝導が密度に依存しないわけで、 星の場合と恒星系の場合の中間的なものになっている。

4 来週の予定

来週は非線型領域での進化の話。