理論天体物理学特論I

牧野淳一郎

2008 年 5 月 28 日

Violent relaxation （続き）、２体緩和

1 Violent relaxation （続き）

前回は、楕円銀河がどれも良く似たような形をしているのは何故かということを説明するひとつのモデルとして、 Lynden-Bell が提唱した violent relaxation の考え方を紹介し、それが適当なものであるかどうかを検討した。

Violent relaxation の主張というのは、要するにシステムが力学平衡から遠く離れていれば、全体として振動する。その振動が系の各粒子のエネルギーを位相に依存する複雑な方法で変化させるので、これはランダムな変化と同様になり、系をある平衡状態に導くというものであった。しかし、数値実験の結果はそうなっていないし、それは基本的には上のメカニズムが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけではないということで理解できる。

それならば、楕円銀河がそれなりによく似ているということには、さらにまた別の説明が必要であるということになろう。ここでは、２つの考え方を紹介する。

1.1 N(E) の連続性

Violent relaxation で「平衡状態」にいくというわけではないにしても、楕円銀河が円盤銀河とはちがった何らかの力学的な進化、すなわち Lynden-Bell が想定したような系全体の振動のようなものを経験したと考えるのはそれほど不自然ではないであろう。

では、そのような系全体の振動というものを考えた時に、分布関数についてなにかいえることはないだろうか？実は、問題が３次元であるということから、分布関数が特徴的な性質をもつであろうということが直接にいえる。80 年代以降、このことは「何となく」理解されていたようであるが、ある程度明確に述べたのは、 IAU Symposium 127 “Structure and Synamics of Elliptical Galaxies” での Scott Tremaine (Conference Summary) と W. Jaffe (Poster) の発表であったようである。Tremaine の記録に残っている集録原稿は要領を得ないものであるので、以下 Jaffe にしたがって簡単にまとめる。

何らかの原因、例えば他の銀河と合体するとか、合体しないまでも近くを通り過ぎるとかで大きな振動が励起されたとする。すると、それが構成する各粒子のエネルギーを変化させることになる。

エネルギーが変化した粒子のなかには、もちろん、エネルギーが正、すなわち系に束縛されなくなってそのまま無限遠にいってしまうものもある。また、そうでなくても、エネルギーがある程度 0 に近ければ、一旦遠くにいって、また戻ってくる頃には系はほとんど落ちついているので、それ以上エネルギーが変化するということはない。

このような、エネルギーが 0 に近い粒子の分布というものを考えてみる。なんらかの熱平衡のようなものを考えると、このあたりに粒子がたくさんないといけないことになる。というのは、エネルギーが高いほど空間的な体積が大きいので、熱平衡になるためにはその体積にくまなく粒子を分布させる必要があるからである。熱平衡とすれば、結局エネルギーが高くなるほど粒子が多いことになって質量が発散してしまうのは前に述べた通りである。

しかし、実際にこのようなエネルギーが 0 に近い粒子が形成されるプロセスを考えてみると、このような熱平衡にいくとか質量が発散するとかいうことは起こらない。これは、このプロセスが、エネルギー 0 の平衡状態に相当する遠く離れたところで起きるのではなく、系の中心付近でしか起こらないからであり、また、このプロセスがすぐに止まってしまうからでもある。

結果として、エネルギーが 0 に近い粒子というものは確かに作られるが、その分布は熱平衡を満たすようにはならない。ではどうなると考えられるであろうか？実際にそういった粒子が出来るところを考えてみると、例えばエネルギーが正になってしまうかどうかを知っているわけではないし、どれくらいの phase volume があるかどうかということを知っているわけでもない。従って、エネルギーが 0 に近い粒子の分布は、$N(E)$ が 特異でない（発散したり 0 にいったりしなくて、おそらく微分可能である）ということによって特徴付けられると考えていいと思われる。

実際、前回例に出した van Albada の数値実験では多くの場合にそうなっていたわけである。

これは、 $N(E)$ が、 $E = 0$ の付近、すなわち、大雑把にいって $r \to \infty$ の極限で、 $N(E) = N_0 + N_0' E \cdots$ の形の展開を持ち、特に $N_0 > 0$ であるということを意味する。

1.2 N(E) から分布を？

さて、$N(E)$ について何かわかったとして、それから直ちに分布関数 f なり密度 ρ についてなにかいえるわけではない。仮に球対称を仮定したとしても、角運動量分布の自由度があるからである。以前にジーンズ方程式について議論した際に、系の中心にカスプがあるというような観測から分布関数やポテンシャルについてなにかをいうことは必ずしも可能ではないということがわかった。今回も同じような困難があるのではないだろうか？

とりあえず、困難はおいておいていろいろやってみることにしよう。定義により「十分外側」を考えるので、ポテンシャルは

$$\Phi = -M/r \tag{1}$$

で与えられるとする。単純な例として、すべての粒子が円軌道を回る、すなわち最大の角運動量を持つ場合を考える。もちろんこんなことは現実にはあり得ないが、とりあえず計算は簡単なのでいいことにしよう。円軌道の式からすぐにわかるように、

$$E = -\frac{M}{2r} \tag{2}$$

である。つまり、エネルギーが決まれば中心からの距離が決まる。したがって、密度を求めるにはヤコビアンを計算すればいい。つまり

$$dM = |4\pi r^2 \rho dr| = |N(E)dE| \tag{3}$$

と、式 2 からでる

$$\frac{dE}{dr} = \frac{M}{2r^2} \tag{4}$$

から、

$$\rho = \frac{MN(E)}{8\pi r^4} \tag{5}$$

を得る。

円軌道は特殊なので、もうちょっと違うことを考えれば違う答がでるのではないかと心配になるが、たとえば Jaffe (1987) は、等方的な場合にもやはり $\rho \propto r^{-4}$ を示している。もちろん、これもあまり信用できるわけではない、というのは、実際の粒子の分布は、角運動量に強く依存するものになっていると考えられるからである。

それなら、逆の極限、すなわち、すべての粒子が角運動量を全く持たない場合はどうであろう？実は、この場合にも円軌道と同じ結果になることがわかる。これは、実際に軌道が解けるので、エネルギーごとにある位置への滞在確率を求めて積分すれば密度が求まるが、その式から結局滞在確率が外にでてしまうからである。

もうちょっと厳密に示そう。あるエネルギー E の粒子が、中心からの距離がある範囲 $(r, r+dr)$ にいる確率が $P(E,r)dr$ で書けるとすれば、密度は

$$4\pi r^2 \rho = \int_{E_r}^{0} P(E,r)N(E)dE \tag{6}$$

で与えられる。ここで E_r は距離 r に到達できるエネルギーの最小値であり、$-M/r$ で与えられる。いま、ケプラーポテンシャルのなかでの直線軌道を考えているので、 $P(E,r)$ は書き下すことができ、特に

$$P(E,r) = P_0(r/r_E)/r_E \tag{7}$$

の形に表現できる。ここで $r_E = -M/E$ である。さらに $x = rE/M$ という変数変換を行なって適当に整理すると、

$$\rho = \frac{M}{4\pi r^4}\int_{-1}^{0} -P_0(x)xN(Mx/r)dx \tag{8}$$

これから、 $r \to \infty$ の極限で、積分の中が収束することがわかる。従って、すべてが radial orbit の場合も円軌道の場合もおなじことになる。

それでも一般に J に分布があったら違うのではと心配になる向きは、実際に計算してみよう。つまり、 $N(E,J)$ の形で実際に分布を与え、J についての依存性にどのような制約があれば上と同様の結果が得られるか調べてみよう。ここでは結論だけを述べておくと、かなりゆるい条件のもとで OK であることがわかっている。

1.3 N(E) についてのまとめ

結局、比較的一般的な条件として、自己重力系で力学平衡から大きくずれた振動などを経験した場合には、 $N(E)$ が $E \sim 0$ で連続という条件から、 $\rho \sim r^{-4}$ という結論が出せる。これは、前にモデルのところででてきた Hernquist model や Jaffe model に共通な性質であり、これらは、（中心部の構造が全く違うにも関わらず）どちらも楕円銀河に良く合うとされている。「観測的に楕円銀河の性質が共通である」というのはその程度の意味であると考えるべきかもしれない。つまり、基本的には外側のほうで $\rho \sim r^{-4}$ に漸近していくような構造というのが本質ではないかと考えられる。

1.4 中心部の構造

さて、それでは、中心部の構造についてはなにもいえないのであろうか？これは実はまだ良くわかっていない問題である。10 年前に、 Navarro たち （ApJ 1997, 490, 493) は、数値計算の結果をもとに以下のような主張をした

- CDM シナリオによる構造形成を考えた時、 CDM が作る自己重力系（ガスとか星を考えない）は

$$\rho \propto \frac{1}{r_*(1+r_*)^2} \tag{9}$$

の形に書ける

- この形はユニバーサルで、例えば一つの銀河でも銀河団でも同じである

これは、極めて有名になった NFW プロファイルである。

彼らはなぜそのようなことが起きるかについての解釈とか説明は特に与えていないが、例えば Syer and White (MN 1998, 293, 337) といった人達が説明を考えてはいる。

しかし、実は、Navarro たちの結果の解釈は割合すぐに異論がでており、 CDM と初期条件を制限しても、例えば Fukushige and Makino (ApJ 1997, 477 L9) とか Moore et al. (ApJ 1998, 499, 5L) を見ると、上の「ユニバーサル」な形になったのは数値誤差のせいという主張がなされている。これらの結果では Navarro たちのものより中心で等温に近くなっている。 Navarro らの結果は 1 万粒子程度であるが、 Fukushige ら、 Moore らは 100 万粒子程度であり、数値誤差の影響が小さくなっていることは間違いない。「真の」のスロープがどうなるかについては現在も活発な研究が続いているが、現時点では、CDM からの数値実験でできるハローの中心部は NFW よりもスロープの傾きが大きいということはほぼ万人の認めるところになったようである。

全く余談であるが、福重君はこの仕事とその続きで天文学会研究奨励賞をもらった。

さらにもっと余談であるが、福重君がこの計算をした動機は、1996 年に GRAPE-4 を使って何か大きな計算で高い実効性能を出したい (Gordon Bell Prize に応募したい)、そのためにはとにかく粒子数が沢山必要で、普通の treecode とかではできないようなシミュレーションでよいネタがないか？とか色々考えたことである。

つまり、現状では、中心部（というか、half mass radius より内側）の構造は、

- 第 0 近似としては半径の -1.5 乗程度のカスプになる。
- どういうメカニズムでそうなるかはまだよくわからない

という状況であるといえる。

2　2 体緩和

2.1　前置き

さて、この講義も回数ではすでにほぼ半分弱が終り、当初予定していた

(1) 支配方程式（無衝突ボルツマン方程式）

(2) 球対称の力学平衡モデル

(3) ジーンズ不安定と力学平衡への緩和過程

(4) ２体緩和

(5) 重力熱力学的不安定と重力熱力学的振動

(6) 連星形成とその影響

(7) 中心ブラックホールのある恒星系

(8) その他

のうちの最初の３つまでが済んだということになる。もっとも、それぞれ大きなテーマであり、力学平衡モデルについては軸対称、あるいは３軸不等なモデル、あるいはディスク系とその不安定モードなどについては全く扱えていない。力学平衡への緩和過程についても、例えば合体の場合、あるいは理想化された１次元系を例にとって具体的な話をする必要もあったかもしれない。が、しかし、世の中は無衝突系だけではないし、また、現実は無衝突系である場合でも、それを数値的にモデル化したものはそうでなくなってしまうことがある。従って、衝突系の進化がどのようなものかということは、実際になんらかの自己重力系を扱う場合には必ず理解しておく必要がある。というわけで、これから数回で衝突系の進化というものを考えることにする。

2.2 ２体緩和とはなにか？

まず、２体緩和とはいったいどういうものかというところから話を始めることにする。原理的には、これがなにかというのは結構厄介な問題である。

有限粒子数の自己重力多体系を考えると、これは以下のような進化をすると考えられる。まず、最初は力学平衡になかったとすると、とりあえず力学平衡に落ちつく。粒子数が無限大であれば、無限に細かく見れば無限に時間がたっても真の力学平衡に到達するわけではないが、まあ、漸近はしていく。この時、各粒子は与えられたポテンシャルの中を運動するだけになり、それ以上進化することはなくなる。

さて、実際には有限粒子数であるので、そもそも真の力学平衡というものはない。有限の質量をもった各粒子が系の中を運動するに従って、ポテンシャルは必ず変化するからである。この変化によって各粒子の軌道も変化することになる。

それでは、粒子の軌道の変化を、粒子数が有限であることから来る成分とそれ以外に分離することは可能であろうか？これは、系が力学平衡にあるとみなすことができればそれは可能である。つまり、力学平衡にあれば、粒子のエネルギー変化は定義によりすべて粒子数が有限であることによるからである。

が、良く考えると問題なのは、そもそも有限粒子数であるものを力学平衡とみなすとはどういうことかということである。このあたりを考えていると段々混乱してくるので、まず、理想化された状況から考えていくことにしよう。

2.3 理想化：一様等方な分布

理想化といえば例によって一様等方な分布を仮定することである。例えばマックスウェル分布があって、その中の一つの粒子をとって考えるということをしたいわけだが、これは結構厄介なのでさらに簡単な例を考える。すなわち、速度 0 で空間内に一様（ランダム）に分布した質点を考え、その中を質量 0 のテスト粒子を飛ばして見る。

もちろん、この場合エネルギー交換はないので速度は変わらず、単に散乱されるだけだが、しかし、この例は２体緩和のいくつかの重要な性質を示すのですこし詳しく見ていくことにする。分布して

いる質点の質量を m、数密度を n とする。テスト粒子が一つの粒子から距離（インパクトパラメータ） b を速度 v で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{2b}{(b/b_0)^2-1} \\ b_0 &= \frac{Gm}{v^2} \end{aligned} \tag{10}$$

で与えられる。単位時間当たり、インパクトパラメータが $(b, b+db)$ の範囲にある散乱の回数は $2\pi nvbdb$ である。

さて、散乱の方向はランダムであると思われるので、平均としては（一次の項は）0 になる。しかし、 2 次の項は 0 にならない。これは

$$< \Delta\theta^2 >= 2\pi nv \int_0^{b_{max}} \delta\theta^2 bdb \tag{11}$$

で与えられることになる。

この式から既にいろいろな性質がわかる。が、その前に理論的な困難を解決しておく必要があるであろう。すなわち、この積分は $b \to \infty$ で発散しているのである。これについてはいくつかの考え方があった。例えば、初めて 2 体緩和の性質を理論的に調べた Chandrasekhar は、以下のように考えた。

「平均粒子間距離よりもインパクトパラメータが大きいような散乱は、多体の干渉によって効かなくなるのでそこで積分を打ち切ってよい」

しかし、多体の干渉というようなものが実際にあるかどうかはあきらかではない。もっと素直な解釈は、実際に系にあるすべての粒子と常に同時に相互作用しているのだから、システムサイズくらいまで全部いれる（系が構造を持つ場合はちょっとややこしいが、密度の空間依存も積分のなかに入れて全空間で積分する）というものである。

数値実験の結果などから、後者の解釈すなわち全体が効くというほうが正しいということはかなり昔から大体わかっていた。歴史的には、どちらの解釈が正しいかについてはかなり最近まで論争があって、完全に決着がついたといえるのは 94-5 年頃である。が、これはまあそういうことをいっている人もいたっていうくらいのもので、定説となっているのは後者である。現在では後者の解釈が正しいということに疑いの余地はない。

上の式から、適当に近似すると

$$< \Delta\theta^2 >\sim Gnv^{-3}m^2\log(R/r_0) \tag{12}$$

となる。ここで R は先に述べたシステムの大きさ、 r_0 は「大きく曲がる」ためのインパクトパラメータの値で、$b_0 = GM/v^2$ の程度である。

さて、これからどんなことがわかるかというわけだが、これから、逆に角度変化が 1 の程度になる時間というのを求めてみると、

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2\log\Lambda} \tag{13}$$

となる。ここで Λ は上の R/r_0 を単に書き換えただけである。

今、$\log\Lambda$ の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の 3 乗、数密度の逆数、質量の 2 乗の逆数に比例するということがわかったことになる。特に、質量密度一定の場合というものを考えてみると、タイムスケールが各粒子の質量に比例するということがわかる。

ある大きさを持った多体系というものを考えてみよう。質量 M、特徴的な半径（ビリアル半径か何か） R、粒子数 N とすれば、ビリアル定理から $v^2/2 = GM/R$、力学的なタイムスケールが

$t_d \sim \sqrt{R^3/GM}$ となる。これを使うと上の緩和のタイムスケールは

$$t_\theta \sim \frac{N}{\log N} t_d \tag{14}$$

となる。粒子数が大きいほど無衝突系に近付くのだから、まあ、当然の結果といえなくもない。

3　来週の予定

来週は、まず、回りが動いていて自分も質量を持っている場合に上の解析を拡張し、エネルギーの緩和のようすをちゃんと調べる。次に「理想的な衝突系」として、断熱壁で囲まれた多体系（および流体）を考え、その振舞いについて調べる。