理論天体物理学特論 I

牧野淳一郎

2003 年 11 月 16 日

1 ジーンズ不安定

ここまで、自己重力多体系の平衡形状を (ごく簡単な場合だけ) 扱ってきたが、そろそろ飽きてきたような気もするので、これからは平衡形状ではなく時間発展について考えることにしたい。

時間発展といっても、もとの方程式が強い非線形性を (加速度の項に) 持つので、一般的な場合を解析的に扱うことはほとんど出来ない。そこで、まず、平衡状態から無限小だけずれている場合に対して線形化した発展を考えるということにする。さらに、話を簡単にするために、「無限一様」な平衡状態とし、まず CBE ではなく流体の話を考える。

1.1 流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Phi \tag{2}$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{3}$$

で記述される。さらに状態方程式がいる。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいいが)

今、 $\rho, p, \mathbf{v}, \Phi$ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好にして、添字 0 がつくものはもとの方程式の平衡解であり、 1 がつくものは小さい (二次以上の項を無視していい) として方程式を書き直すと

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{5}$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \tag{6}$$

$$p_1 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_1 = v_s^2 \rho_1 \tag{7}$$

ここで v_s は音速である。

既に述べたように、無限一様でいたるところ密度、圧力が等しいというのが平衡で、速度も 0 だったとすると、上の 2 本は

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{9}$$

となる。下 2 本は見かけはかわらない。これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \tag{10}$$

さて、めでたく方程式が線形化されたので、分散関係を求めれば算数はおしまいだが、まずその前にどういう方程式かということを見ておこう。

最初の 2 項をみれば普通の波動方程式で、最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。したがって、波長が短い極限では普通の波動方程式に近付く。これに対し、波長が長い極限では空間 2 階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\rho_1 = C e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \tag{11}$$

として代入すれば

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \tag{12}$$

ということになる。したがって、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \tag{13}$$

と書くと、

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的 (普通の音波と同じ)
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない (中立安定)
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある (不安定)。

なお、一応念のために書いておくと、式 (11) の形の解だけを考えるのは任意の初期条件からの解が (連続性とかを仮定すれば) この形の解の線形結合で表現できるからである。解の線形結合が解であるのは方程式が線形だからであり、任意の解が表現できるのは要するにフーリエ変換が完全系をなすからである。

話を戻すと、定性的に見たときにわかったように、波長が短ければ普通の音波として振舞うが、波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化することになる。つまり、密度が上がり始めたらどんどんあがる (下がり始めたらどんどんさがる) ということになる。

ここで注意して欲しいのは、十分に波長が長いと必ず不安定になるということである。これはつまり、重力があると無限に一様な状態というのは温度無限大でない限り必ず不安定であるということである。

さて、 k_J というのは直観的にはどういうものかというのを考えてみる。k_J は波数なので、その逆数に 2π を掛けると波長になる。これをジーンズ波長 λ_J といって、式にすると

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} v_s \tag{14}$$

である。

今、半径がジーンズ波長くらいの球を考えてみる。これの単位質量当りの運動エネルギー (熱エネルギー) は、もちろん v_s^2 の程度である。これに対して重力エネルギーは GM_J/λ_J の程度、ここで M_J はジーンズ質量で半径 λ_J の球の質量である。 λ_J に上の式を入れて計算すると、結局重力エネルギーが定数を別にして v_s^2 の程度になることがわかる。

つまり、熱エネルギーより重力エネルギーが大きくなるような長さの摂動は成長するということになる。

2 恒星系でのジーンズ不安定とランダウ減衰

いよいよ (と気張るほどのこともないが) 恒星系の場合を考えることにしよう。

3 CBE の線形化

何度も出てきたがもう一回式を書いておく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{15}$$

ここで f は 6 次元位相空間での分布関数である。Φ は重力ポテンシャルであり、以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho. \tag{16}$$

G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m\int d\mathbf{v} f, \tag{17}$$

である。これを流体の時と同様に線形化して、その振舞いを調べる。分布関数を $f_0 + f_1$、ポテンシャルを $\Phi_0 + \Phi_1$ とし、添字 0 がつくほうは定常解であるとして式を整理すれば

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_1 - \nabla\Phi_0\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} - \nabla\Phi_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{18}$$

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi G\int f_1 d\mathbf{v}. \tag{19}$$

ということになる。これが線形化された無衝突ボルツマン方程式である。

4 Jeans 不安定

上の線形化されたボルツマン方程式は、平衡解の回りならば何でも使えるが、ここではもっとも簡単に解析できる場合として空間分布が一様な場合を考える。これから f_0 は速度だけの関数であり、Φ_0 は定数としていいことになるので

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_1 - \nabla\Phi_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{20}$$

と少し式が簡単になる。まず、流体の場合と同じような平面波型の解を考えてみよう。

$$f_1 = f_a(\mathbf{v})\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)] \tag{21}$$

$$\Phi_1 = \Phi_a\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)] \tag{22}$$

速度空間の方にも伝わっていく波とかいうのも考えられないわけではないが、とりあえずそういうのは考えない。これらを上の線形化した式に入れれば

$$(-\omega + \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})f_a(\mathbf{v}) - \Phi_a \mathbf{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{23}$$

$$-k^2\Phi_a = 4\pi G\int f_a d\mathbf{v} \tag{24}$$

となる。これらから f_a を消せば、 Φ_a も落ちて

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2}\int \frac{\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega}d\mathbf{v} = 0 \tag{25}$$

となって、f_0 が与えられていれば k と ω の関係、すなわち分散関係を与える。

もっとも、これはちょっと困った式で、 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega = 0$ が特異点になっている。したがって、実数の振動数を考えるのはすこし厄介な話になる。まず、臨界点、すなわち振動数が 0 の場合と、不安定、すなわち振動数が純虚数の場合を考えよう。

5 臨界点

式が繁雑なので、いま、波数ベクトルを x 軸方向にとることにすると、分散関係は

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2}\int \frac{k\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{kv_x-\omega}d\mathbf{v} = 0 \tag{26}$$

臨界安定で $\omega = 0$ とすれば、結局

$$k_J^2 = -4\pi G\int \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{v_x}d\mathbf{v} \tag{27}$$

となる。 f_0 が $v_x = 0$ で有限で微分可能なら積分は求まるので、これから $\omega = 0$ となる波数 k_J は決まる。

流体の場合と対応をつけるために、速度分布 f_0 をマックスウェル分布

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{28}$$

にしてみる。これは例によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv = \sqrt{2\pi\sigma^2} \tag{29}$$

を使って全部積分できて、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{\sigma^2} \tag{30}$$

となる。これは、流体の場合と同じになっている。つまり、中立安定な波長 (ジーンズ波長) は、恒星系と流体で同じである。

6 不安定な場合

次に、振動数が純虚数の場合を考えてみる。この時は、$\omega = i\gamma$ として元の式にマックスウェル分布を入れて整理すると

$$1 + \frac{2\sqrt{2}\pi G\rho_0}{k\sigma^3}\int \frac{v_x e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{kv_x - i\gamma}dv_x = 0 \tag{31}$$

ここで、被積分関数の分母を実数にするために

$$\frac{v_x(kv_x + i\gamma)e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{k^2v_x^2 + \gamma^2}dv_x = 0 \tag{32}$$

と書き直すと、虚部は奇関数なので落ちる。実部は

$$\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}}{x^2+\beta^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\pi\beta e^{\beta^2}[1 - \mathrm{erf}(\beta)] \tag{33}$$

なる関係を使って

$$k^2 = k_J^2\left\{1 - \frac{\sqrt{\pi}\gamma}{\sqrt{2}k\sigma}\exp\left(\frac{\gamma^2}{2k^2\sigma^2}\right)\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}k\sigma}\right)\right]\right\} \tag{34}$$

なんだかよくわからないが、まあ、 k と ω (γ) の関係を与えてはいる。 $k < k_J$ なら、ある実数 γ (正負どちらでも) があって上を満たす。ただし、 $k = k_J$ の場合と $k = 0$ の極限を除いては、値は流体の場合とは一致しない。

というわけで、波長がジーンズ波長よりも長いモードは流体と同様不安定で、勝手に成長することになる。

7 van Kampen mode

さて、それでは、音波に当たるような振動数が純実数のモードというものはあるのだろうか？これについては、 BT を含めて標準的な教科書でも若干混乱した記述がなされていることがある。以下、van Kampen の論文 (1955, Physica, 21, 949) に沿った理解を試みることにする。分散関係の一つ前の式に戻ってみると、

$$(-\omega + \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})f_a(\mathbf{v}) + \frac{4\pi G}{k^2}\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}\int f_a d\mathbf{v} = 0 \tag{35}$$

となっている。面倒なのでまた y, z 方向についてはあらかじめ積分すると、

$$(-\omega + kv_x)g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x}{k}f_0(v_x)\int g dv_x = 0 \tag{36}$$

ただし、g は f_a を y, z 方向に積分したものである。また、 f_0 は等方的であるとし、さらに

$$\int\int v^{-1}\frac{df_0}{dv}dv_y dv_z = -2\pi f_0(v_x) \tag{37}$$

なる関係を使った。これは、v_x 一定の平面上で極座標に変換すればすぐに出てくる。上の式は g についての線形斉次な方程式で、

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G}{k}\frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - kv_x} \tag{38}$$

という解を持つ。ここでは、 $\int g dv_x = 1$ となるように規格化した。ただし、意味のある解であるためには

$$-\frac{8\pi^2 G}{k}\int\frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - kv_x}dv_x = 1 \tag{39}$$

を満たすようになっている必要がある。これは、最初に出した分散関係と実は同じ式である。

最初にもいったように、この式がよろしくないのは $v = \omega/k$ で積分が特異になるからである。意味のある解を求める一つの考え方は、 g を超関数に拡張してしまうことである：

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x f_0(v_x)}{k}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\omega - kv_x} + \lambda\delta(\omega - kv_x)\right] \tag{40}$$

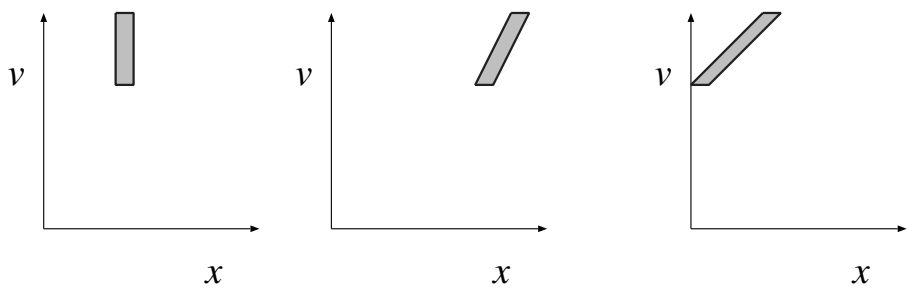
ここで $\mathcal{P}$ は主値をとるということで、要するに積分の不定性を δ 関数のほうに押しつけてみたというだけである。実際に、規格化を満たすという条件から λ の値を決めることができる。この「モード」は、任意の ω と $k > k_J$ なる k のすべての組合せに対して存在する。これを van Kampen mode という。

これがいったいどういうものかを少し考えてみよう。まず、 δ 関数の分は、$v_x = \omega/k$ のところにだけ値があるということを示している。つまり、位相速度が摂動を受けていないもともとの速度と等しい、いいかえれば与えたものがそのままラグランジュ的に動いていくようなものである。これは、いま重力がまったくない極限を考えれば、単に摂動がまわりと相互作用することなくそのまま動いていくというものであると考えられる。これにたいして、もう一つの項は重力による応答を示していると考えていい。

このへんはちょっとお話しになって申し訳ない (詳細を知りたいひとは van Kampen の原論文に当たってほしい) が、 van Kampen モードは完備であることがわかっている。つまり、任意の摂動を van Kampen mode の組合せとして表現できる。

8 Phase Mixing

さて、任意の摂動が、減衰しないモードの組合せとして表現できるのなら、それはなにか音波のような伝わっていく波になっているのであろうか？実はそんなことはない。これは、以下の簡単な例で示すことができる。1 次元で、重力がない系である有界な領域に摂動 (overdensity) を与えたとする。で、簡単のために周期境界で、右から出ていったものが左から入ってくるとしよう。もちろん、ちゃんと適当なポテンシャルを考えるとか、無限一様な場合を考えるとかしても本質は同じである。(無限一様な場合は、単に周期的な摂動を与えたというのに対応する)



すると、時間がたつに従って摂動が引き延ばされていくということがわかる。このために、例えば密度の変化といった量は時間がたつにしたがって減衰していく。

つまり、 singular な van Kampen mode 自体は減衰しないが、それを重ね合わせた有限の広がりを持つ摂動は減衰するように見える。これが通常 phase mixing と呼ばれるものである。

9 Landau Damping

さて、モードがあって、世の中はその重ね合わせであるというのなら、それで話はおしまいではないかとおもうのが人情だが、普通はそういう話にはなっていない。というのは、 Landau Damping という難しいものがあるということになっているからである。これはどういう原理でててくるかというと、要するに複素数の ω があると信じて、そういう解を求めると、ちゃんとそういうものが見つかるというものである。つまり、摂動の速度方向の分布 f_a をうまくとってやると指数関数的に減

衰するモードがでてくる。ただし、注意して欲しいのは、これは、 f_a に制限をつけないと出てこないということである。不連続な f_a を仮定すれば、時間のベキでしか減衰しないような解を構成することも出来る。ただし、そういった解はモードの形、つまり位置、時刻の指数関数の形に単純に書けるとは限らない。

逆にいえば、解が指数関数の形に書けると仮定すれば、ジーンズ波長より短ければそれは指数関数的に減衰するわけである。

今、簡単のために重力がない一次元系を考える。この時 van Kampen mode は単なる δ 関数なので、初期の波数が k であるような摂動は

$$f_1(x,v,t) = g(v)\exp[ik(x-vt)] \tag{41}$$

という形をしている。これは、自明な解になっているということは式を良く見ればわかる。

しかし、注意して欲しいのは、これは最初に安定性解析の時に仮定した $f_a(v)\exp[i(kx-\omega t)]$ という形とは違うということである。これは、振動数 ω が v そのものであり、速度空間のなかでの位置に依存するためである。

このことをいいかえると、上のような「自然な」解があるにもかかわらず、モード解析をすると van Kampen mode のような singular なものが出てくるのは、モード解析の仮定として位相速度が粒子の速度に寄らないようなものを考えたからであるともいえる。

さて、上の「自然な」解はどのように振舞うかをちょっと見てみよう。密度は、

$$\rho_1(x,t) = e^{ikx}\int g(v)e^{ivt}dv \tag{42}$$

これから、例えば $g(v)$ が

$$g(v) = \begin{cases} 1/2v_0 & |v| < v_0 \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{43}$$

みたいなものだと、 $1/t$ で減衰するという解がでてくる。

このような減衰が起きるのは、初期条件が非常に特別なものであるためであるということに注意してほしい。つまり、速度ごとに波の位相速度が違うのに、初期条件としてその空間位相がすべてそろったものを考えたわけである。そうすると、時間がたてば位相はずれていくので速度方向に積分して見た波の振幅は小さくなってくことになる。これは、速度方向の「波数」に時間が生で入ってくるためである。

なお、 $g(v)$ に適当な形を仮定すれば、もっと速く減衰するものも作れる。

もちろん、無衝突ボルツマン方程式にしたがった進化は可逆過程である (エントロピーを生成しない) ので、原理的には逆に振幅が大きくなるような初期条件も存在していないといけない。実際、減衰していく解で、どこかで時間反転すればそういう解が作れるわけである。

なお、今日の話で要領を得ないと思った人は、、、この辺は基本的で大事な問題であるわりにはあまり良いテキストも論文もないので、なかなか難しい。

10 来週の予定

来週は、粗視化エントロピーの概念を導入し、いわゆる violent relaxation 「激しい緩和」といわれるものの性質について考える。で、Phase mixing の意味ももう一度考え直してみる。