# 理論天体物理学特論 I

牧野淳一郎

2003 年 11 月 9 日

## 1 ジーンズ方程式、ビリアル定理

## 2 Jeans Equations

ここまでは、 Collisionless Boltzman 方程式から出発して、 Jeans の定理を使って球対称な恒星系のモデルをいろいろ見てきた。これから 2 回程度、Collisionless Boltzman 方程式のいろいろな平均 ( モーメント ) をとることによって恒星系の性質を見ていくことにする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{1}$$

Collisionless Boltzman 方程式は式 1 で与えられるが、これをまず速度空間全体で積分してみる。と、まず第 3 項は発散定理によって表面積分に置き換えられ、$|v|\to\infty$ の極限で $f$ は十分速く 0 にいくので ( 普通は有限の $|v|$ で 0 になってないと、自己重力的にならない )、結局 0 になる。最初の 2 項は

$$\nu = \int f d^3\mathbf{v}; \bar{v}_i = \frac{1}{\nu}\int f v_i d^3\mathbf{v} \tag{2}$$

と置いてやれば ( 密度と、局所的な平均速度 )

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

これは、流体の場合の連続の式と同じものである。さらに、速度の 1 次のモーメントをとるために Collisionless Boltzman に $v_j$ を掛けて積分してみると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f v_j d^3\mathbf{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\int v_j\frac{\partial f}{\partial v_i}d^3\mathbf{v} = 0, \tag{4}$$

というような式が出てくる。但し、 $i$ についての和をとっていることに注意。

さて、$v_j f$ について発散定理 ( 1 次元 ) を使えば

$$\int v_j\frac{\partial f}{\partial v_i}d^3\mathbf{v} = -\int\frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3\mathbf{v} = -\delta_{ij}\nu \tag{5}$$

となるので、結局

$$\frac{\partial(\nu\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 \tag{6}$$

但し、 $\overline{v_i v_j}$ は $v_i v_j$ の局所平均である。もうちょっと見通しの立つ式にするために、まず連続の式を使って第一項から $\partial\nu/\partial t$ を消すと

$$\nu\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j\frac{\partial(\nu\bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu\overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 \tag{7}$$

さらに、

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} \tag{8}$$

を使って書き直すと

$$\nu\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu\bar{v}_i\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu\frac{\partial\Phi}{x_j} - \frac{\partial(\nu\sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \tag{9}$$

これは、流体の場合のオイラー方程式 ( 運動方程式 ) と大体同じ格好になっている。左辺は平均の流れに沿ってみた平均速度の Lagrange 微分であり、右辺第一項はポテンシャルから力である。

最後の項は普通なら圧力の項が出てくる。流体と違うのは、ここが非等方的な stress tensor $\sigma_{ij}^2$ になっているということである。

なお、いうまでもないが、速度分布が等方的であれば stress tensor は $\sigma^2 I$ ( $I$ は単位行列 ) の形に書ける。さらに、等方的でない場合には、$\sigma^2$ は対称テンソルなので適当な座標系の回転により対角化出来る。例えば $f(E,L)$ で書ける時には、一つの軸を原点に向けてとれば対角化されるわけである。

### 2.1 例：球対称恒星系の $M/L$

密度分布が球対称で平均の流れがない場合、極座標系での Jeans equation は以下の形に書き直せる :

$$\frac{d(\nu\overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r}\left[2\overline{v_r^2} - \left(\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2}\right)\right] = -\nu\frac{d\Phi}{dr} \tag{10}$$

( 証明は、、、まあ、面倒なだけなので省略 ) もうちょっと話を簡単にするために、等方的な場合を考えると、結局

$$\frac{1}{\nu}\frac{d(\nu\overline{v_r^2})}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \tag{11}$$

すなわち

$$M(r) = -\frac{r\overline{v_r^2}}{G}\left(\frac{d\ln\nu}{d\ln r} + \frac{d\ln\overline{v_r^2}}{d\ln r}\right) \tag{12}$$

つまり、密度と速度分散の半径方向の分布がわかれば、質量分布が決まるということになる。

ここで注意してほしいのは、 $\nu$ は質量を反映していないもの、例えば星の数とか、あるいは単位体積あたりの luminosity の分布でも構わないということである。これは、もともとの Collisionless Boltzman 方程式は保存する量であればなんでもなり立つからである。さらに、球対称、等方を仮定したので、表面輝度分布や視線方向速度分布から輝度密度と速度分散の空間分布を求められるので、これらから「実際にどれだけの質量があるはずか」を求められるわけである。これから、 $M/L$ の空間分布が決まることになる。楕円銀河の中心に大質量ブラックホールがあるというような話は、もっとも簡単にはこのようにして質量を推定する。

なお、逆に、$M/L$ を一定として、速度の非等方性の空間分布を求めることもできる。多くの、中心に大質量ブラックホールがあるとされている楕円銀河で、非常に非等方性の高い速度分布を作れば観測された密度と速度分散の分布が説明できないわけではないということが示されている。

## 2.2　例の続き:球状星団の中心にブラックホールはあるか？

昨年の 9 月に、球状星団 M15 の中心に太陽質量の 3000 倍の質量のブラックホールを発見したという論文が発表され、 STScI がプレスリリースを大々的に行ったので日本の新聞でも報道された。記憶にある人も多いかと思う。

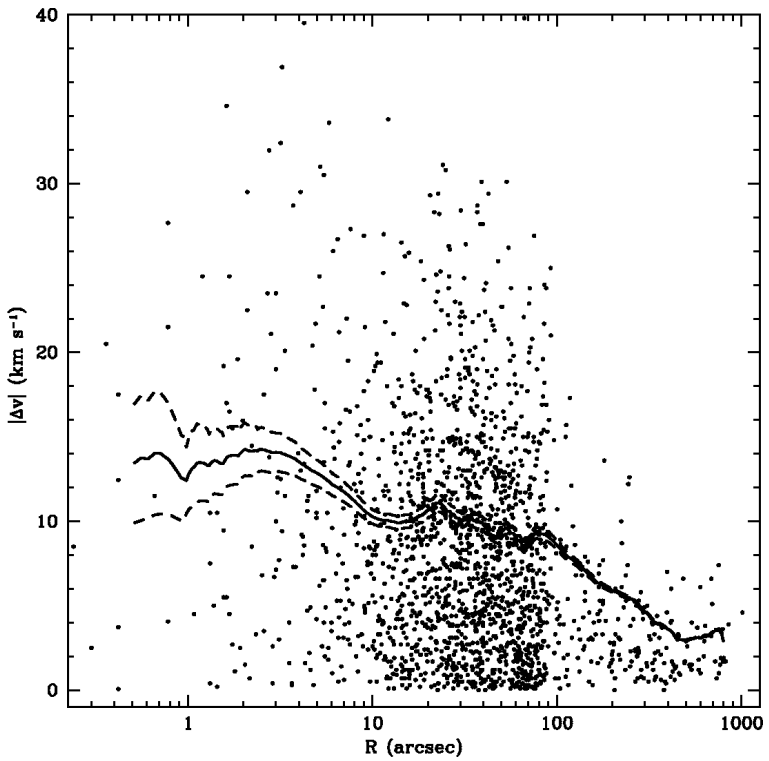
新聞発表はこんなの:

宇宙望遠鏡科学研究所のファン・デア・マレル博士が率いるチームは、ペガサス座の方向、*3*万 *2*千光年の彼方にある球状星団 *M15* にブラックホールを発見しました。彼の協力者で、やはり宇宙望遠鏡科学研究所のゲルセンは、ブラックホールの質量が太陽の *4000* 倍だということを突き止めました。

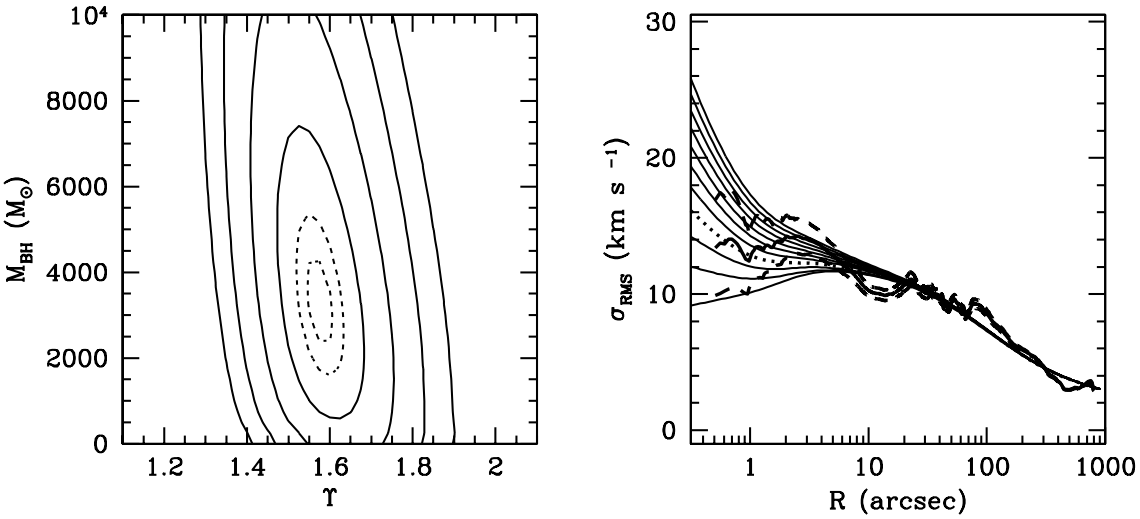
これまで、 *X* 線での観測で .... 星形成銀河に非常に明るい *X* 線源が見つかっていました。これは中間質量ブラックホールとも解釈できるものでしたが、他の解釈もできるものでした。これに対し、ハッブル *(*宇宙望遠鏡*)* による測定は、個々の星の速度に基づくもので、直接ブラックホールの質量を与えるものです。

これは、ジーンズ方程式の利用のいろんな意味で「よい」例になっているので、少し詳しく見ていこう。

まず、観測はどういうものかというとこの図



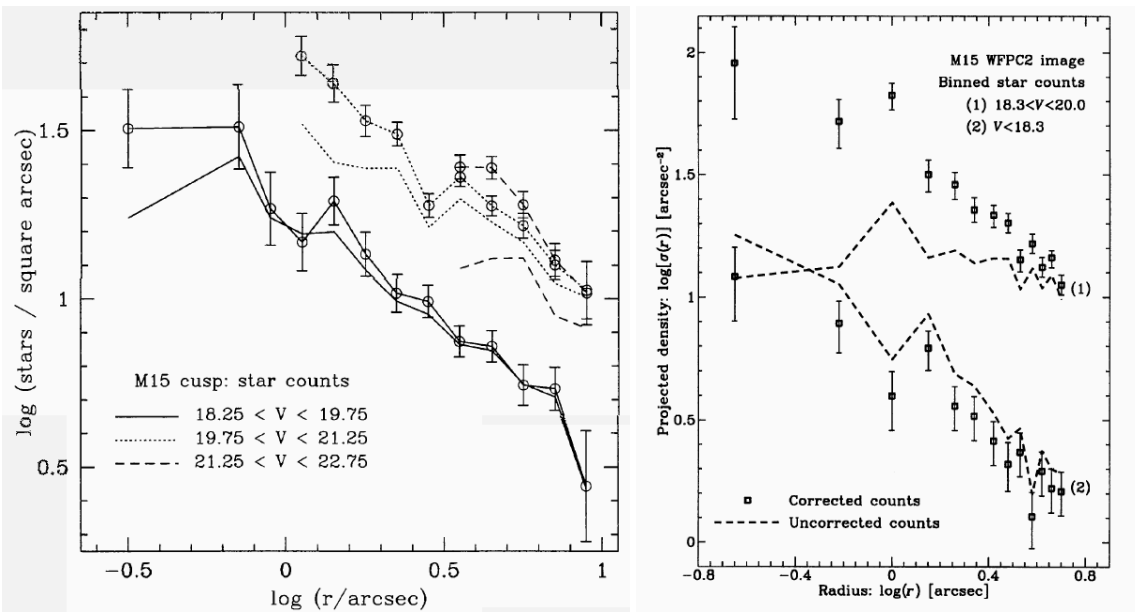

が基本である。ハッブル宇宙望遠鏡の分光器を使って、球状星団の中心部のいくつかの星の視線速度を測定し、それから速度分散を求める。で、何故ブラックホールがあることになるかというと、下の図のような話である。




つまり、

1. $M/L$ が一定と仮定して、表面輝度の分布から質量分布を求める。
2. 質量分布からジーンズ方程式を使って速度分布を求めてみる。
3. これは、定数をふってみても速度分布の観測結果とあわない
4. 中心にいろいろな質量のブラックホールを仮定して、速度分布を計算しなおす
5. $\chi^2$ 残差が最小になったところで、「ブラックホール発見!」

まあ、実に教科書通りの解析である。表面輝度はこんな感じである。




左: Sosin & King 1997, 右: Guhathakurta *et al.* 1996.

教科書通りの解析でブラックホールがあって論文になるならそれは結構なわけだが、この場合世の中はそんなに甘くない。何故かというと、球状星団では (この講義の 3-4 回後でててくる理由で) 系が熱力学的に進化しており、 $M/L$ が一定という仮定が成り立たないからである。

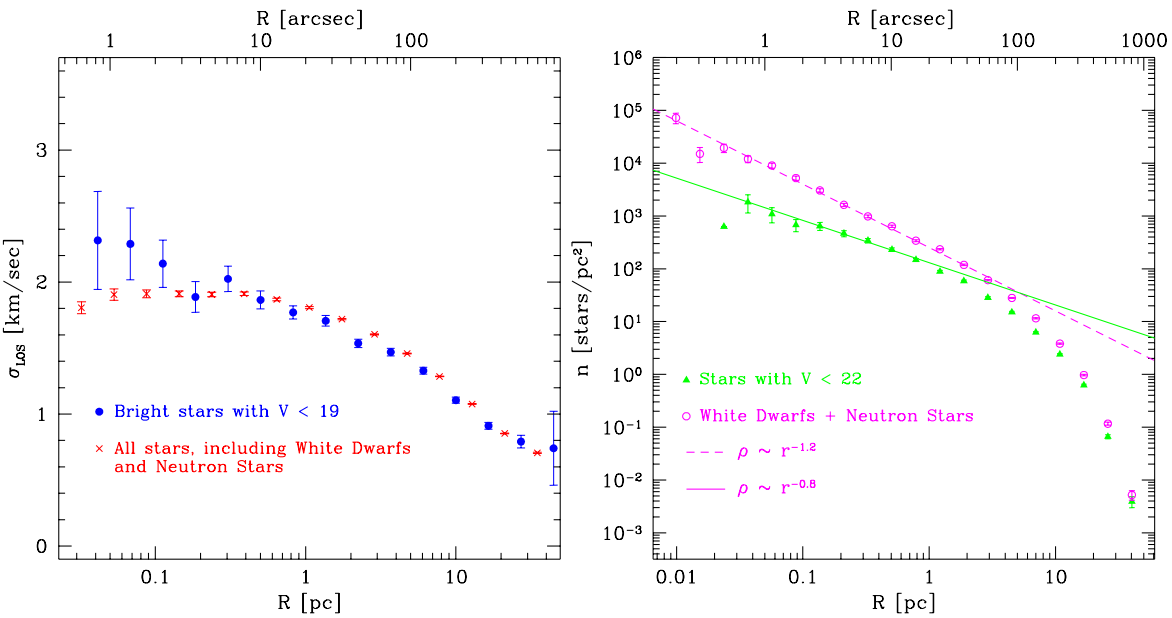
熱力学的な進化を簡単にいうと、星の系も普通のガスと同じようにエネルギー等分配を成り立たせようとする。このため、速度分散が初め同じだとすると、重い星は軽い星にエネルギーを与えて速度を小さくしようとする。

ガスなら速度が小さくなって終わりだが、恒星系ではジーンズの定理というものがあるので話はそんなに簡単ではない。つまり、重い星が軽い星にエネルギーを与えるということは、分布関数 $f$ が星の質量に依存するようになって、重い星はエネルギーが低いところに動くということになる。

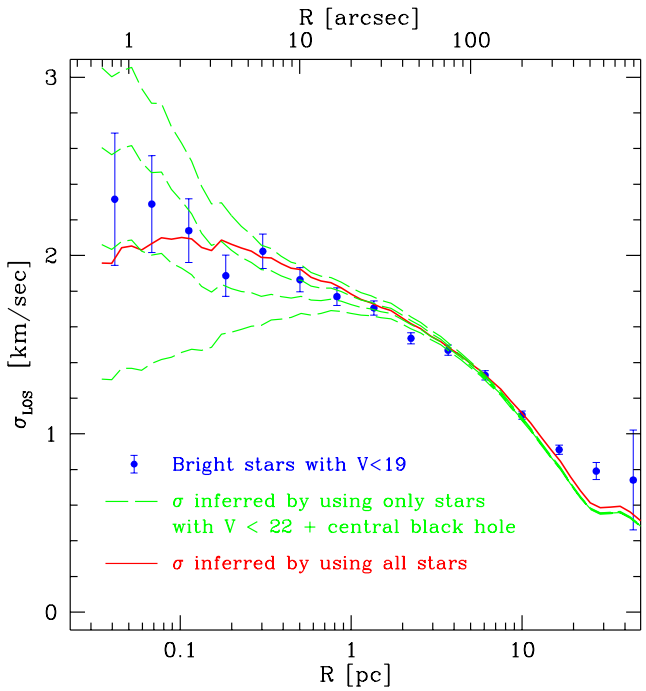
これはつまり、エネルギーが低い、より中心近くを運動する軌道に移るということである。つまり、星の質量分布がある恒星系が熱力学的に進化すると、重い星が中心に集まってくる。球状星団では最も重い星は初期に大質量星が超新星爆発してできた中性子星や、もうちょっと軽い星が進化してできた比較的重い白色矮星であり、どちらも暗い。つまり、球状星団の $M/L$ が半径によらないと考えるのはかなり無理がある。というわけで、このブラックホールは怪しいのでは？と私を含めていろんな人が思った。

とはいっても、「間違ってるかもしれない」というだけでは人は納得しないので、数値シミュレーションで球状星団を生まれた時から現在まで進化させて、速度分散と輝度分布がどうなるか見てみることにした。 M15 は「コア崩壊型」と呼ばれる、中心に向かってどこまでも密度が上がるタイプの星団なので、現在ちょうどそのような密度 (輝度) 分布になるように初期条件を選んでみた。星の質量分布とかは普通に太陽近傍の観測から示唆されているものを使う。

結果は Baumgardt et al., ApJ 2003, 582, L21 になって論文にしたわけだが、速度分散と輝度分布はそれぞれこんな感じになる。



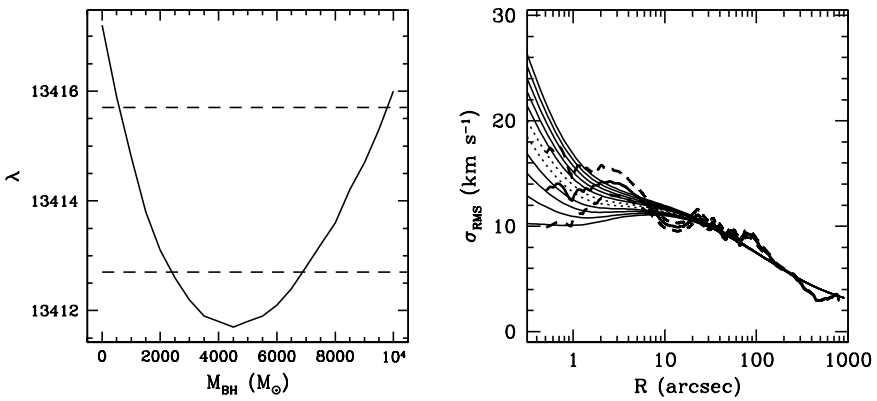

で、観測の人達と同じように $M/L$ 一定を仮定して解析すると



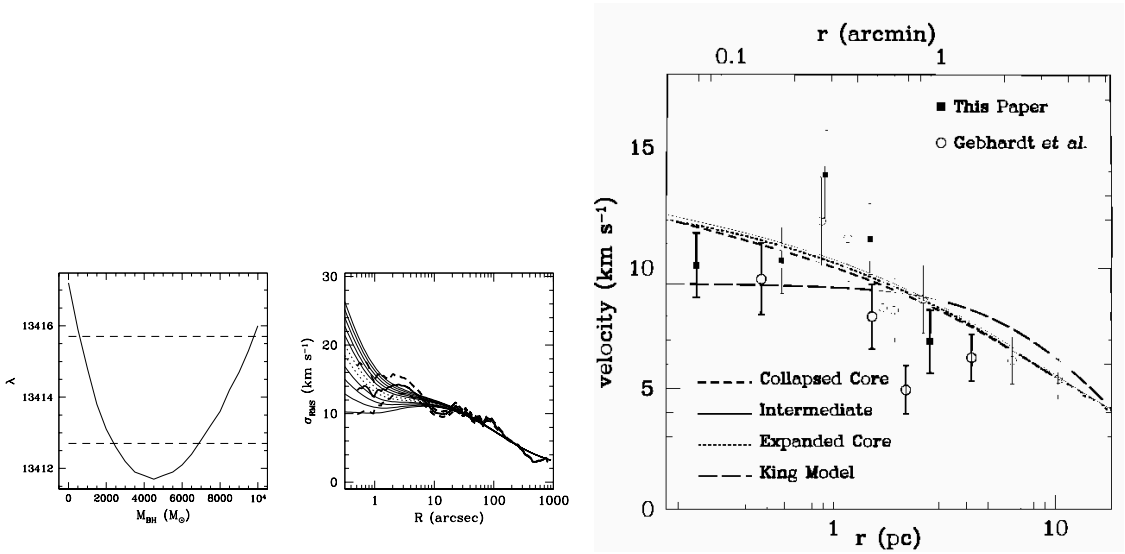

星だけでは中心で質量が足りなくて、ブラックホールが必要という結果になる。モデル星団は M15 より軽いので、その分をスケールすると、大体 3000 太陽質量くらいのブラックホールがあるという結論になる。

まあ、そういうわけで、多分ブラックホールではなくて普通に熱力学的な進化の結果中性子星等が中心に集まっているだけであろう。

という話で終わると、観測で論文書いた人が間抜けな感じがするが、実はもうちょっと話は複雑である。彼らは、 $M/L$ が一定ではない解析もしていて、それは別の人 (Dull et al. ApJ 1997) の、我々のと同じような数値シミュレーションの結果を使ったものであった。



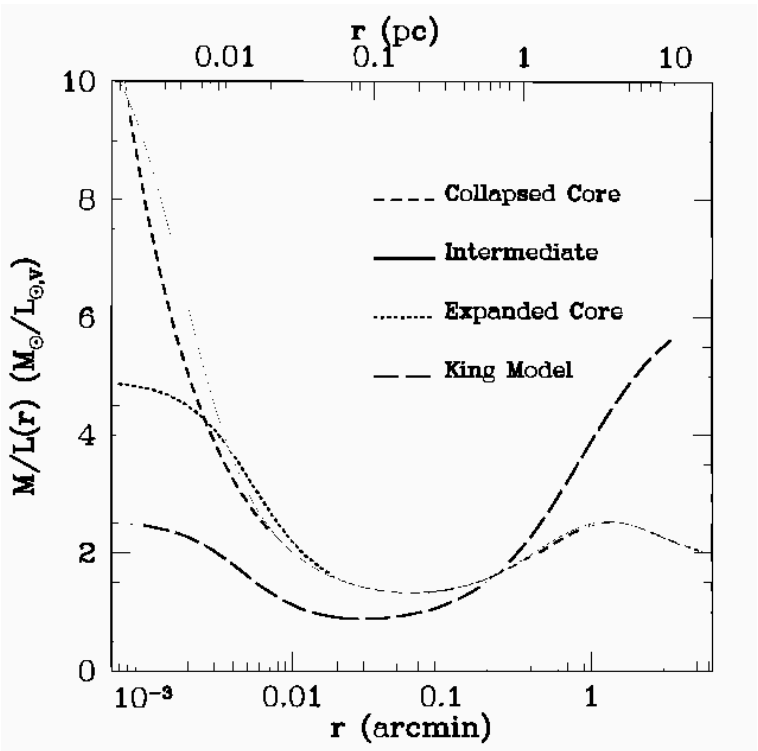

これであまり結果が変わらなかったから、彼らは安心して「ブラックホールがある」という結果を発表した。しかし、これはおかしな話で、実は Dull et al. のモデル星団はハッブルのグループの解析より高い速度分散を与えていた。



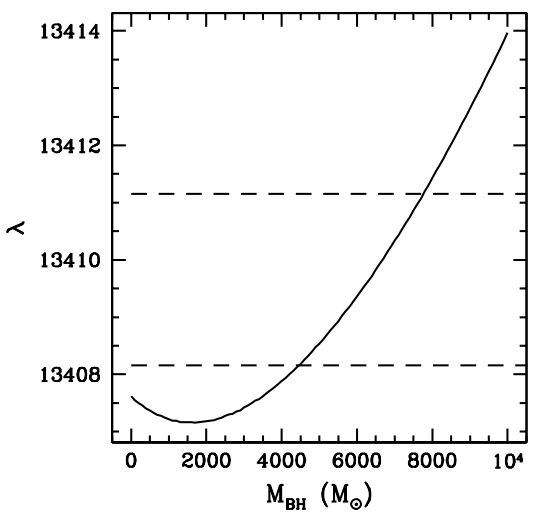

使っている輝度分布は同じなので、同じジーンズ方程式と同じ $M/L$ プロファイルを使えば同じ速度分散が求まらないといけないのに、違う。

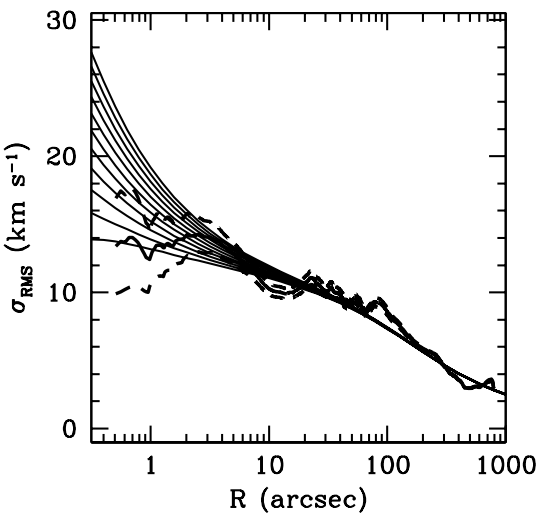
これは実は、 Dull et al. の $M/L$ プロファイルのグラフが大嘘で、横軸が 3 倍間違っていたから

だということが後で明らかになった。




で、解析しなおすと、、、




ブラックホールはなくてもいいという、真っ当な結果になってしまった。

## 3　ビリアル定理

前節では、Collisionless Boltzman 方程式の速度空間でのモーメントを考えて Jeans 方程式を導いた。ここではさらに空間全体のモーメントをとる。

式 6 において、密度 $\nu$ を質量密度 $\rho$ で置き換え、さらに $x_k$ を掛けて空間全体で積分する。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} d^3\mathbf{x} = -\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathbf{x} - \int \rho x_k \frac{\partial\Phi}{x_j} d^3\mathbf{x} \tag{13}$$

右辺の最初の項は、例によって発散定理を使って書き直せる。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathbf{x} = -\int \delta_{ki}\rho\overline{v_i v_j} d^3\mathbf{x} = -2K_{kj} \tag{14}$$

これは、運動エネルギテンソル $K$ の定義を与える。ついでに第二項はポテンシャルエネルギーテンソル $W$ と呼ばれるものである。

さらに、 $\sigma^2$ の定義を使って、

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \tag{15}$$

但し

$$T_{jk} = \frac{1}{2}\int \rho\bar{v}_j\bar{v}_k d^3\mathbf{x}, \quad \Pi_{jk} = \int \rho\sigma^2_{jk} d^3\mathbf{x}, \tag{16}$$

さらに、 $j,k$ についての式と $k,j$ についての式を足してやると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \rho(x_k\bar{v}_j + x_j\bar{v}_k) d^3\mathbf{x} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{17}$$

さらに、慣性モーメントテンソル

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3\mathbf{x} \tag{18}$$

を導入して、連続の式とか発散定理とかを使うと

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \rho(x_k\bar{v}_j + x_j\bar{v}_k) d^3\mathbf{x} \tag{19}$$

で、結局

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{20}$$

これをテンサービリアル定理という。

さて、今定常状態（ $I$ の時間微分が 0 ）を考え、さらに上の式のトレースをとってみると、$T, \Pi$ の定義からこれらの寄与は全運動エネルギー $K$ の 2 倍になる。$W$ の方は、$\Phi$ の定義を使えば

$$W = \int \rho \sum_k x_k \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} d^3\mathbf{x} = \int\int \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{x_k(x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \tag{21}$$

ここで $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ を入れ換えた積分を書き、両方を足すと

$$W = \frac{1}{2}\int\int \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{(x_k - x'_k)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\int \rho\Phi d^3\mathbf{x} \tag{22}$$

というわけで、 $W$ は系の全ポテンシャルエネルギーである。結局、

$$2K + W = 0 \tag{23}$$

が成り立つ。これを、スカラービリアル定理、または単にビリアル定理という。

今、系の全エネルギーを E とすれば、 $E = K + W$ であるから、

$$E = -K = W/2 \tag{24}$$

ということになる。つまり、定常状態にある自己重力恒星系では、必ず全エネルギーはポテンシャルエネルギーのちょうど半分であり、絶対値が運動エネルギーに等しい。これは球対称とかそういう仮定なしに常に正しい。

# 4　ビリアル定理の応用

## 4.1　系の「比熱」

これまで何度か強調してきたように、無衝突ボルツマン方程式 CBE で記述されるシステムの力学平衡状態は熱平衡ではないし、自己重力系は熱平衡ではありえない。しかし、 King model のように近似的に熱平衡なものもあるので、ここでエネルギーの出入りに対する系全体の応答、つまり比熱というものをちょっと考えてみることにする。

ビリアル定理から $K = -E$ であったので、すぐにわかるように「エネルギーを奪うと運動エネルギーが増え、逆ならその逆になる」ということになっている。つまり、見かけ上比熱が負になっている。

これは重力が効く系では普通のことで、例えば地球を回る人工衛星といったものでも同様のことが起こっているわけである。

この、「見かけ上比熱が負」ということが、熱力学的不安定を通して構造形成 ( 自己組織化 ) が起きる基本的な理由である。

## 4.2　系の質量、 $M/L$

まず、系の「大きさ」についてどんなことがいえるかということをおさらいしておく。$W$ は全ポテンシャルであったので、定義により以下のように書ける：

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{25}$$

今、粒子の質量がすべて等しい場合 ( あるいは、分布関数が質量によらない場合 ) を考えると、

$$r_v = \left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right\rangle^{-1} \tag{26}$$

を導入して、

$$W = \frac{-GM^2}{2r_v} \tag{27}$$

と書ける。この $r_v$ を普通ビリアル半径という。なお、 $r_g = 2r_v$ のことを gravitational radius 重力半径ということもあるが、「重力半径」というと時と場合によってはシュワルツシルト半径だったりすることもあるので注意すること。とにかく、この $r_v$ を使って、$K = -W/2$ を書き直せば

$$|v^2| = \frac{GM}{2r_v} = \frac{GM}{r_g} \tag{28}$$

したがって、速度分散 ( 系全体の平均 ) とビリアル半径がわかれば質量を決められる。観測的には、球対称を仮定すれば、3 軸方向の速度分散は等しいので、視線方向の速度分散の 3 倍が 3 次元速度分散ということになる。問題はビリアル半径のほうであるが、もちろん球対称 ( だけでは本当はだめで、さらに $M/L$ が半径によらずに一定であるという仮定も必要 ) を仮定すれば表面輝度分布から deprojection して計算できる。

大雑把な見積りでよければ、例えば half mass radius ( 質量の半分が入っている半径 ) $r_h$ を適当に見積もって、それで $r_v$ の代わりにしてもそれほど大きな誤差はない。典型的には

$$r_h \simeq 0.8 r_v, \tag{29}$$

程度である。具体例をあげれば、プラマーモデルでは

$$r_h = \frac{3\pi}{16\sqrt{2^{2/3}-1}} r_v = 0.77 r_v, \tag{30}$$

ハーンキストモデルでは

$$r_h = \frac{(1+\sqrt{2})}{3} r_v, \tag{31}$$

であり、仮想的な密度一様の球というものを考えると

$$r_h = \frac{3 \times 2^{2/3}}{5} r_v = 0.95 r_v. \tag{32}$$

というようなことになる。実際に観測から直接決められるのは、多くの場合 $r_h$ ではなく有効半径 effective radius $r_e$ であり、これは質量ではなくて投影した輝度の半分が入っている半径である。一般に $r_e < r_h$ であることはいうまでもないが、まあ、それほど大きな差にはならない。

### 4.3 回転系の偏平度 ( あるいは楕円銀河の回転 )

今、$z$ 軸まわりに対称な、回転している銀河を考えると、ポテンシャルテンソルについては対称性から

$$W_{xx} = W_{yy}; \quad W_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \tag{33}$$

で、運動エネルギについても同様にクロスタームは消えるので、結局テンサービリアル定理で残るのは

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0; \quad 2T_{zz} + \Pi_{zz} + W_{zz} = 0 \tag{34}$$

の 2 つだけである。この 2 つから、

$$\frac{2T_{xx} + \Pi_{xx}}{2T_{zz} + \Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}} \tag{35}$$

となる。今、子午面環流みたいなのはないとすれば、 $T_{zz} = 0$ で、

$$2T_{xx} = \frac{1}{2} \int \rho v_\phi^2 d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2} M v_0^2 \tag{36}$$

( これは $v_0$、つまり平均の回転速度の定義と思って下さい )。同様に

$$\Pi_{xx} = M\sigma_0^2 \tag{37}$$

これは視線方向 ( 横から見ているとして ) のランダム速度の平均 (r.m.s) である。あと、 $z$ 方向についてはなにかいえないかというと、 $x$ 方向との速度分散の異方性パラメータ $\delta$ を導入して

$$\Pi_{zz} = (1-\delta)\Pi xx \tag{38}$$

と書いておくことにする ( これは、球対称な系の速度分散の異方性とはまったく違ったものであることに注意 )。これらをまとめると、

$$\frac{v_0^2}{\sigma_0^2} = 2(1-\delta)\frac{W_{xx}}{W_{zz}} - 2 \tag{39}$$

ということになる。

さて、 $W_{xx}/W_{zz}$ と、銀河の「形」の関係についてであるが、一般に密度が以下のように書ければ

$$\rho = \rho(m); \quad m^2 = a_1^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} \tag{40}$$

言い換えれば、密度が軸比一定の楕円体の表面上で一定なら、$W_{ii}/W_{jj}$ は $a$ だけの関数で $\rho(m)$ の関数形によらないということがわかっている。実際に書くとかなり面倒な形をしているので、具体的な形は BT をみてもらうことにして、結果だけを使うと、要するに速度の非等方性 $\delta$ と偏平度 $\varepsilon 1 - b/a$ を決めれば $\frac{v_0}{\sigma_0}$ が決まるということになる。どんな感じかを BT の図から示すと

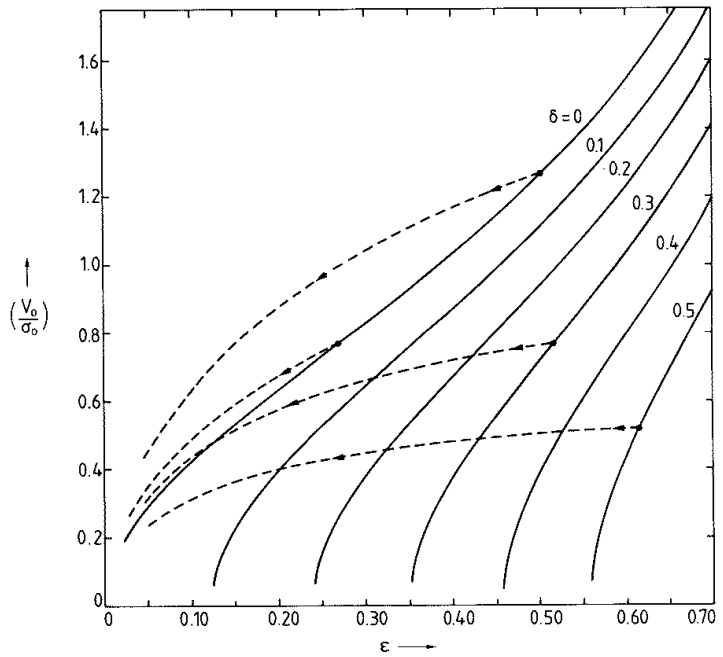



**Figure 4-5.** The relationship between the rotation parameter $v/\sigma$ and ellipticity $\epsilon$ predicted by (4-95) for elliptical galaxies whose isodensity surfaces are similar coaxial oblate spheroids. The dashed curves show the movement of the point corresponding to the observable quantities $\tilde{v}/\tilde{\sigma}$ and $\tilde{\epsilon}_a$ when the galaxy's inclination angle $i$ is decreased from $i = 90°$.

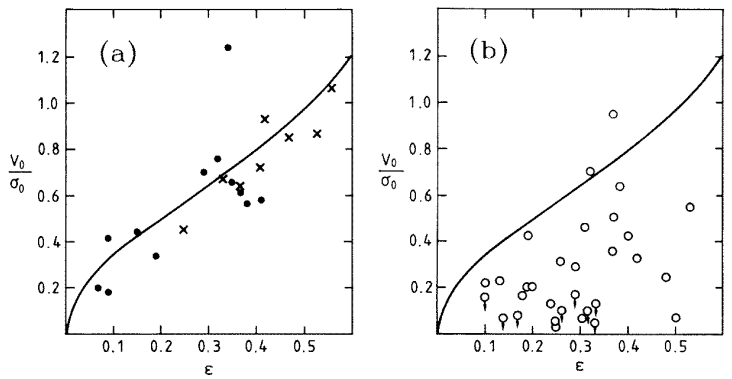



**Figure 4-6.** (a) The positions in the $(v/\sigma, \epsilon)$ plane of elliptical galaxies (dots), and of spheroids (crosses), that have luminosities smaller than $L = 2.5 \times 10^{10}\,L_\odot$. (b) The same as (a) but for elliptical galaxies brighter than $L = 2.5 \times 10^{10}\,L_\odot$. (After Davies et al. 1983.)

まあこんな感じになる。上の図は、 $\varepsilon$ の関数として $\frac{v_0}{\sigma_0}$ がどう変化するかを、 $\delta$ のいくつかの値について示したものである。破線は、真横でない方から見たらどういうふうになるかを、いくつかの

場合について示したものである。下の図は、実際の観測結果と $\delta = 0$ の線を重ねて書いてみたものである。暗い楕円銀河は $\delta = 0$ の線に近いところに集まっているのに対し、明るいものは可能な範囲全体にあり、どちらかというと下の方 ( 回転が小さく、おそらく異方性が大きいほう ) に集まっているということが見てとれる。このような構造の違いは、それぞれの銀河がどうやってできたかということになにか重要な手がかりを与えているはずである。

とはいうものの、どうやってできたかということに対する標準的な理解というものがあるわけでは必ずしもない。ここでは、せっかくなので一つの考え方として、合体説 ( 楕円銀河のうち、特に大きいものは銀河同士の合体でできた ) をとった場合にはどのような説明が可能かということを見てみる。これ以外の解釈がないというわけではない。

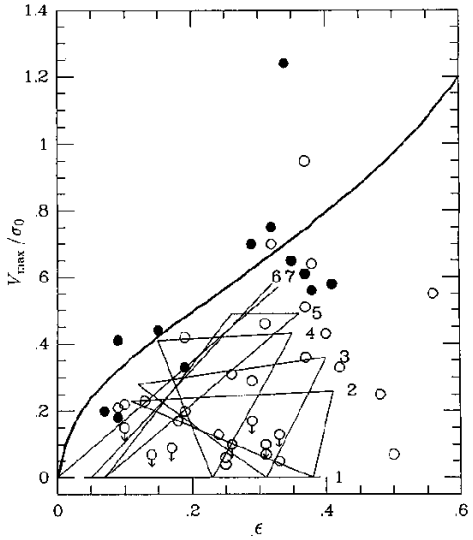



Fig. 6. Ratio of the maximum rotation velocity to the central velocity dispersion ($V_{max}/\sigma_0$) plotted against the ellipticity ($\epsilon$). Three vertices of triangles indicate the numerical results observed from the $a$-, $b$-, and $c$-axes. The open circles indicate observational luminous ellipticals ($M_B < -20.5$); the filled circles indicate less luminous ellipticals ($M_B > -20.5$). The data were taken from Davies et al. (1983).

これは Okumura *et al.* (1991, PASJ 43, 781) によるシミュレーションの結果と上のグラフを重ねたものである。シミュレーションはすべて 2 つの等方的で回転を持たないプラマーモデルを 2 つ放物軌道でぶつけたもので、番号順に最初の軌道の近点距離が大きくなる ( 4 で $r_p/r_h = 2.6$ である )。

大雑把にいうと、番号の大きいものほど軌道角運動量が大きいので、$v_0/\sigma_0$ が大きくなる。もっとも、ある程度より大きくなっていないことに注意してほしい。これは要するに合体するためにはかなりの軌道角運動量を捨てないといけないので、残った系が持つ角運動量には上限があるためである。

合体後の銀河は特別な場合 (1,7) を除いて 3 軸不等なので、その 3 方向からみてグラフ上に点をとり、それを結んで 3 角形を書いている。大雑把にいって、適当な方向からみたときにはこの 3 角形の中にあると思っていい ( 実際にある方向から見た時にどう見えるかというのはもうちょっとややこしいが、いまはそのあたりの議論は省く )。

シミュレーションの結果からわかることは、仮に楕円銀河が合体で出来たとすれば、暗いものは初期に近点距離の大きな軌道 ( おそらく楕円軌道 ) をもち、明るいものは近点距離の小さな軌道から合体したものが比較的多いということになろう。