理論天体物理学特論 I

牧野淳一郎

1997 年 12 月 17 日

2 体緩和のタイムスケール、フォッカー・プランク方程式

前回は、実際にバックグラウンドの粒子も動いている場合について、2 体緩和によって粒子の速度、エネルギーがどう変化するかの期待値 (のモーメント) を求めた。今日は、前回の結果を使って、まずいくつかの重要な場合について 2 体緩和がどのように働くかを、数値実験と合わせて議論する。次に、上の結果から分布関数の変化に対する方程式を導くことを考える。

1 2 体緩和のタイムスケール

「タイムスケール」というのは、普通ある量 x の時間変化が

$$\frac{dx}{dt} = (-)\frac{x}{T} \tag{1}$$

なる形で書ける時の T のことである。もちろん、一般には T は x を含むいろんなものの関数である。

そういった意味で考えやすいのは、温度 (平均運動エネルギ) が違う 2 つの空間一様な分布が重なりあっている時に、どのようにして 2 つが近付いていくかというのものである。これは、もちろん時間が立てば熱平衡に近付くわけである。以下、実際に計算してみる。

1.1 等分配のタイムスケール :理論

今、フィールドに質量 m_f の粒子が一様に分布しており、テスト粒子として質量 m_t のものがこれもまた一様に分布しているとする。さらに、どちらも速度分布はマックスウェルで与えられるとする。ここでは等分配を考えるので、それぞれの粒子 1 個当たりのエネルギーを E_f, E_t と書く。今、テスト粒子のエネルギー変化の平均を考えると、

$$\frac{d < E_t >}{dt} = 4\pi \int v_t^2 f(v_t) < \Delta E_t > dv_t \tag{2}$$

と書けることになる。これに前回求めた $< \Delta E >$ を入れて実際に積分を実行することができて、結果は

$$\frac{d < E_t >}{dt} = 2\sqrt{6/\pi}\frac{m_t n_f \Gamma}{m_f}\frac{< E_f > - < E_t >}{(v_t^2 + v_f^2)^{3/2}} \tag{3}$$

となる。

ここで、いくつかの極限的な場合を考えておくことは有益であろう。まず、$m_t >> m_f$で $v_t \sim v_f$ という状況を考えてみる。これはつまり非常に重いものと軽いものが、同じような空間分布、速度分布で広がっている場合である。この時は上の式で $E_t >> E_f$ なので、

$$\frac{d\log < E_t >}{dt} = -\sqrt{3/\pi}\frac{m_t n_f \Gamma}{m_f v^3} \tag{4}$$

となる。なお、この時、変化率はテスト粒子の速度に分母の v_t^2 を通してしか依存しないので、$v_t \to 0$ の極限でエネルギー変化 (減速) のタイムスケールは一定値にいき、それは $v_t \sim v_f$ の時の値とそれほど違わない。

次に、$m_t \sim m_f$で $v_t << v_f$という状況を考えてみる。この時は上の式を

$$\frac{d(< E_t > /m_t)}{dt} = 2\sqrt{6/\pi}\frac{n_f \Gamma}{m_f}\frac{< E_f >}{2v_f^3} = 8\sqrt{6\pi}G^2 \ln\Lambda n_f m_f < E_f > v_f^{-3} \tag{5}$$

となる。ここで

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln\Lambda \tag{6}$$

を使った。さらに、 $E_t = m_t v_t^2/2$ などを使って書き直せば

$$\frac{d(v_t^2)}{dt} = 4\sqrt{6\pi}G^2 \ln\Lambda n_f m_f^2 v_f^{-1} \tag{7}$$

を得る。つまり、速度が小さい極限では、一定の率でエネルギーをもらうわけである。言いかえれば、温度が 2 倍になるタイムスケールというものは、温度に比例して小さくなるともいえる。

さて、通常「2 体緩和のタイムスケール」という時には何を指しているかというと、この等分配のタイムスケールのことではないのが普通である。が、時と場合によっていろんなものが出てくるが、まあ同じようなものである。普通に使われるのは、

$$t_r = \frac{1}{3}\frac{v_m^2}{< v_{\text{平行}}^2 >_{v=v_m}} = \frac{v_m^3}{1.22n\Gamma} = \frac{0.065 v_m^3}{nm^2G^2\log\Lambda} \tag{8}$$

とするものである。ここで v_mは r.m.s. 速度である。$1/3$ になにか意味があるわけではなく、こう定義したというだけである。

これは、ローカルな量で定義されていて、例えば系全体の緩和時間といったものを考えるのにはちょっと不便なこともある。というわけで、いわゆる half-mass relaxation time t_{rh} というものを導入しておく。これは、半径 r_h の中に質量の $1/2$ があるとして、その中の密度は一様であるとし、また前にやったようにビリアル定理から $T \sim 0.2GM^2/r_h$といった関係を使えばでてくる。これは

$$t_{rh} = 0.138\frac{N r_h^{3/2}}{M^{1/2}G^{1/2}\log\Lambda} \tag{9}$$

となる。

ここで注意しないといけないことは、 t_{rh}はあくまでも球対称に近い系の half mass radius のあたりでの緩和時間であるに過ぎないということである。従って、球状星団全体の緩和時間とか、あるいは楕円銀河、銀河団といったものには有効な概念であるが、球対称から大きくずれた銀河とか、あるいは half mass radius のずっと外側、ずっと内側では全く違ったものになっていることに注意する必要がある。さらに、速度分布が非等方であるとか、回転がメインであるとかでもまた話が全く変わってくる。このような場合、ローカルな緩和時間、あるいはエネルギー変化自体の式に戻って考えないと、タイムスケールについて全く間違った推定をしてしまうことになる。

これがもっともクリティカルに効いて来るのは、実際の天体においてというよりはむしろシミュレーションにおいてである。これについては後で具体例で議論しよう。

1.2 等分配のタイムスケール :実験

さて、実際に数値実験でエネルギー等分配に近付く過程を見て、これまで理論的に考えてきたもの、特に積分の上限がどうなっているかみようというわけだが、これはそれほど簡単ではない。というのは、 空間分布が無限一様」とか 等温」とかいう初期条件が設定できないためである。

一例として、 Farouki and Salpeter (1982 APJ 253, 512, 1994 APJ 427, 676) の実験を取り上げてみる。彼らは、実際に 2 種類の違う質量の粒子からなる、初期に力学平衡にある系を考えた。初期には単位質量あたりの運動エネルギーが同じであるようにした (つまり、空間分布、速度分布ともに同じということ)。したがって、重い方が熱平衡に比べて余計に運動エネルギーを持っていることになる。

正確にいうと、実際に力学平衡にある系を作ったわけではなく、適当に球とか立方体のなかに一様に粒子をばらまいて、落ちつくまで待ってから使うという方法をとっている。速度は、全体としてビリアル平衡になるようにマックスウェル分布を与えた。

さて、この系を進化させると何が起こるかをまず考えてみる。重い方の温度が高いので、平均的には重い方から軽い方にエネルギーが流れるであろう。しかし、その結果温度が近付くであろうか ?これはとりあえず何ともいえない。というのは、ポテンシャルが一様ではないのでエネルギーの変化は粒子の速度分布だけでなく密度分布、すなわち粒子の位置と重力エネルギにも影響するからである。エネルギーの変化が温度にどう影響するかは、もともとの粒子の分布にも依存するわけである。

さらにややこしいことに、 $\log\Lambda$ がなんであるかという問題もある。通常、N体計算においては、2 粒子間の重力ポテンシャル $\phi_{ij} = -Gm_im_j/r_{ij}$をそのまま使わないで、典型的には

$$\phi_{ij} = -G\frac{m_im_j}{r_{ij}^2+\epsilon^2} \tag{10}$$

という形に ソフトニング」したものを使う。これは、数値計算上の困難を避けるのが第一義的な理由である。つまり、純粋な $1/r$ ポテンシャルを使うと、2 つの粒子が無限に近付き得る。無限に近付くこと自体は問題ではないが、この時速度と重力エネルギーも無限大になる。従って、非常に高い精度で計算しても、エネルギーの誤差が非常に大きくなってしまう。

もちろん、近付いたら解析解に切替える、あるいは摂動法にする、または座標変換をして特異性を消すといった方法があるが、どれもかなり面倒である。そこで、多くの数値実験で、ポテンシャルをすこし変えて原点で発散しないようにする。この場合、インパクトパラメータが ϵ よりも小さい時にはほとんど曲がらなくなるので、速度変化の積分の下のほうを修正する必要が起きる。大雑把にいって $p < \epsilon$ の寄与を無視すればよいことになる。

次のページの図に典型的な結果を示す。Farouki and Salpeter では、温度とかエネルギー変化を直接測定するのは断念し、その代わりに軽い粒子の half mass radius をとった。彼らは緩和時間として

$$T_R = \frac{R_0}{dR/dt} \tag{11}$$

つまり、半径の変化のタイムスケールをもって緩和時間であるとした。これはもちろん定数を別にすれば上で考えた定義と一致するものになっている。

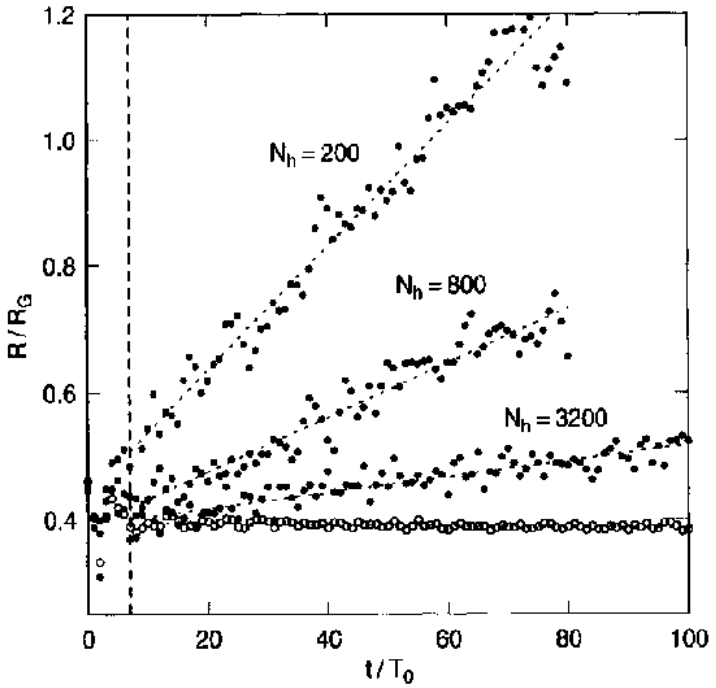


FIG. 1.—Time evolution of the half-mass radii $R_i(t)$ for light particles for typical runs with $c_h = c_{h1}$ and various values of N_h, together with least-squares fits (*dashed lines*) to the data for $t \geq 7T_0$ [the open dots show the half-mass radius $R_h(t)$ of heavy particles for the run with $N_h = 3200$].

この結果から、彼らは $\log\Lambda$ と粒子数 N について以下のような関係を得た

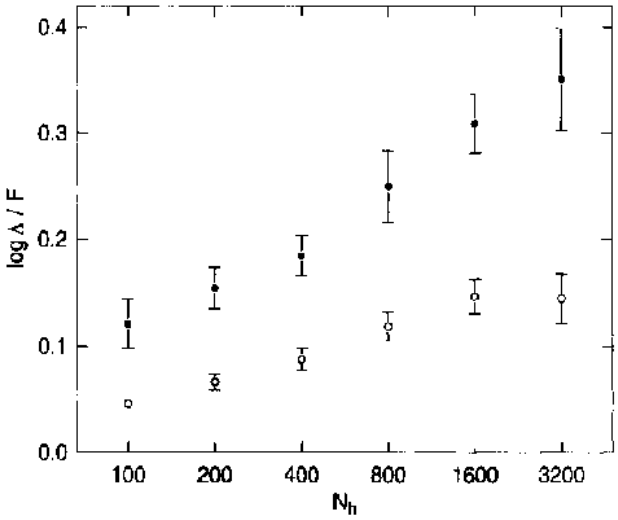


FIG. 4.—Dependence of the quantity $(\log\Lambda)/F$ on the number N_h of heavy particles for runs with "small" softening, $c_h = c_{h1}$ (*solid dots*), and "large" softening, $c_h = c_{h2}$ (*open dots*).

上と下は ϵ の大きさが違い、上は R/Nの程度、下は $R/N^{1/3}$の程度である。ここで Fは緩和時間を

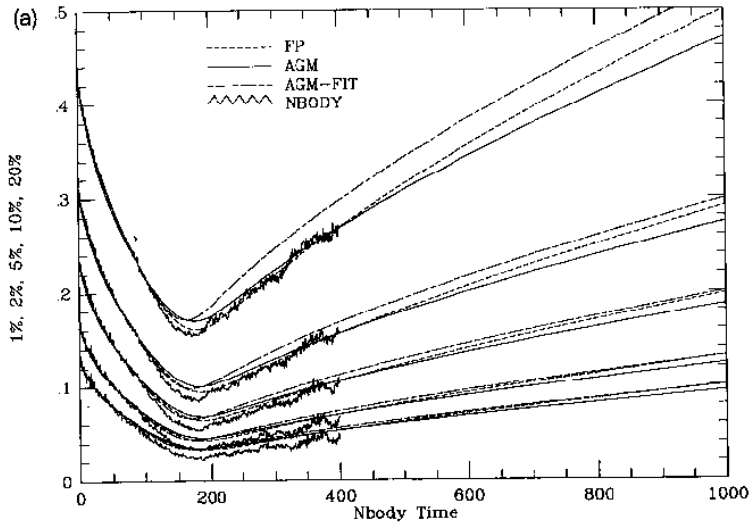
$$t_{rh} = F\frac{N}{26\log\Lambda}t_d \tag{12}$$

と書くことにしたために出てくる定数である。26 という定数は、前に出てきた t_{rh} を t_d を使って書き直したので、定数の 0.138 が違う値になっているだけのものである。

彼らの主な主張は、「この振舞いは上のカットオフがシステムサイズであるという理論と一致している」というものである。それはまあかなり確かといってもよいと思われる。が、 Fの値を推定す

ると 10 程度になり、かなり大き過ぎるものになっている。これは、定義の違いもあるので評価はちょっと難しい。

もうちょっと良くあっている例を紹介しておこう。



これは Spurzem and Takahashi (1995, MNRAS 272, 772) によるものである。ここでは、緩和時間といった定義のはっきりしないものを比べているのではなく、系の構造そのものの変化を、N体計算の結果とモーメント方程式から導いた (球対称、等方の) フォッカー・プランク方程式の数値解とで比べている。結果の一致は素晴らしいものである。

1.3 応用 (問題)

さて、2 体緩和についていろいろやってきたので、ちょっと手を動かして計算してみるのもいいかと思う。以下に問題を出す。レポート課題の一つと思ってもらってよい。

(2-1a)Singular isothermal な分布をしたダークマターハローのなかに、自己重力的でない無限に薄い星のディスクがあるとする。ダークマター粒子の質量が無限小ならばディスクは薄いままだが、数値計算では 2 体緩和のため厚くなる。厚さが 2 倍になるタイムスケールを、厚さ、中心からの距離、その内側のダークマターハローの質量、ハロー構成粒子の質量の関数として求めよ。なお、結果は回転周期に対する比で表すこと。

(2-1b) 上で求めたものから、それらしいパラメータを使って太陽がある当たりでディスクが厚くなる様子の近似的な解析解を求めよ。ただし、時間はハロー構成粒子の質量でスケールできることに注意せよ。

(2-1c) 自己重力が無視できない薄いディスクについて、ディスク内の星同士の 2 体緩和により厚さが 2 倍になるタイムスケールを上と同様に求めよ。ただし、簡単のためダークハローがあって自己重力の効果は小さいとする。また、ダークハローに由来する 2 体緩和はないものとする。

(2-2a)SPH 法とは、流体を大きさをもった粒子の重ね合わせで表現する計算法である。無衝突系であるダークマターとホットガスが力学平衡にある状態を、SPH 法と N体を組み合わせて計算した場合、2 体緩和の効果はどのように働くと考えられるか、例をあげて定量的に議論せよ。

(2-2b) さらに、適当な最近の SPH と N体を組み合わせて行なった計算の論文を読んで、2 体緩和の効果を評価し、それが結論に影響しているかどうかを考察せよ。

2　フォッカープランク近似

さて、数値計算がどうたらという話を別にすれば、2 体緩和を考える理由はそれにより系がどう進化するかを理解するということである。そのためには、粒子の速度変化のモーメントの式から、分布関数の変化についての方程式を導くことが有用であろう。

粒子の物理量の変化の 1 次と 2 次のモーメントから (高次の項の寄与を無視して) 分布関数に対する移流拡散方程式を導くことができる。この操作を通常フォッカープランク近似といい、でてきた方程式をフォッカープランク方程式という。以下、その導出を行なってみる。これは、ボルツマン方程式の衝突項を求めることに対応する。

今、 $P(\boldsymbol{v}, \Delta\boldsymbol{v})d\Delta v$ が、速度 $\boldsymbol{v}$の粒子が、時間Δt の間に速度変化$\Delta\boldsymbol{v}$　(の近傍の $d\Delta\boldsymbol{v}$の範囲) を受ける確率であるとする。すると、 Δt たった後の分布関数は以下のように書ける

$$f(\boldsymbol{v}, t+\Delta t) = \int f(\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v}, t)P(\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v}, \Delta\boldsymbol{v})d\Delta\boldsymbol{v} \tag{13}$$

これは$\boldsymbol{v}$ のところにやってくる可能性があるものすべてについての和をとっただけである。ここで、両辺を展開することを考える。左辺は

$$f + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t \tag{14}$$

である。右辺は

$$\int \left[fP - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(fP)}{\partial v_i}\Delta v_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2(fP)}{\partial v_i \partial v_j}\Delta v_i \Delta v_j + ... \right] d\Delta\boldsymbol{v} \tag{15}$$

ここで、

$$< \Delta v_i > \Delta t \;=\; \int P\Delta v_i d\Delta\boldsymbol{v} \tag{16}$$

$$< \Delta v_i \Delta v_j > \Delta t \;=\; \int P\Delta v_i \Delta v_j d\Delta\boldsymbol{v} \tag{17}$$

とおけることを使えば、微分と積分の順序を入れ換えて

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(f < \Delta v_i >}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2(f < \Delta v_i \Delta v_j >)}{\partial v_i \partial v_j} \tag{18}$$

これで、理屈の上では分布関数の変化が計算できるということになる。もちろん、実際にこれを解いて自己重力系の進化を調べるのは、必ずしも容易ではない。その理由は、分布関数が 6 次元位相空間上で定義されること、それがジーンズの定理を満たすように進化しなければいけないことである。具体的には、

- そもそも、球対称とかの仮定なしでは運動の積分だけの関数であるような分布関数が求まらない
- 実際に運動の積分の関数として分布関数が書ける場合でも、拡散係数を求めるのはそれほど容易ではない。
- 実際に拡散係数が求まっても、自己重力系なので分布関数が変化すると同時にポテンシャルも変化することになり、それによって粒子の軌道が断熱的に変化することになる。そのへんを考慮してつじつまがあうような計算プログラムを作るのは容易ではない。

というような困難があり、従来は、分布関数をエネルギーだけの関数と近似する計算しか行なわれていなかった。1994 年頃に、Takahashi が初めて $f(E, J)$ の場合に信頼できる結果を得ることに成功した。しかし、これも、拡散係数を求める時に、フィールドの分布は等方的であるという近似を行なっている。

なお、モンテカルロ法など、もうちょっといい加減な方法ではある程度のことは出来ている。

3 次回予定

次回は来年になりますね。2 体緩和による時間発展ということで、まず熱平衡状態の安定性について考える。