理論天体物理学特論 I

牧野淳一郎

1997 年 12 月 10 日

2 体緩和 (続き)

1 2 体緩和 (続き)

前回は、2 体緩和のイメージとして、テスト粒子が、静止したバックグラウンド粒子の分布の中を運動する場合を考えた。これで、テスト粒子が方向を変えるタイムスケールを導くことは出来たが、これだけでは 「緩和」とはいい難い。

今日は、実際にバックグラウンドの粒子も動いている場合について考えることにする。

1.1 どういうことを考えるかということ :流体との違い

2 体緩和によって、最終的には系が熱力学的に進化するわけであるが、これが普通の流体 (ガス) とは本質的に違うものであるということをここで再確認しておこう。

ガスの場合、粒子の平均自由行程はシステムサイズよりもはるかに小さい。液体であれば平均粒子間距離は粒子のサイズ程度であるし、気体であっても通常の状況では考えている現象の空間スケールに比べて平均自由行程は小さい。ちなみに、非常に希薄な気体とか、あるいは本当に空間スケールの小さい現象では平均自由行程が問題になる。これは例えば超高層での人工衛星の回りの気体の流れとか、あるいは最近の磁気ヘッドの回りの空気の流れとかいったものである。

とにかく、通常のガスの場合、平均自由行程がシステムサイズより小さく、システムサイズよりは小さく平均自由行程よりは大きいような空間スケールを考えると、そのなかでほぼ熱平衡になっていると思っていいことになる。いいかえれば、いわゆる Local thermal equilibrium (LTE) の仮定が使える。こうなると、温度とか圧力とかいった量が近似的 (といっても実際上非常に高い近似精度で) に定義でき、そういったマクロな量で系の進化を扱う、特に熱の流れを拡散方程式で書くということが可能になる。

しかし、自己重力質点系では状況が全くことなる。まず、粒子数が無限大の極限では、平均自由行程も無限大であった。つまり、 LTE がなりたたないどころか、そもそも熱平衡に向かう (すなわちエントロピーを生成する) ようなメカニズムがなかったわけである。

粒子数が有限の場合も、依然として平均自由行程が長い、つまり、粒子数無限大の時の軌道から、他の粒子との相互作用によって段々ずれていくわけだが、そのずれる典型的なタイムスケールは $Nt_d/\log N$ 程度であった。つまり、流体の場合とは全く逆に、ほとんど自由運動 (というか、他の粒子全体が作るポテンシャルに沿った運動) をしていて、その場が有限の粒子で表現されるための揺らぎがあるので段々軌道が変わっていくということになるわけである。

従って、ローカルな熱平衡を仮定して拡散係数 / 輸送係数を求めるというのとは逆に、ある一つの

粒子が系の中を動き回りながらどういうふうにエネルギー等を変化させていくかという観点で見ていくことになる。

これをすこし別ないい方をすれば、通常の空間のなかでの密度や温度の変化を考える代わりに、また 6 次元位相空間のなかでの分布関数の進化を考えるということに当たる。具体的には、これまで無視してきた 「衝突項」というものをちゃんと評価して、どういうものかみてやろうということである。

1.2 バックグラウンドの分布のもとでの有限質量のテスト粒子の振舞い

さて、以下ではバックグラウンドの粒子分布のもとでの一つのテスト粒子の振舞いを考える。先週と違うのは、バックグラウンドも動いていることと、テスト粒子も有限の質量を持つことである。バックグラウンドの粒子は一様に分布するものとし、ある速度分布に従うとする。さらに、バックグラウンドの粒子間の相互作用とかは考えないことにする。これで本当にいいかどうかはちょっと良くわからない問題であるが、まあ、とりあえずやってみることにしよう。

前回と同じく、分布している質点の質量を m、数密度を n とする。テスト粒子が一つの粒子から距離 (インパクトパラメータ) p を相対速度 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v}_f$ で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{2p}{(p/p_0)^2 - 1} \\ p_0 &= \frac{G(m_t + m_f)}{V^2} \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる。ここで、この曲がる角度は相対軌道のものであって、テスト粒子の軌道のものではないということに注意する必要がある。いきなり回りが動いていてしかもテスト粒子が質量をもつというのは難しくなるので、とりあえずテスト粒子は質量を持つが、回りは止まっている場合を考える。この時、一回の散乱での速度変化は以下の式に従う。

$$\Delta v_{\text{垂直}} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V \sin\theta = 2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{p/p_0}{1 + (p/p_0)^2} \tag{2}$$

$$\Delta v_{\text{平行}} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V (1 - \cos\theta) = -2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{1}{1 + (p/p_0)^2} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

先週の話との違いは、速度変化に係数 $m_f/(m_f + m_t)$ がついていることだけである。これにまた単位時間当たりの衝突回数 $2\pi p n_f V\, dp$ を掛けて積分するが、$\Delta v_{\text{垂直}}$ については先週と同様 1 次の項は落ちる。それ以外については先週と同様に計算出来て

$$< \Delta v_{\text{垂直}}^2 > = \frac{2 n_f \Gamma}{V} \tag{5}$$

$$< \Delta v_{\text{平行}} > = -\left(1 + \frac{m_t}{m_f}\right) \frac{n_f \Gamma}{V^2} \tag{6}$$

$$< \Delta v_{\text{平行}}^2 > = \frac{n_f \Gamma}{V \ln\Lambda} \tag{7}$$

ここでΓは

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln\Lambda \tag{8}$$

である。ただし、 leading term でない項は適当に落ちてたりするので注意。

上の式で、$< \Delta v^2_{\text{垂直}} >$の項は先週扱った角度の曲がる項と同じものである。先週の話と違うのは、ネットに速度が小さくなる成分がある、すなわち$< \Delta v_{\text{平行}} >$が負で有限の値をもつということである。

これは、実は 2 回前 (だっけ ?) にやった dynamical friction そのものである。つまり、回りが止まっているなかを粒子が走っていくと、それが回りを引っ張って動かすので、その分エネルギーを失って段々速度が落ちるわけである。これは、 m が大きい (m_f が小さい) 極限では $m_f n_f$ 、つまり質量密度によっていて、バックグラウンドの粒子の質量に依存しないことに注意してほしい。これに対し、他の項は $m_f^2 n_f$に比例していて、質量密度が同じでも粒子の質量が大きいほうが値が大きくなるのは先週にやった通りである。

さて、ここではとりあえず 1 次と 2 次の項を求めたわけだが、それより先の項については考えなくてもいいのだろうか ?ここでは粒子の軌道変化がたくさんの散乱のランダムな重ね合わせで書けるとした。この仮定が正しければ、たくさん散乱を受けた後の速度の分布は 1 次と 2 次のモーメントで決まるガウス分布になり、従って 3 次より高いモーメントの寄与は考えなくてもいいことになる。

問題はこの仮定が正しいかどうかであるが、実は理論的にはそれほど正確なわけではない。というのは、インパクトパラメータが例えば p_0 の程度の散乱というのも現実におき、その効果はそれ以外の散乱すべての寄与に比べてせいぜい $\ln \Lambda$ 程度でしか小さくないからである。まあ、しかし、そんなことをいっていても高次の項があっては計算出来ないし、とりあえず $\ln \Lambda$ 程度で小さいということも確かなので、以下高次のモーメントは考えない。

1.3 バックグラウンドが速度分布を持つ場合

というわけで、いよいよバックグラウンドが動いている場合ということになる。この時でも、相対速度の変化自体は前節に述べたもので正しいが、相対速度にフィールド粒子の速度成分が入ってくることになる。

以下、二種類の単位ベクトル系をとって、その上で考える。一つは $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ であり、元の空間に固定されている。もう一つは $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ であり、最初の成分を相対速度 $\boldsymbol{V}$に平行にとる。従って、後者は相手の粒子によって違うわけである。この 2 つを考えることで、相対速度の変化をもとの静止系でのテスト粒子の変化に焼き直す。

まず、1 次の項は相対速度に平行な成分だけであった。このことから、ある方向の速度変化は

$$< \Delta v_i >=< \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1 \Delta v_{\text{平行}} >' \tag{9}$$

ということになる。もうすこし精密に書くと、右辺はインパクトパラメータと相手の速度の積分なので、以下のように書けることになる。

$$\begin{aligned} < \Delta v_i > &= \int dp 2\pi p V \int d\boldsymbol{v}_f f(\boldsymbol{v}_f) \Delta v_i & (10) \\ &= -\Gamma(1 + m/m_f) \int \frac{f(\boldsymbol{v}_f)}{V^2} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1) d\boldsymbol{v}_f & (11) \end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{V}$ はフィールド粒子の速度、 fは速度分布関数である。 p についての積分を先にやったことに注意して欲しい。この積分は $v_f = 0$ であった時の結果をそのまま使っている。

さて、2 次の項についてであるが、前節で見たように$\boldsymbol{v}$ に垂直な成分、すなわち $\boldsymbol{e}'_2$と$\boldsymbol{e}'_3$の成分を考えればいい。従って、一つの方向からくるフィールド粒子との散乱を考えた時には

$$\begin{aligned} < \Delta v_i \Delta v_j > &= [(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}'_2 + (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}'_3] \cdot [(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}'_2 + (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}'_3] < \Delta v^2_{\text{垂直}} > /2 \\ &= [(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_2)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_2) + (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_3)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_3)] < \Delta v^2_{\text{垂直}} > /2 \\ &= Q_{ij} < \Delta v^2_{\text{垂直}} > /2 \end{aligned} \tag{12}$$

これもまた分布関数を掛けて積分すると、結局

$$< \Delta v_i \Delta v_j >= \Gamma \int \frac{f(\boldsymbol{v}_f)}{V} Q_{ij} d\boldsymbol{v}_f \tag{13}$$

ということになる。これで一応必要な 2 次までの係数はすべて書けたわけだが、あまり計算するのに使い易い形ではない。というのは、$\boldsymbol{e}_i'$ とか V とかいったものがまだややこしい形ではいったままであるからである。しかし、もうちょっと簡単な形に書き直せることが知られている。まず、1 次の項だが、

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial v_i} = \frac{V_i}{V^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_1'}{V^2} \tag{14}$$

という都合のよい関係がある。変形はとくにややこしいところはないと思う。$\boldsymbol{e}_1'$をそもそも $\boldsymbol{V}$に平行にとったから上のように出来るわけである。このため、

$$h(\boldsymbol{v}) = \int \frac{f(\boldsymbol{v}_f)}{|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_f|} d\boldsymbol{v}_f \tag{15}$$

なる関数 $h(\boldsymbol{v})$ を導入して、

$$< \Delta v_i >= -\Gamma(1 + m/m_f)\frac{\partial h}{\partial v_i} \tag{16}$$

ということになる。

2 次の項についても同様な整理が可能である。Q_{ij}は$\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ の$\boldsymbol{e}_2'$と$\boldsymbol{e}_3'$によって張られる平面への写像の内積なので、$\boldsymbol{e}_1'$との内積の分をつけてやれば元の単位ベクトル同士の内積になる。つまり、

$$Q_{ij} = \delta_{ij} - (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_1')(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_1') = \delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{V^2} \tag{17}$$

したがって、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_i \partial v_j} = \frac{1}{V}\left(\delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{V^2}\right) = Q_{ij}/V \tag{18}$$

というわけで、

$$g(v) = \int f(\boldsymbol{v}_f)|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_f| d\boldsymbol{v}_f \tag{19}$$

とおけば、

$$< \Delta v_i \Delta v_j >= \Gamma \frac{\partial^2 g}{\partial v_i \partial v_j} \tag{20}$$

1.4　バックグラウンド速度分布が熱平衡の場合

前節では、バックグラウンドの速度分布が任意のものについて、実際に計算可能な式を導いた。ここでは、速度分布が等方的な場合について式を単純化してみる。

速度分布が等方的な場合、h や gの積分を、 $\boldsymbol{v}_f$の絶対値方向と角度方向に分けることができる。角度方向の積分については、 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}_f$のなす角度を θとし、$\mu = \cos\theta$ とすれば、球面上での積分が、まず h については

$$\int \frac{d\boldsymbol{v}_f}{|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_f|} = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{|v^2 - 2\mu v v_f + v_f^2|^{1/2}} = 4\pi \begin{cases} 1/v, & (v > v_f) \\ 1/v_f, & (v < v_f) \end{cases} \tag{21}$$

となる。これは、球面上に分布する電荷の作るポテンシャルと同じ式である。gについても同様に計算できて

$$\int |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_f| d\boldsymbol{v}_f = 2\pi \int_{-1}^{1} |v^2 - 2\mu v v_f + v_f^2|^{1/2} d\mu = \frac{4\pi}{3} \begin{cases} 3v + v_f^2/v, & (v > v_f) \\ 3v_f + v^2/vf, & (v < v_f) \end{cases} \tag{22}$$

となる。これから、

$$
\begin{aligned}
F_n(v) &= \int_0^v \left(\frac{v_f}{v}\right)^n f(v_f) dv_f \\
E_n(v) &= \int_v^\infty \left(\frac{v_f}{v}\right)^n f(v_f) dv_f
\end{aligned} \tag{23}
$$

というものを考えると、

$$
\begin{aligned}
h(v) &= 4\pi v[F_2(v) + E_1(v)] \\
g(v) &= \frac{4\pi v^3}{3}[3F_2(v) + F_4(v) + 3E_3(v) + E_1(v)]
\end{aligned} \tag{24}
$$

これらから、最終的な結果、すなわち、バックグラウンドが動いている時の、速度に平行な速度変化と垂直なそれを書き下せることになる。それらは、結局、

$$< \Delta v_{\text{平行}} > = -4\pi\Gamma \left(1 + \frac{m}{m_f}\right) F_2(v) \tag{25}$$

$$< \Delta v^2_{\text{平行}} > = \frac{8\pi\Gamma v}{3}[F_4(v) + E_1(v)] \tag{26}$$

$$< \Delta v^2_{\text{垂直}} > = \frac{8\pi\Gamma v}{3}[3F_2(v) - F_4(v) + 2N E_1(v)] \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

これらから、粒子のエネルギーの変化 ΔE を出すことができる。

$$\Delta E = v\Delta v_{\text{平行}} + < \Delta v^2_{\text{平行}} > /2 + < \Delta v^2_{\text{垂直}} > /2 \tag{29}$$

と書けるので、1 次の項は

$$< \Delta E >= 4\pi\Gamma v \left[E_1(v) - \frac{m}{m_f} F_2(v)\right] \tag{30}$$

となる。2 次の項については、 $(v\Delta v_{\text{平行}})^2$以外の項は小さいので無視すると

$$< \Delta E^2 >= \frac{8\pi\Gamma v^3}{3} [F_4(v) + E_1(v)] \tag{31}$$

となる。

さて、速度分布を熱平衡、すなわち

$$f_0(\boldsymbol{v}) = \frac{n_f}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{32}$$

とすると、上の係数等を具体的に計算できることにな って、その形は

$$< \Delta v_{\text{平行}} > = -4\frac{n_f\Gamma}{\sigma^2} \left(1 + \frac{m}{m_f}\right) G(x) \tag{33}$$

$$< \Delta v^2_{\text{平行}} > = 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma} G(x)/x \tag{34}$$

$$< \Delta v^2_{\text{垂直}} > = 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma} \frac{\text{erf}(x) - G(x)}{x} \tag{35}$$

$$< \Delta E > = \sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma} \left[-\frac{m}{m_f}\text{erf}(x) + \left(1 + \frac{m}{m_f}\right) x\text{erf}'(x)\right] \tag{36}$$

ここで erf は誤差関数であり、

$$G(x) = \frac{\mathrm{erf}(x) - x\mathrm{erf}'(x)}{2x^2} \tag{37}$$

また $x = v_t/(\sqrt{2}\sigma)$ である。

山ほど式はでてきたものの、全然なんだかわからないという気分になった人もまあいるのではないかと思うので、以下、上の式の意味についてちょっと考えてみよう。

まず、速度の 1 次の項を見てみる。これは、速度分布には F_2だけを通して依存しているということに注目して欲しい。例えば、マックスウェル分布のようなものを考えた時、 vが大きい極限では $F_2 \sim 1/(2\pi v^2)$ となるので、回りが止まっているときと同じく速度変化は速度の 2 乗に反比例する。これに対して、vが小さい極限では、fを一定と見なすことが出来るので $F_2 \propto v$ となる。

これは、タイムスケールを考えてみると、速度が大きい極限では減速のタイムスケールが v^3 であるのに対し、逆の極限では 一定になるということである。すなわち、非常に速度が大きい粒子が出来てしまうとこれはなかなか減速しない。もちろん、自己重力系の場合には、そのようなものは系のなかに留まるのが困難だということもあるが。

これに対し、速度が小さいほうではタイムスケールがある一定値、つまりは $v \sim \sigma$ で決まる値あたりになるということである。

この 1 次の項は、前に述べたように dynamical friction を表している。これが問題になる場面は、例えば恒星系が質量の違う 2 つの成分から出来ているような場合である。力学平衡で、分布関数に質量依存がないようなものを考えると、これは熱平衡から遠くはなれている。従って、上の式で決まるタイムスケールで重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得る。

なお、、自己重力系ではこのエネルギー交換の結果熱平衡に向かうとは限らないということに注意する必要がある。つまり、重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得るということは、それぞれの分布関数が変わり、空間分布も変わるということである。具体的には、重いものは中心に落ちるし、軽いものは外側に押し出される。

さて、次に、2 次の項を見てみる。速度に平行な成分も垂直な成分も、 vが大きい極限では 0 にいく。特に、 垂直な成分は v に反比例する。これに対し、速度が 0 の極限では、どちらも一定値に収束する。これは停止している極限でも、回りの粒子によって揺さぶられるということを表しているわけである。

2 次回予定

まだ来週もするということで、来週は、今日出した 1 次、2 次の速度変化のモーメントから、緩和のタイムスケールをいくつかの重要な場合について出してみて、数値計算の結果と比較してみることにする。