理論天体物理学特論 I

牧野淳一郎

1997 年 10 月 29 日

1 非等方モデル、ビリアル定理

前回は、等温モデルの変形で、有限質量としたキングモデルと、それから多成分系の例として球対称等温な恒星系の中での等温ガスの分布を扱った。今日は、非等方モデルの簡単な例をあげ、それからモデルを離れて恒星系の平衡状態の一般的な性質について考える。

2 非等方モデル

非等方ということは、分布関数が $f(E,L)$ の形で書けるということである。まず、密度 ρがどう書けるかを考えてみよう。一般の分布関数で、密度は単に fを速度空間全体で積分したもの

$$\rho = \int f(\mathcal{E}, L) d^3\mathbf{v} \tag{1}$$

である。速度を極座標 (v,η,ψ) を使って

$$v_r = v\cos\eta, \quad v_\theta = v\sin\eta\cos\psi, \quad v_\phi = v\sin\eta\sin\psi \tag{2}$$

とすれば、角運動量の定義から

$$\rho = 2\pi\int_0^\pi \sin\eta d\eta \int_0^\infty f(\Psi - v^2/2, |rv\sin\eta|)v^2 dv \tag{3}$$

となる。

2.1 Osipkov-Merritt モデル

一般に f が L に依存するしかたというのは無限にあるわけだが、以下、そのなかで割と扱いやすいものとして、分布関数が

$$Q = \mathcal{E} - \frac{L^2}{2r_a^2} = \Psi - \frac{1}{2}v^2\left(1 + \frac{r^2}{r_a^2}\sin^2\eta\right) \tag{4}$$

の関数として書ける場合というのを考えてみるこれは Osipkov-Merritt モデルと呼ばれるものである。この時、上の密度の速度空間における積分を Q でかきかえると

$$\rho = 2\pi\int_0^\pi \sin\eta d\eta \int_0^\Psi f(Q)\frac{\sqrt{2(\Psi - Q)}}{[1 + (r/r_a)^2\sin^2\eta]^{3/2}} dQ \tag{5}$$

となる。 ($Q \leq 0$ なら $f(Q) = 0$ とした) ここで、とても素晴らしいことに

$$\int_0^\pi \frac{\sin\eta d\eta}{[1+(r/r_a)^2\sin^2\eta]^{3/2}} = \frac{2}{1+(r/r_a)^2} \tag{6}$$

となるので、上の積分は

$$\left(1+\frac{r^2}{r_a^2}\right)\rho(r) = 4\pi\int_0^\Psi f(Q)\sqrt{2(\Psi-Q)}dQ \tag{7}$$

という具合になって、これは実は $f(E)$ の時の式

$$\rho(r) = 4\pi\int_0^\Psi f(\mathcal{E})\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}d\mathcal{E}. \tag{8}$$

と非常に良く似た形になり、fを与えればρを求めることができる。

2.2 ρ から f へ (等方)

非等方分布などを実際に、例えば観測データの説明として使うためには、与えられた密度に対して、それを実現するような分布関数を作るという作業が必要になる。これを、まず $f(E)$ の場合についてやってみて、Osipkov-Merritt モデルの場合にも応用してみる。

式 8 で、密度が至るところ正ならば Ψは rの単調な関数なので、 ρを Ψの関数と思って、両辺を Ψで微分すれば

$$\frac{1}{\sqrt{8}\pi}\frac{d\rho}{d\Psi} = \int_0^\Psi \frac{f(\mathcal{E})d\mathcal{E}}{\sqrt{\Psi-\mathcal{E}}} \tag{9}$$

これは Abel の積分方程式になっていて、以下の解を持つ

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2}\frac{d}{d\mathcal{E}}\int_0^\mathcal{E}\frac{d\rho}{d\Psi}\frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E}-\Psi}} \tag{10}$$

ちょっと書き替えれば

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2}\left[\int_0^\mathcal{E}\frac{d^2\rho}{d\Psi^2}\frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E}-\Psi}} + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}\left(\frac{d\rho}{d\Psi}\right)_{\Psi=0}\right] \tag{11}$$

例として、Jaffe model

$$\rho = \frac{r_J^4}{r^2(r+r_J)^2}, \quad \Psi = -\ln\left(\frac{r}{r+r_J}\right) \tag{12}$$

を考えてみる。 Hernquist model でも同様に出来るけど、こっちの方が式が簡単なので。まず、 r を Ψで表してそれを ρの式に入れると、

$$\rho = (e^{\Psi/2}-e^{-\Psi/2})^4 \tag{13}$$

これを式 11に入れればいいわけだが、 $x = \sqrt{\mathcal{E}-\Psi}$ (ただし、$\mathcal{E} = -Er_j/GM$) を積分変数にすれば、

$$f(E) = \frac{M}{2\pi^3(GMr_J)3/2}\left[F_-(\sqrt{2\mathcal{E}}) - \sqrt{2}F_-(\sqrt{\mathcal{E}}) - \sqrt{2}F_+(\sqrt{\mathcal{E}}) + F_+(\sqrt{2\mathcal{E}})\right] \tag{14}$$

但し、

$$F_\pm = e^{\mp x^2}\int_0^x e^{\pm x'^2}dx' \tag{15}$$

2.3 ρ から f へ (Osipkov-Merritt)

さて、ちょっと疲れて来たかも知れないが、式 7と式 8が左辺に $1+(r/r_a)^2$がつく以外は同じ形をしていたということを思い出して欲しい。式 11は式 8の解であったわけなので、今

$$\rho_Q = \left(1+\frac{r^2}{r_a^2}\right)\rho \tag{16}$$

と置いてやれば式 11と全く同じ形、つまり

$$f(Q) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2}\left[\int_0^Q \frac{d^2\rho_Q}{d\Psi^2}\frac{d\Psi}{\sqrt{Q-\Psi}} + \frac{1}{\sqrt{Q}}\left(\frac{d\rho_Q}{d\Psi}\right)_{\Psi=0}\right] \tag{17}$$

の解があることになる。例えば Jaffe model であれば、前節と同様にして分布関数を今度は Q の関数として求めることができる。

最後に、Osipkov-Merritt モデルの性質について少し考えてみる。分布関数が $Q=\mathcal{E}-L^2/(2r_a^2)=\Phi_0-(E+L^2/(2r_a^2))$ によるということは、$f(E,L)$ の等高線が放物線になっているということである。中心近くでは、どうぜ L の取り得る値の範囲が狭いので、実は等方的な場合とあまり変わらない。これに対し、外側の $E=0$ に近いところでは、等方の場合から大きくずれる。

ずれ方は、通常の fは Eの減少関数なので、 L^2 についてもそうなり、外側にいくほど circular に近い軌道が減り、radial に近い軌道を持つ粒子が相対的に増えることになる。

このような傾向は、例えば楕円銀河などの形成過程についてのいろいろなシナリオで自然に起きること (そのうちに扱う) であり、理論的に調べられている非等方モデルは大抵上のような角運動量でカットオフを持つようなモデルになっている。

なお、非等方性の重要な観測的応用として、楕円銀河の中心部の構造のモデルがあるが、これについては後で時間があれば触れることにしたい。

3 Jeans Equations

ここまでは、 Collisionless Boltzman 方程式から出発して、 Jeans の定理を使って球対称な恒星系のモデルをいろいろ見てきた。これから 2 回程度、Collisionless Boltzman 方程式のいろいろな平均 (モーメント) をとることによって恒星系の性質を見ていくことにする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{18}$$

Collisionless Boltzman 方程式は式 18で与えられるが、これをまず速度空間全体で積分してみる。と、まず第 3 項は発散定理によって表面積分に置き換えられ、$|v|\to\infty$ の極限で fは十分速く 0 にいくので (普通は有限の $|v|$ で 0 になってないと、自己重力的にならない)、結局 0 になる。最初の 2 項は

$$\nu = \int f d^3\mathbf{v};\ \bar{v}_i = \frac{1}{\nu}\int f v_i d^3\mathbf{v} \tag{19}$$

と置いてやれば (密度と、局所的な平均速度)

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{20}$$

これは、流体の場合の連続の式と同じものである。さらに、速度の 1 次のモーメントをとるために Collisionless Boltzman に v_jを掛けて積分してみると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f v_j d^3\mathbf{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\int v_j\frac{\partial f}{\partial v_i}d^3\mathbf{v} = 0, \tag{21}$$

というような式が出てくる。但し、 i についての和をとっていることに注意。

さて、$v_j f$について発散定理 (1 次元) を使えば

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = -\int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3\mathbf{v} = -\delta_{ij}\nu \tag{22}$$

となるので、結局

$$\frac{\partial(\nu\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 \tag{23}$$

但し、 $\overline{v_i v_j}$は $v_i v_j$の局所平均である。もうちょっと見通しの立つ式にするために、まず連続の式を使って第一項から $\partial\nu/\partial t$ を消すと

$$\nu\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j\frac{\partial(\nu\bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu\overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 \tag{24}$$

さらに、

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} \tag{25}$$

を使って書き直すと

$$\nu\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t} + \nu\bar{v}_i\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu\frac{\partial\Phi}{x_j} - \frac{\partial(\nu\sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \tag{26}$$

これは、流体の場合のオイラー方程式 (運動方程式) と大体同じ格好になっている。左辺は平均の流れに沿ってみた平均速度の Lagrange 微分であり、右辺第一項はポテンシャルから力である。

最後の項は普通なら圧力の項が出てくる。流体と違うのは、ここが非等方的な stress tensor σ_{ij}^2になっているということである。

なお、いうまでもないが、速度分布が等方的であれば stress tensor は$\sigma^2 I$ (Iは単位行列) の形に書ける。さらに、等方的でない場合には、$\boldsymbol{\sigma}^2$は対称テンソルなので適当な座標系の回転により対角化出来る。例えば $f(E,L)$ で書ける時には、一つの軸を原点に向けてとれば対角化されるわけである。

3.1 例 :球対称恒星系の M/L

密度分布が球対称で平均の流れがない場合、極座標系での Jeans equation は以下の形に書き直せる :

$$\frac{d(\nu\overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r}\left[2\overline{v_r^2} - \left(\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2}\right)\right] = -\nu\frac{d\Phi}{dr} \tag{27}$$

(証明は、、、まあ、面倒なだけなので省略) もうちょっと話を簡単にするために、等方的な場合を考えると、結局

$$\frac{1}{\nu}\frac{d(\nu\overline{v_r^2})}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \tag{28}$$

すなわち

$$M(r) = -\frac{r\overline{v_r^2}}{G}\left(\frac{d\ln\nu}{d\ln r} + \frac{d\ln\overline{v_r^2}}{d\ln r}\right) \tag{29}$$

つまり、密度と速度分散の半径方向の分布がわかれば、質量分布が決まるということになる。

ここで注意してほしいのは、 νは質量を反映していないもの、例えば星の数とか、あるいは単位体積あたりの luminosity の分布でも構わないということである。これは、もともとの Collisionless Boltzman 方程式は保存する量であればなんでもなり立つからである。さらに、球対称、等方を仮定したので、表面輝度分布や視線方向速度分布から輝度密度と速度分散の空間分布を求められるので、これらから 『実際にどれだけの質量があるはずか」を求められるわけである。これから、 M/L

の空間分布が決まることになる。楕円銀河の中心に大質量ブラックホールがあるというような話は、もっとも簡単にはこのようにして質量を推定する。

なお、逆に、M/L を一定として、速度の非等方性の空間分布を求めることもできる。多くの、中心に大質量ブラックホールがあるとされている楕円銀河で、非常に非等方性の高い速度分布を作れば観測された密度と速度分散の分布が説明できないわけではないということが示されている。

4 ビリアル定理

前節では、Collisionless Boltzman 方程式の速度空間でのモーメントを考えて Jeans 方程式を導いた。ここではさらに空間全体のモーメントをとる。

式 23において、密度 νを質量密度 ρで置き換え、さらに x_kを掛けて空間全体で積分する。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} d^3\mathbf{x} = -\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathbf{x} - \int \rho x_k \frac{\partial\Phi}{x_j} d^3\mathbf{x} \tag{30}$$

右辺の最初の項は、例によって発散定理を使って書き直せる。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathbf{x} = -\int \delta_{ki}\rho\overline{v_i v_j} d^3\mathbf{x} = -2K_{kj} \tag{31}$$

これは、運動エネルギテンソル $\boldsymbol{K}$の定義を与える。ついでに第二項はポテンシャルエネルギーテンソル $\boldsymbol{W}$と呼ばれるものである。

さらに、 $\boldsymbol{\sigma}^2$の定義を使って、

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \tag{32}$$

但し

$$T_{jk} = \frac{1}{2}\int \rho\bar{v}_j\bar{v}_k d^3\mathbf{x}, \quad \Pi_{jk} = \int \rho\sigma^2_{jk} d^3\mathbf{x}, \tag{33}$$

さらに、 j,k についての式と k,jについての式を足してやると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \rho(x_k\bar{v}_j + x_j\bar{v}_k) d^3\mathbf{x} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{34}$$

さらに、慣性モーメントテンソル

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3\mathbf{x} \tag{35}$$

を導入して、連続の式とか発散定理とかを使うと

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \rho(x_k\bar{v}_j + x_j\bar{v}_k) d^3\mathbf{x} \tag{36}$$

で、結局

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{37}$$

これをテンサービリアル定理という。

さて、今定常状態　(Iの時間微分が 0) を考え、さらに上の式のトレースをとってみると、T, Π の定義からこれらの寄与は全運動エネルギー Kの 2 倍になる。W の方は、Φの定義を使えば

$$W = \int \rho \sum_k x_k \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} d^3\mathbf{x} = \int\int \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{x_k(x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \tag{38}$$

ここで $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$を入れ換えた積分を書き、両方を足すと

$$W = \frac{1}{2}\int\int \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')\sum_k \frac{(x_k - x_k')^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\int \rho\Phi d^3\mathbf{x} \tag{39}$$

というわけで、 W は系の全ポテンシャルエネルギーである。結局、

$$2K + W = 0 \tag{40}$$

が成り立つ。これを、スカラービリアル定理、または単にビリアル定理という。

今、系の全エネルギーを E とすれば、 $E = K + W$ であるから、

$$E = -K = W/2 \tag{41}$$

ということになる。つまり、定常状態にある自己重力恒星系では、必ず全エネルギーはポテンシャルエネルギーのちょうど半分であり、絶対値が運動エネルギーに等しい。これは球対称とかそういう仮定なしに常に正しい。

5 来週の予定

来週は、ビリアル定理の応用例をいくつか示した後、定常ではない、時間発展する系についての議論に入っていく。具体的には Jeans 不安定と、その有限振幅段階を扱う。