理論天体物理学特論 I

牧野淳一郎

1997 年 10 月 15 日

1 力学平衡とジーンズの定理

前回は、とりあえず無衝突ボルツマン方程式を導いて、それがどういうものかを少し考えるということをした。もう一回式を書いておく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{1}$$

ここで f は 6 次元位相空間での分布関数であり、 Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{2}$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int d\mathbf{v} f, \tag{3}$$

である。

なお、以下の議論では (当分) m のことは忘れて、その代わり f が個数密度ではなくて質量分布であるということにしておく。

今日は、これらから、まず、「力学平衡状態」とはどう定義され、どういう性質があるかということを考え、それから具体的な平衡状態の例を見ていくことにする。

まず、「力学平衡」とは何かということだが、これは、上の無衝突ボルツマン方程式とポアソン方程式を連立させたものの定常解、すなわち、時間的に変化しない解ということになる。従って、ある分布関数 f が力学平衡にあるということは、それによって決まるポテンシャル Φ を固定して考えた時に、f の時間微分が 0 になるということである。

ここで、わざわざ「力学」とつけるのは、もちろん平衡状態にはほかにもいろいろあるからである。もっとも重要なのは熱平衡の概念であるが、これはまた後で。

2 運動の積分

平衡状態というものを考える上で基本になるのは、「運動の積分」という概念である。ポテンシャル Φのもとで、ある $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ の関数 I が運動の積分であるとは、その上で

$$\frac{d}{dt} I(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0, \tag{4}$$

がなり立つことである。つまり、実際にすべての粒子の軌道について、その上でその量が変化しないということである。ちょっと変形すれば

$$\mathbf{v} \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{5}$$

これと、上の無衝突ボルツマン方程式を比べてみると、すぐわかるように時間微分が落ちているだけである。

なお、「運動の積分」というときの流儀は 2 通りあって、一般に運動の保存量のことを「運動の積分」という流儀もあるが、ここでは位相空間の座標だけの関数であって同時に保存量であるものをさす。具体的には、たとえば 1 次元調和振動子で「初期の位相」というのは保存量だが運動の積分ではない。これは、時間が入ってくるからである。

2.1 例

エネルギー $1/v^2+\Phi$ や、ポテンシャルが球対称 (r だけの関数) の場合の角運動量ベクトル $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ は運動の積分である。

3 ジーンズの定理

さて、上のように I を定義すると、以下の「ジーンズの定理」がなり立つことがわかる。

ジーンズの定理 任意の無衝突ボルツマン方程式の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

いいかえると、分布関数 f が定常であるためには、運動の積分 $I_1, I_2, ..., I_m$ があって $f = f(I_1, I_2, ..., I_m)$ の形で書けることが必要十分ということ。

証明だが、まず「定常ならば運動の積で書ける」というほうを考えてみる。これは、f 自体が運動の積分の定義を満たしているので、OK。

逆のほうは、実際に f の全微分を I_k で書き下せば、それぞれが 0 になるということからいえる。

というわけで、これはなかなか強力な定理だが、一般の場合にはそれほど役に立つわけではない。というのは、ポテンシャルを与えた時に一般に運動の積分というのは 5 個あるはずだが、それらをすべて知っているということはないからである。

ただし、球対称とか軸対称とか条件をつけると、いろいろちゃんと決まるようになる。以下、まず球対称の場合を考える。

4 球対称の場合

球対称の場合、運動の積分はエネルギーと角運動量の 3 成分で 4 つある。一般にはもう一つあるが、これは特別な場合を除いてあまり意味がないので、定常な分布関数はエネルギーと角運動量だけで書けると思っていい。

いちおう、ここで、意味がないというのはどういうことかということを説明しておく。そのためには、意味がある特別な場合というのを考えるのがよい。これは、ケプラー軌道のような、軌道が閉じる場合である。この時には、エネルギーと角運動量の他に、軌道全体の向きを表す量 (近点経度) が保存する。これはちゃんと保存量になっている。

しかし、一般には軌道が閉じない。このときでも、近点経度に対応するような保存量が実は存在しているが、それにも関わらず、ある軌道がエネルギーと角運動量で決まる部分空間を覆ってしまう (数学的には、もちろんすべての点を覆えるのではなく、任意の点について、いくらでも近くにいけるというだけだが)。こうなっていると、その積分に分布関数が依存すると、連続性とか微分可能性とかに困難を生じることになる。

さて、 f は E と $\mathbf{J}$ によるということにしたわけだが、いま球対称な場合ということなので $\mathbf{J}$ の方向にではなく、絶対値だけに依存するのでないといけない。したがって、実は球対称の分布関数は一般に $f(E, J)$ と書けるということになる。

我々が扱いたいのは自己重力系なので、実際にこれを球対称の場合に書き下してみると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G\int f\left(\frac{1}{2}v^2+\Phi, |\mathbf{r}\times\mathbf{v}|\right)d\mathbf{v}, \tag{6}$$

てな感じになる。

5 $f(E)$ の場合

上の場合でもまだちょっと大変なので、さらに単純化してとりあえず J にもよらない場合というのを考えてみる。これには、なかなか特別な、空間上の各点で速度分散が等方的であるという性質がある。これはどういうことかというと、一般にある方向の速度分散というのは

$$< v_e^2 >= \frac{1}{\rho}\int v_e^2 f(v^2+\Phi)d\mathbf{v} \tag{7}$$

となるが、 f が v の絶対値にしかよらないので、 v_e の方向にこの積分はよらない。まあ、速度分散がとかいうより、速度分布自体が等方的なのだから当然ではある。

以下、扱いやすくするために変数をとり直す。

$$\Psi = -\Phi+\Phi_0, \qquad \mathcal{E} = -E+\Phi_0 = \Psi - v^2/2 \tag{8}$$

ここで Φ_0 は定数で、普通は $\mathcal{E} > 0$ で $f > 0$, $\mathcal{E} \leq$ で $f = 0$ となるようにとる。

これらを使って、さらに vの角度方向に渡って積分すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) &= -16\pi^2 G\int_0^{\sqrt{2\Psi}} f(\Psi-\frac{1}{2}v^2)v^2 d\mathbf{v} \\ &= -16\pi^2 G\int_0^{\Psi} f(\mathcal{E})\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}d\mathcal{E}.\end{aligned} \tag{9}$$

これで、一般に f を与えて Ψ を求めるとか、あるいはその逆とかが出来る。

ただし、 Ψ を与えて f を求めようってときには、求まった f が $f \geq 0$ の条件を満たすという保証はないので、そういうのは物理的には意味がない解ということになる。

6 球対称な分布関数の例

ここであげるのはあくまでも例であるが、さまざまな理由からその性質がよく調べられているものである。

6.1 ポリトロープとプラマーモデル

ある意味でもっとも簡単な分布関数の例は、 $\mathcal{E}$の冪乗 (パワー) で書けるものである。例えば

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} F\mathcal{E}^{n-3/2} & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{10}$$

これから、まず密度を Ψ の関数として求められる ($\varphi^2 = 2\Psi\cos\theta$ なる変数変換のあと)。で、答えは

$$\rho = c_n \Psi^n \quad (\Psi > 0) \tag{11}$$

となる。ただし、 c_nが有限になるためには $n > 1/2$ でないといけない。

上を使ってポアソン方程式から ρを消去すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \tag{12}$$

変数を適当にスケーリングして

$$\frac{1}{s^2}\frac{d}{ds}\left(s^2\frac{d\psi}{ds}\right) + \psi^n = 0 \tag{13}$$

としたものを Lane-Emden 方程式と呼ぶ。

実際には、上の Lane-Emden 方程式を解かないとポテンシャルや密度がどうなっているかはよくわからない。で、一般の n ではこの方程式には初等的な解はないが、 $n = 5$ の場合には解があることが古くから知られている。これは

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}s^2}} \tag{14}$$

の形をしている。これが Lane-Emden 方程式を満たしていることは各自確かめること。さらに、密度は $c_5\phi^5$で与えられることになる。

密度が $r = 0$ で有限で、$r \to \infty$ で $1/r^3$より速く落ちるので、質量は有限である。

これは、天文学的になにか素晴らしいものであるというわけではないが、球状星団のうち中心密度が低いものにはまあまあ似ていなくもない。とりあえず、これの意味は、解析関数で簡単に書ける自己重力系の self-consistent なモデルであるということである。

プラマーモデルは、いろんなシミュレーションの初期条件として使われることが多い。

6.2 Hernquist Model

プラマーモデルはその存在が前世紀から知られているが、こちらは論文が発表されたのが 1990 年 (というわけで、 Binney & Tremaine のときにはまだ知られていなかった) という、非常に新しいモデルである (Hernquist, L., 1990, ApJ 356, 359)。これは、ポテンシャルを

$$\Phi = -\frac{1}{r + a} \tag{15}$$

で与える。密度分布は

$$\rho = C\frac{a^4}{r(r + a)^3} \tag{16}$$

で書ける。分布関数は求まっているが、めんどくさいのでここには書かない。とりあえず、密度とポテンシャルがコンシステントになっていることは確認してみよう。なお、一般に球対称ならば

$$\frac{d\Phi}{dr} = GM_r/r^2 \tag{17}$$

であることに注意。これは、単に半径 r のところでの重力加速度である。

Hernquist Model には、「$r^{1/4}$則をかなり良く再現する」という著しい特徴がある。

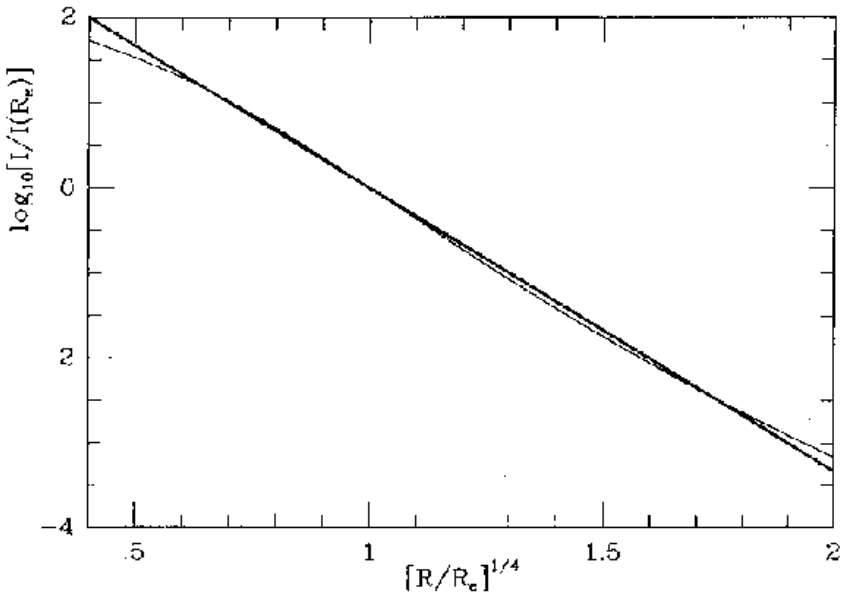

FIG. 4. Surface brightness profiles for the $R^{1/4}$ law (*thick curve*) and the present model (*thin curve*) as a function of $(R/R_e)^{1/4}$. Surface brightness is normalized to its value at R_e where R_e refers separately to the effective radii of the two models.

$r^{1/4}$則については後でその物理的解釈も含めて詳しく議論することにしたいが、要するに、観測される楕円銀河の表面輝度の対数 (要するに等級ですね) が、半径の $1/4$ 乗に対して直線にのって見えるというものである。この性質と、一応解析関数で分布関数が書けるということのために、楕円銀河やダークハローのモデルとして広く使われるようになってきている。

ただし、このモデルにはいくつか妙な性質もあり、それについてもまた後で触れることになるはずである。

6.3 等温モデル

前回、無衝突ボルツマン方程式の定常解は熱平衡とは限らないし、そもそもエントロピーが発生しないのだから系が熱平衡に向かって進化するとも限らないという話をした。が、後で出てくるようないくつかの理由から、熱平衡状態について良く理解しておくことは結構大事である。熱平衡状態では (古典統計なので) 分布関数はマックスウェル–ボルツマン分布、すなわち

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{18}$$

で与えられなければならない。まず、例によってこれを速度空間で積分して密度をポテンシャルの関数として表す。この時に誤差関数についての

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 1 \tag{19}$$

を使うと、

$$\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} \tag{20}$$

ポアソン方程式にこれを入れると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{21}$$

従って、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -4\pi G\sigma^2\rho \tag{22}$$

後はこれを数値的に解くわけだが、まず、一つ特別な解があるということを指摘しておく

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \tag{23}$$

は、上の方程式を満たし、解の一つとなっている。これを singular isothermal sphere と呼ぶ。これは self consistent なモデルではない。というのは、質量が $M_r \propto r$ となって有限ではないからである。が、例えば銀河ハローの中心部、あるいは楕円銀河についても中心部についてはこれで比較的良く近似できるものもあるということがわかっている。

特に、渦巻銀河については、「回転速度が中心からの距離に (あまり) 依存しない」(いわゆる flat rotation curve) という性質が知られていて、これを説明するためには上のような $\rho \sim 1/r^2$のダークハローが必要であるということになっている。

特別ではない解は、中心密度を有限にして中心から外側に向かって解いていけばいい。この時でも、$r \to \infty$ の極限では singular isothermal に近付く。

6.3.1 流体との関係

等温モデルは、エントロピー極大であり、分布関数がボルツマン分布になっているという特別な性質がある。このため、等温ガス球と実は同じ構造をとる。以下、ガス球について方程式を導いておく。静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -rho\frac{GM_r}{r^2} \tag{24}$$

である。状態方程式に等温の

$$P = \frac{k_B T}{m}\rho \tag{25}$$

を使って Pを消して、さらに M_r を微分してみれば、係数を別にして

$$C\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2 \tag{26}$$

要するに、 stellar system とガスで同じ方程式になっている。

なお、ポリトロープでも、ポリトロピックな状態方程式を持つガス球の密度分布と stellar system のそれとは一致する。が、等温モデルの場合とは実は本質的な違いがある。等温モデルの場合は、分布関数そのものが一致する (ボルツマン分布であり、局所的にも大局的にもエントロピー最大) が、一般のポリトロープではそんなことはない (そもそもガス球ではジーンズの定理が成り立たないし、局所的にはボルツマン分布であるから)。

7 来週の予定

来週は、 isothermal sphere に適当な修正を加え、質量が有限になるようにした King models についてと、温度が違うものが同時に存在している場合の平衡モデルについて考えることにする。