計算天文学 I.

柴橋博資・牧野淳一郎

2003年 4月

目 次

第 1 章 はじめに **3**

第 2 章 計算機入門 **5**
2.1 計算機へのログインとログアウト 5
2.1.1 先ずはログインから 5
2.1.2 パスワードの変更 6
2.2 ブラウザ 7
2.3 エディター入門 7
2.3.1 Emacs の場合 7
2.3.2 vi の場合 9
2.4 ファイルの階層構造 10
2.4.1 ファイル名の表示 10
2.4.2 ファイル名の変更 10
2.4.3 ファイルの消去 11
2.4.4 ディレクトリーの階層構造 11
2.4.5 ディレクトリーの作成 11
2.4.6 ディレクトリーの移動 12
2.5 プリンターへの出力 13

第 3 章 計算機の活用 **15**
3.1 グラフィックス入門 15
3.1.1 問題：恒星の質量光度関係 17
3.2 清書システム LaTeX 入門 18
3.2.1 日本語の入力 19
3.2.2 LaTeX のサンプルと出力方法 19
3.2.3 参考書 23

第 4 章 計算機言語入門 **27**
4.1 FORTRAN 入門 27
4.1.1 FORTRAN の約束事 28
4.1.2 式と代入 29
4.1.3 四則演算 29

4.1.4 変数と型 . . . 29
4.1.5 宣言文 . . . 29
4.1.6 WRITE 文 . . . 30
4.1.7 IF 文 . . . 31
4.1.8 DO ループ . . . 31
4.1.9 条件判断 . . . 32
4.1.10 サブルーチン . . . 32
4.1.11 READ 文 . . . 34
4.1.12 ファイルへの入出力 . . . 35
4.1.13 入力回数が予め決まっていない場合 . . . 35
4.1.14 組み込み関数 . . . 36
4.1.15 自分で定義して作る外部関数：FUNCTION 文 . . . 37
4.1.16 参考書 . . . 39
4.2 FORTRAN プログラムのコンパイルと実行 . . . 39

第 5 章 計算機の更なる活用 41
5.1 計算グラフィックス入門 . . . 41
5.1.1 問題：黒体輻射 . . . 41
5.2 データベースの活用：HR 図を描く . . . 41
5.2.1 書式 . . . 42
5.2.2 FORMAT 文 . . . 43
5.2.3 DATA 文 . . . 46
5.2.4 問題：HR 図を描く . . . 46
5.3 データベースの活用：銀河の三次元分布図を描く . . . 47
5.3.1 問題：ハッブルの法則 . . . 50
5.3.2 問題：宇宙地図 . . . 50

第 6 章 方程式の数値解法 51
6.1 Newton-Raphson 法 . . . 51
6.1.1 EXTERNAL 文 . . . 53
6.1.2 問題：Newton-Raphson 法を簡単な問題に適用する . . . 53
6.1.3 問題：Mollwide 画法で天球図を描く . . . 53
6.2 二分法 . . . 54
6.3 Newton-Raphson 法と二分法のハイブリッド法 . . . 56

第 7 章 常微分方程式の数値解法：初期値問題 59
7.1 Euler 法と Runge-Kutta 法 . . . 59
7.1.1 Euler 法 . . . 59
7.1.2 Runge-Kutta 法 . . . 59

7.1.3 例題 . . . 63
7.1.4 参考文献 . . . 64
7.2 ポリトロープガス球と Lane-Emden 方程式 . . . 64
7.2.1 恒星の内部構造の基本 . . . 64
7.2.2 Lane-Emden 方程式 . . . 66
7.2.3 Lane-Emden 方程式の解の中心近傍での振舞 . . . 67
7.2.4 積分の方法 . . . 67
7.2.5 問題 . . . 68
7.2.6 参考文献 . . . 70

第 8 章 常微分方程式の数値解法：境界値問題 71
8.1 シューティング法 . . . 71
8.1.1 問題 . . . 71
8.2 境界値問題としての Lane-Emden 方程式 . . . 72
8.2.1 問題 . . . 73
8.3 現実的な恒星内部構造モデル . . . 73
8.3.1 恒星内部での輻射輸達 . . . 74
8.3.2 対流によるエネルギー輸送 . . . 75
8.3.3 おおよその値 . . . 76
8.3.4 HR 図と主系列 . . . 77
8.3.5 輻射圧と臨界光度 . . . 78
8.3.6 質量光度関係 . . . 78
8.3.7 現実的な恒星内部構造の解法の方針 . . . 79
8.3.8 ステップ 1 ：中心からの積分 . . . 79
8.3.9 問題：中心近傍での解の振舞 . . . 80
8.3.10 ステップ 2 ：表面からの積分 . . . 80
8.3.11 問題：表面近傍の温度構造 . . . 81
8.3.12 ステップ 3 ：中心からの積分と表面からの積分のフィッティング . . . 82
8.4 Henyey 法 . . . 83
8.4.1 線形化 . . . 84
8.4.2 係数行列は帯行列 . . . 85
8.4.3 帯行列を区分化して解く：漸化式 . . . 86
8.4.4 帯行列を区分化して解く：後退代入 . . . 88
8.4.5 Henyey 法の利点 . . . 89

第 9 章 常微分方程式の数値解法：固有値問題 91
9.1 フィッティング法 . . . 91
9.1.1 問題 . . . 91
9.2 固有値問題としての Lane-Emden 方程式 . . . 91

9.2.1 問題 . . . 92
9.3 恒星の固有振動 . . . 92
9.3.1 基本方程式 . . . 92
9.3.2 平衡状態 . . . 93
9.3.3 球対称の場合の平衡状態 . . . 93
9.3.4 Euler 摂動と Lagrange 摂動 . . . 94
9.3.5 線形化した基礎方程式 . . . 95
9.3.6 断熱近似と重力摂動の無視 . . . 95
9.3.7 動径振動 . . . 96
9.3.8 ポリトロープ星の動径振動 . . . 98
9.3.9 問題：固有関数、固有振動数の計算 . . . 101
9.3.10 非動径振動 . . . 102
9.3.11 問題：関数 $\omega_{\pm}^2(r)$ の形 . . . 103
9.3.12 固有モード . . . 103
9.3.13 問題：量子化条件 . . . 104
9.3.14 問題：固有関数、固有振動数の計算 . . . 104

第 10 章レポート問題 **105**
10.1 問題：黒体輻射 . . . 105
10.2 問題：恒星の質量光度関係 . . . 105
10.3 問題：HR 図を描く . . . 106
10.4 問題：Runge-Kutta 法と Euler 法と修正 Euler 法 . . . 106
10.5 問題：ポリトロープガス球 . . . 106
10.6 問題：境界値問題の例 . . . 107
10.7 問題：境界値問題としての Lane-Emden 方程式 . . . 107
10.8 問題：固有値問題の例 . . . 107
10.9 問題：固有値問題としての Lane-Emden 方程式 . . . 107
10.10問題：ポリトロープ星の固有関数、固有振動数の計算 . . . 107
10.11問題：ハッブルの法則 . . . 108
10.12問題：宇宙地図 . . . 108
10.13問題：Mollwide 画法で天球図を描く . . . 108
10.14問題：非動径振動の固有関数、固有振動数の計算 . . . 108

第 1 章　はじめに

今や、計算機は天文学の研究を進めていく上で欠く事のできない道具である。計算に使うだけではない。計算機はネットワークになっていて世界中の計算機と交信できるようになっており、コミュニケーションの道具としても欠かせない。毎日、研究室に入ったら最初にする仕事は、計算機にログインしてメイルを読む事であり、必要な返事を書く事である。自分の研究を進める時、複雑な数値計算を行う際は勿論計算機を使う。それだけではない。複雑な解析表現を扱う時にも計算機を使う。数値計算の結果は視覚化して眺めたり、発表に使う。図だけではない。動画にしたりもする。実験や観測のデータ処理にも計算機は不可欠だ。共同研究者とのやり取りには計算機のメイルを頻繁に使う。文字を使うメイルに留まらず、最近では音声を使った計算機メイルも使える。いよいよ論文を書く際には、ワープロとして計算機を使う。グラフも同時に処理できる。論文中に引用する関係論文の情報は、やはり計算機で検索する。検索はネットワークを使って行っているから、データベースはいつも最新だ。ネットワーク以前の時代には、Springer 発行の Astronomy Astrophysics Abstracts で検索するのが、普通だったが、いまや、論文の検索はネットワークの利用に限る。160,000 もの天文学・宇宙科学の論文のアブストラクトを、著者名、キーワード、雑誌名、年号などで、Web で検索出来る[1] 。論文の投稿もメイルで行ない、プレプリントはネットワークのデータベースで公開される[2] 。出版される雑誌も、ネットワークで公開される場合が多くなっているし[3] 、中には、紙による出版よりも、Web で公開する事を主とする形態とするものもある[4] 。ネットワーク版は、参考文献へのリンクがなされているなど、紙版よりも便利な点も多い。これからは、音声や動画等マルチメディアを生かせる出版形態として、Web で公開する出版が増えて行くであろう。

天文学・宇宙科学は、装置や予算が大きいという意味で巨大科学である。世界有数の大望遠鏡の建設や衛星の打ち上げには巨額の費用がかかり、研究機関毎にそのような施設を持つことはできない。そこで、これらの装置は、特定の研究者・研究機関によってだけ使われるというのででなく、多かれ少なかれ共同利用に供せられる。そのような場合、取得されたデ− タは、一定の期間は、取得した研究者に専有的に使われるが、しかる後は、運営している機関によりアーカイブとして保存され、一般の研究者に公開される、というのがよくあるルールである。その結果、NASA [5] などが抱えているデータはおびただしい種類と量に及んでいる。昔は、これらのアーカイブは磁気テープで

[1] http://adsdoc.harvard.edu/
[2] http://xxx.lanl.gov/
[3] 例えば、Astrophysical Journal (http://www.journals.uchicago.edu/ApJ/journal/)、
Astronomical Journal (http://www.journals.uchicago.edu/AJ/journal/)、
Astronomy and Astrophysics (http://link.springer.de/link/service/journals/00230/index.htm) を挙げておこう。これらの雑誌の講読者、もしくは東大の天文学教室のような講読研究機関の計算機からは、Web で雑誌を読む事が出来る。
[4] 例えば、New Astronomy 誌 (http://www.elsevier.nl/journals/newast/) が先駆代表だ。
[5] http://www.nasa.gov/

保存され、リクエストには磁気テープのコピーが配られたものである。計算機ネットワークが張り巡らされた今は、これらは、オンラインで公開されているものが多い。こうした天文・宇宙科学の特質からか、天文学・宇宙科学の、ネットワ- クでの情報公開の量とサービスは、他の分野に比べても、充実したものが多いと思う。例えば、ハッブル望遠鏡で得られた成果のプレスリリースは、直ちに Web[6] で見る事が出来る。NASA の衛星観測を始め、多くの共同利用機関への観測プロポーザルや、スケジュールも、ネットワ- クでアクセス出来る。また、天文学・宇宙科学のデータ解析に使われる多くのソフトウェアもネットワークで公開されているものが多い。地上の天文台の場合には、天気が成功を左右するが、ネットワ- クでアクセスする、衛星写真を含む気象情報も重要な情報である[7] 。数年前には、シューメーカー・レヴィ彗星が木星に衝突するという、かつて誰も見た事の無い現象が起こり、世界中の大望遠鏡が観測にあたった。その観測結果は、写真として見応えのあるものであったが、それらは、得られるや直ぐに計算機ネットワーク上で公開されていった事は記憶に新しい。ばらばらになった彗星の破片が、一週間かけて、次々と木星に衝突していくという、ダイナミックな現象は、１ヶ所の観測所だけでは追いきれない訳だが、世界中の望遠鏡がこの現象を追いかけ、写真を計算機ネットワークで逐次公開していったので、計算機の前に座っているだけで、いながらにして、時々刻々と変わっていく現象をリアルタイムで観望できたのであった。

この様に、計算機は研究を進める上で、ある時は計算のための道具として、ある時は文房具として、又ある時は通信手段として、日常的に使われる。この講義では、こういった状況を鑑み、計算機を自由に使いこなせるように体験し、その使い方を習得し、計算機を使って天文学を研究出来るようになる事を目的としている。

計算機の処理能力の向上には目覚ましいものがある。電子計算機が登場して、最初に行なわれた試みとして、天気予報がある。登場したばかりの頃の電子計算機では、明日の天気の予報が計算し終わったのは、既に明日になってからといった具合であった。今日、計算機のメモリーは増大し、３次元の流体シミュレーションもワークステーションで行えるようになった。これにより、研究のあり方にも変化が生じてきた。これまでは実験といえば、物を使ったいわゆる実験であったが、計算機による数値実験というものが確立した。天文学は、実験の出来ない学問であったのが、(数値) 実験の出来る学問となった。星の誕生から死までの進化、銀河の衝突や進化、銀河の形成、あるいはそもそもの宇宙の形成、色々な事が実験出来るようになった。この講義では、こういった現代の計算機を駆使した天文学への入門を目指して、計算機での計算をまずマスターするようにしよう。

[6] http://www.stsci.edu/
[7] http://www.jwa.go.jp/gms.html や http://www.esdim.noaa.gov/weather_page.html

第 2 章　計算機入門

2.1　計算機へのログインとログアウト

計算機のプログラムが完成したとする。紙の上で出来ただけでは計算機にとっては意味がない。計算機のディスク上 (もしくは、それに同等な記憶媒体上) のファイルとして、記録保存されていなければならない。ファイルとして収納するには、計算機のエディタを起動して、ファイルのエディット (編集作業) である。ここでは、先ず、どうやって計算機のファイルを作り、編集するかを実体験しよう。

使用する計算機は、3 号館 3 階の 315 号室に配置されている。この部屋には、天文学教室所有の学生用ワークステーション群とネットワーク接続されているポストスクリプトプリンター 1 台が配備されている。この講義では、これらの機器を活用することにする。

計算機は電気製品ではあるが、ワークステーションの電源は入りっぱなしで、常に ON のままである。間違っても、これらの電源を無断で切ってはいけない。ワークステーションはパソコンとは違い、勝手にスイッチを切ってはいけないのだ。

2.1.1　先ずはログインから

ユーザ名と初期パスワードは第一回の講義の時に与えられる。初期パスワードは、盗難防止のために、覚えにくい様に、乱数から作られたものである。以下の指示に従ってログインした後、各自、変更して良いが、変更後のパスワードは、各自忘れない様にすること。

カーソルが `Login:` の直後にある状態で、ユーザー名を入力してリターンキーを押す。すると、カーソルが `Password:` の直後に移動するので、パスワードを入力して、リターンキーを押す。この時、入力したパスワードの文字列は画面には表示されない。ユーザー名、パスワード名の両方とも正しければ、コンソールウィンドウとターミナルウィンドウがいくつか開き、それぞれにプロンプトが表示される。

ここで接続した計算機サーバーは、FreeBSD という UNIX を OS としている。UNIX は、ベル研の研究者達が開発した OS で、基本的には商用ではないために、利用者側の経済負担は少ない。そのコストパフォーマンスの良さのために、特に大学、研究所に広く使われ、ユーザの拡大が優れたフリーのソフトウェアを産み、それがために、利用環境が良くなり、よりユーザが増えるという図式を生んだ。UNIX の特徴は、一社独占の OS ではなく、SUN、HP、IBM、DEC、... 等、色々なメーカーが UNIX を OS とする計算機をリリースしている事である。それゆえ、使用環境は、大雑把にいえば、どの計算機でも似ており、使う計算機が変わっても直ぐに慣れるという利点がある。但し、

UNIX といえども、各社によってそれぞれ方言があり、全く同一という訳ではない。天文学教室の学生用ワークステーションの OS である FreeBSD や、Linux と呼ばれる UNIX は、IBM 互換のパソコンで動く OS である。

ログインすると自動的に X ウィンドウシステムが起動され、標準設定では画面上に 3 つのウィンドウが開かれる。このうち、左上のウィンドウは、コンソールウィンドウで、ふだんは使わない。左下の大きなウィンドウは、ターミナルウィンドウで、このウィンドウから色々なコマンドを入力して計算機を操作することができる。右側のウィンドウは後で述べる Emacs というエディタのウィンドウで、ファイルの編集等をこのウィンドウで行う。

ウインドウシステムでは、利用者からの入力装置として、キーボードとマウスを用いる。画面にはマウスの動きに応じて移動する× 印が表示されている。ウィンドウが複数開いている時、キーボードからの入力は、どのウィンドウに対してなされるだろうか。通常は、キーボードからの入力は、マウスのカーソルを中に含むウィンドウに、送られる。ウィンドウのカーソルは、中にマウスのカーソルを含む時は黒く塗り潰されたブロックで表示され、そうでない時には、白く表示され、一見して違いが判るようになっている。

2.1.2　パスワードの変更

先ずは、与えられた初期パスワードを変更しておこう。初期パスワードは、乱数を発生させてつくられたもので、とても覚えられそうもないからである。マウスを移動して、ターミナルウィンドウを選択しよう。画面には

```
%
```

が現れている。これは、計算機がユーザーからの入力を待っている状態である事を表すもので、% をプロンプトと呼んでいる。この状態で、小文字で

```
% passwd
```

とタイプして、リターンキーを叩くと、

```
% Old password:
```

と聞いてくるので、初期パスワードを入力する。パスワードなので、画面には文字は現れない。リターンキーを叩くと

```
% New password:
```

となるので、新しいパスワードを入力する。パスワードは英数 6 文字以上である必要がある。リターンキーを叩くと

```
% Retype new password:
```

となるので、新しいパスワードを再び入力して、リターンキーを叩くと、パスワードの変更がなされた旨のメッセージが現れる。次回からは、この新しいパスワードを使用する。パスワードは、覚え易いものでなければならないが、辞書に出ている英語の単語を使うのはやめよう。悪意のあるハッカーに、パスワードを盗まれる可能性があるからである。また、同じパスワードを長く使い続けるのも好ましくなく、頻繁に変更するようにしよう。

2.2 ブラウザ

この講義資料もそうだが、あらゆる情報を捜すのに必要なのがブラウザである。ブラウザとしては mozilla が利用できる。

```
% mozilla &
```

で mozilla が起動する。この講義関係の資料は

```
http://grape.astron.s.u-tokyo.ac.jp/pub/people/makino/kougi/keisan_tenmongakuI/
```

にある。

2.3 エディター入門

2.3.1 Emacs の場合

Emacs と呼ばれるエディタを使って、以下のようなファイル sphere.f を作成してみよう。このファイルは、第 4 章で解説する、FORTRAN という計算機言語で書かれた、球の半径から、球の表面積と体積を求めるための、計算プログラムである。取り敢えず、今はその内容は理解しなくて良い。エディタで、ファイルを作成出来るようになることが、まず肝要である。

ログインした後、右側のウィンドウ内にマウスカーソルを移動させて、Emacs をアクティブにしよう。もし、Emacs のウィンドウが画面に表示されていない場合には、ターミナルウィンドウで

```
% emacs sphere.f &
```

と入力して見よう。初期画面は、Emacs のチュートリアルに関する説明の画面になっている。リターンキーを叩くと、画面は更新され、新しくファイルを編集出来る状態になる。カーソルを 1 行目の 6 文字目まで移動させるために、スペースキーを叩く[1] 。そこからは、以下のプログラム sphere.f の各文字を入力する。入力ミスした文字を消去するには、DEL キーを押す。行替えはリターンキーを押す。

[1] Emacs は、FORTRAN のファイルについて Tab キーを押すと、カーソルが 7 文字目に移動させる機能があるので、その機能を使っても良い。

```
      Program sphere
      Implicit NONE
c constant:
      Real PI
      Parameter (PI=3.141593)
c local variable:
      Real radius
      Real area, volume
c begin:
      radius = 10.0
      area   = 4. * PI * radius**2
      volume = area * radius /3.
      Write(*,*) 'radius:',radius
      Write(*,*) ' surface area =',area,' volume =',volume
c end:
      Stop
      End
```

新たにファイルを編集するのではなく、既存のファイルを編集する時には、コントロールキーを押しながら x を押し、続けて再びコントロールキーを押しながら f を押す。するとファイル名を聞いてくるので、ファイル名を入力する。

Emacs で特徴的なのは、

- 多国語に対応したエディタである
- 下の方に白黒反転した行があり、現在編集中のファイル名等の情報が表示される
- ウィンドウの最下行に Emacs からの各種メッセージが表示される

ことである。最下行のメッセージ行は、ユーザーからのコマンドを受け付けるためにも利用され、ユーザーは、これを使うことにより、Emacs を抜けることなく、様々な仕事が出来るようになっている。反面、エディターとしては、他のエディターよりも重くなっており、不満を感じる人もいるであろう。

Emacs で頻繁に使う主なキー操作を表 2.1 に掲げる。ただし、Ctrl-文字は、コントロールキーを押したまま、その文字キーを押す事を意味する事とし、Esc 文字は、エスケープキーを押した後その文字キーを押す事を意味するものとする[2] 。

無事にプログラムを入力し終えたなら、これをファイルとしてセーブしておかねばならない。コントロールキーを押しながら、x キーを押したあと、再びコントロールキーを押しながら、s キーを押すと、sphere.f なるファイルとして内容が保存される。長いファイルをエディットする時には、途中で何度もセーブするように心掛けよう。

[2] 例えば「Ctrl-x 2」という操作は、コントロールキーを押したまま、x のキーを押し、次にコントロールキーを 押さずに2 のキー だけ を押すことを意味する。

表 2.1: Emacs で頻繁に使う主なキー操作

操作	コマンド	操作	コマンド
カーソルを右の文字へ	Ctrl-f	領域カット開始位置の指定	Ctrl-【space】
カーソルを左の文字へ	Ctrl-b	領域カット修了位置の指定	カーソルで移動
カーソルを上の文字へ	Ctrl-p	領域カットの実行	Ctrl-w
カーソルを下の文字へ	Ctrl-n	ペーストの実行	Ctrl-y
行の先頭へ	Ctrl-a	ファイルの読み込み	Ctrl-x Ctrl-f
行の末尾へ	Ctrl-e	画面の分割	Ctrl-x 2
次の画面へ	Ctrl-v	他の画面に移動	Ctrl-x o
前の画面へ	Esc v	画面をひとつに	Ctrl-x 1
ファイルの先頭へ	Esc <	バッファの切り替え	Ctrl-x b
ファイルの末尾へ	Esc >	保存して修了	Ctrl-x Ctrl-s
n 行目へ	Esc x goto-line	保存せずに修了	Ctrl-x Ctrl-c
カーソルの前の文字の消去	DEL	指定ファイルに保存	Ctrl-x Ctrl-w
カーソルの位置にある文字の消去	Ctrl-d	ファイルの読み込み	Ctrl-x Ctrl-f
カーソルから行末までの消去	Ctrl-k	ファイルの挿入	Ctrl-x i
		操作の取り消し	Ctrl-x u
			Ctrl-_

Emacs を自習するためのチュートリアルがある。Emacs の画面でコントロールキーを押しながら、h キーを押したあと、t 或いは T を押すとチュートリアルが現れる。

2.3.2 vi の場合

vi と呼ばれるエディターは、UNIX に標準的に付いて来るエディターである。先ず、マウスを移動させて、ターミナルウィンドウをアクティブにしよう。そして、ターミナルウィンドウで、

```
% vi filename
```

と入力してみよう。画面は一変し、最下行に "filename"と現れ、それ以外の行は左端に~ が出ている。vi は、Emacs と違っていきなり文字を入力する事は出来ない。文字を受け付させるために、先ず i と打ってリターンキーを叩く。これは、今後タイプする文字をエディターに insert させる、という意味のコマンドである。コマンドであるから、文字 i は画面には出ない。以後、適当に文字を入力する。改行はリターンキーである。入力を止めるのも、そのためのコマンドを打つ。これは Esc キーだ。このキーを打つと、その後の文字は、入力されない。カーソルの移動は、表 2.2 のキーで行う。

表 2.2: vi で頻繁に使う主なキー操作

操作	コマンド	操作	コマンド
カーソルを右の文字へ	l	カーソルの後に付け加える	a
カーソルを左の文字へ	h	カーソル行の上に付け加える	O
カーソルを上の文字へ	k	カーソル行の下に付け加える	o
カーソルを下の文字へ	j	カーソルの前の文字の消去	Backspace
次の画面へ	Ctrl-f	カーソルの位置にある文字の消去	x
前の画面へ	Ctrl-b	カーソルのある行末の消去	dd
ファイルの先頭へ	1G	n 行-m 行をカーソル行の後ろに	:n,mm
ファイルの末尾へ	G	n 行-m 行の領域カット	:n,md
n 行目へ	nG	n 行-m 行のバッファーへの書き	:n,mw ファイル名
カーソルのある行番号を知る	Ctrl-g	ファイルの読み込み	:r ファイル名
保存して修了	:wq	文字列の探索	/文字列
保存せずに修了	:q	文字列の置換	:s/旧文字列/新文字列

2.4　ファイルの階層構造

さて、これまでのエディット作業によっていくつかのファイルが作成されたであろう。どんな内容のファイルをどんな名前で保存したか、最早記憶に定かではないかも知れない。ファイルの操作に関するコマンドをマスターしよう。

2.4.1　ファイル名の表示

ファイルの名前は、

```
% ls
```

とすると、表示され、-l オプションをつけると、時刻やサイズを含んだ情報が表示される。

```
% ls -l
```

2.4.2　ファイル名の変更

ファイルの名前が紛らわしいので変えたくなったとしよう。

```
% mv 旧name 新name
```

とする。

2.4.3 ファイルの消去

不要になったファイルは消去しておこう。

```
% rm  filename
```

とする。

2.4.4 ディレクトリーの階層構造

ファイルの数が多くなって来ると、丁度、関係書類毎に書類ファイルにまとめるように、関係ファイル毎にグループ分けしたくなるであろう。計算機のファイルもグループ分け、階層付けをする事が出来る。この階層構造をしたグループをディレクトリーと呼ぶ。ファイルは適当なディレクトリーに収納させると良い。実は、自分のファイルと他の人のファイルが区別できるのは、ユーザ毎にディレクトリーが異なっているからに他ならない。試しに、

```
% pwd
```

とやって見よう。

```
/home/shibahashi
```

等と返って来る。/home の下の shibahashi というディレクトリーが今のディレクトリーである事を示している。

ディレクトリーは階層構造を成している。下の図はこの様な階層構造を示す。/home というディレクトリーの下に、shibahashi や makino などのユーザーディレクトリーが用意されている。

2.4.5 ディレクトリーの作成

今度は

```
% mkdir examples
% mv *.f examples/*.f
```

としてみよう。最初のコマンドが examples というサブディレクトリーを作成し、次のコマンドがナントカ.f という名前のファイルを、examples.dir のディレクトリーに移動させる。

```
% ls examples
```

で、examples の下に保存されているファイルが表示される。

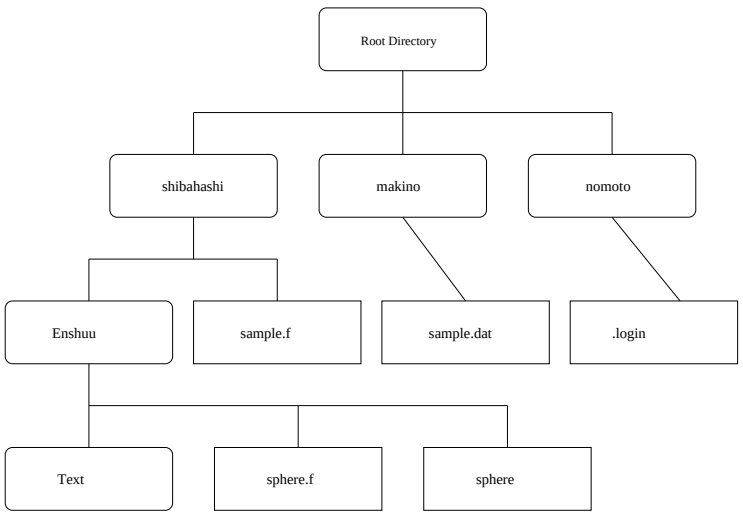

図 2.1: ディレクトリー、ファイルの階層構造の概念図。丸みを帯びた図形がディレクトリーを、長方形がファイルを表している。ルートディレクトリーの下に、各ユーザーのログインディレクトリーがある。その下にファイルを収めるが、互いに関係の深いファイルを 集めたサブディレクトリーを作って、管理しやすいようにする事が重要だ。

2.4.6　ディレクトリーの移動

サブディレクトリーに移動するのは、

```
% cd examples
```

とする。上に戻るのは、

```
% cd ..
```

だ。.. が上のディレクトリーを意味する簡易表現だ。

サブディレクトリーにいる時、別のサブディレクトリーに移るには、一度上に戻って、目的のサブディレクトリーに移っても良いが、../examples と指定すれば、一度に移動する事が出来る。同様に、../examples/examples2 の様に指定すれば、複数階層一度に指定した事になる。

2.5 プリンターへの出力

一旦こうして、プログラムが正しく作成できたら、そのプログラムをファイルとして保存しておくだけでなく、紙に出力しておきたくなるであろう。315 号室には、ポストスクリプトプリンターが配備されているので、そこに出力させることができる。

```
% a2ps-j -p  filename | lpr
```

で、プログラムは出力される。

```
% a2ps-j  filename | lpr
```

とすると、横長に 2 カラムに分割して出力される。よく UNIX の解説書には、`lpr` が印刷コマンドとして挙げてあるが、315 号室のプリンターはポストスクリプト用のプリンターなので、ポストスクリプトという形式のファイル以外は、`lpr` ではなく、一旦 `a2ps-j` を使う必要がある。

第 3 章　計算機の活用

3.1　グラフィックス入門

計算機が世の中に登場したとき、それは正に計算をするための機械であった。だからこそ、コンピューターとか計算機と呼ばれるのである。計算結果の数字の羅列から、その結果を見易くするためにグラフ化するのは、人の手によるか、ラインプリンターの活字をグラフのマーク代わりに使って行う程度であった。今日では、結果を視覚的に表わすことも計算機で容易に行えるようになったし、そうすることから、新たな視点による結果の見方が出来るようになってきた。更には、立体図や動画に表わして、より視覚に訴えることで、計算機による数値実験も、本当の実験のシミュレーションと認識されるようになってきたのである。純粋な科学の計算結果を視覚化するだけでなく、ゲームや映画やテレビに、コンピューターグラフィックスがなくてはならないものになっている事は、あらためて指摘するまでもないであろう。ここでは、計算結果を 2 次元のグラフに表わすことをマスターしてみよう。

出力結果が、

```
100.0              5.033777e-18
200.0              8.974632e-17
 ...                  .....
 ...                  .....
 ...                  .....
```

という形式でファイルに書き込まれたとしよう。この数表を (x, y)-座標にプロットしたグラフを描いてみよう。グラフィックスのパッケージソフトウェアには多種類があるが、ここでは、GNUPLOT というソフトウェアを使って見よう[1] 。

データファイルがログインディレクトリー以外のディレクトリーに置いてある場合は、そのディレクトリーに移動する。そこで、

```
% gnuplot
```

と入力すると、

```
gnuplot>
```

[1] GNUPLOT に関する参考書：大竹つよし著「使いこなす GNUPLOT (改訂新版)」(テクノプレス)。
参考ホームページ：http://art.ence.kyushu-u.ac.jp/members/kawano/gnuplot/

となる。これが、GNUPLOT のプロンプトだ。ここでは、仮に、データファイルの名前を result.dat としよう。

```
gnuplot> set terminal x11
gnuplot> set xlabel "x"
gnuplot> set ylabel "y"
gnuplot> plot "result.dat" using 1:2
```

と入力してみよう。第一行目は、出力を X 端末の画面上に出させるためのコマンドである。第二行目と第三行目は、それぞれ x 軸、y 軸に入れる座標名を定義するためのコマンド。第四行目は result.dat の第一コラムと第二コラムから、x 座標と y 座標の数値を読み込む事を意味している。画面に、新しくウィンドウが開き、図が表示される筈だ。

デフォルトでは、x 座標、y 座標とも、数表の範囲を全部カバーするようになっている。制限を付けたい時は、

```
gnuplot> plot [0:2000][1:200] "result.dat" using 1:2
```

のように、$[x_{\min} : x_{\max}]$, $[y_{\min} : y_{\max}]$ を順に指定してから、ファイル名そのほかを指定する。

この様に、GNUPLOT は会話形式で、グラフを簡単に表示させる事が出来る。それでは、会話形式で打ち込んだコマンドを保存しておいて、再利用できないだろうか。GNUPLOT を終了させない限り、GNUPLOT はコマンドを覚えている。試しに、

```
gnuplot> clear
```

とやって見よう。さあ大変、グラフが消えてしまった。しかし、慌てず騒がず、

```
gnuplot> replot
```

とすると、GNUPLOT を起動してから今までのコマンドを再度実行してくれる。

次に GNUPLOT を起動した時に、再び同じ事をさせるには、コマンド群をファイルに書き込んでおく必要がある。

```
gnuplot> save "filename"
```

とすると、バッファーの内容が、filename という名前のファイルに書き込まれる。このファイルは、後で、エディターで編集する事が出来る。このコマンドを記述したファイル (マクロコマンド) を GNUPLOT で使う時は、

```
gnuplot> load "filename"
```

とすれば良い。GNUPLOT は、デフォルトで、様々な環境をセットアップしてくれている。ユーザーが自ら打ち込んだコマンドだけでなく、これらのデフォルトセッティングも同時にセーブされる事に注意しよう。コマンドを一部変更してもう一度図を描きたいときは、このファイルを Mule で編集し、再び GNUPLOT から ロードさせれば良い。

グラフを最終的に紙に出力しよう。

```
gnuplot> set terminal postscript
gnuplot> set output "filename.ps"
```

とする。最初のコマンド set terminal postscript により、以後のコマンドに対する出力先は、ディスプレイではなくポストスクリプトという形式のファイルである事を宣言する。二番目のコマンド set output "filename.ps" で、このポストスクリプトファイルを filename.ps という名前のファイルとして保存させることを宣言する。コマンド群をもう一度入力しても良いが、バッファーの内容を再実行するのなら、replot でよい。ここで、マウスカーソルを別のターミナルウィンドウに移して、そのウィンドウをアクティブにし、そこから

```
% ghostview  filename.ps &
```

としてみよう。ghostview は、ポストスクリプトファイルを画面に表示させるソフトウェアである。表示されたファイルが期待通りであるならば、これを紙に出力してみよう。それには、マウスカーソルを別のターミナルウィンドウに移して、そのウィンドウをアクティブにし、そこから

```
% lpr  filename.ps
```

と入力する。最後の lpr がプリンターにポストスクリプトファイルをプリンターに出力させるコマンドだ。この際、問題のウィンドウのカレントディレクトリーは、GNUPLOT を起動させているディレクトリーと同じにさせておかねばならない事は言うまでもないだろう。

GNUPLOT の終了のさせかたを最後に述べよう。

```
gnuplot> exit
```

で終了となり、プロンプトに戻る。

なお、GNUPLOT の起動中に

```
gnuplot> help
```

で、GNUPLOT のオンラインヘルプを呼び出せ、各コマンドの意味や使い方を知る事が出来るので、活用して欲しい。

3.1.1 問題：恒星の質量光度関係

実視連星の年周視差が測定できるために連星までの距離が判り、連星の公転周期が測られ、二つの星の共通重心との間の距離比が判ると、ケプラーの法則を使うことによって、連星を構成する恒星の質量が決定できる。距離がわかるので、実視光度から、絶対光度へも換算出来る。これにより、恒星の質量と光度の関係を調べる事が出来る。こうして得られた恒星の絶対光度と質量のデータ[2] から、質量と光度の関係を図示せよ。データファイルには、二つの星の質量 $(M_1/M_\odot, M_2/M_\odot)$ と光度 $(\log L_1/L_\odot, \log L_2/L_\odot)$ が書かれている。

[2] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/double-star.dat

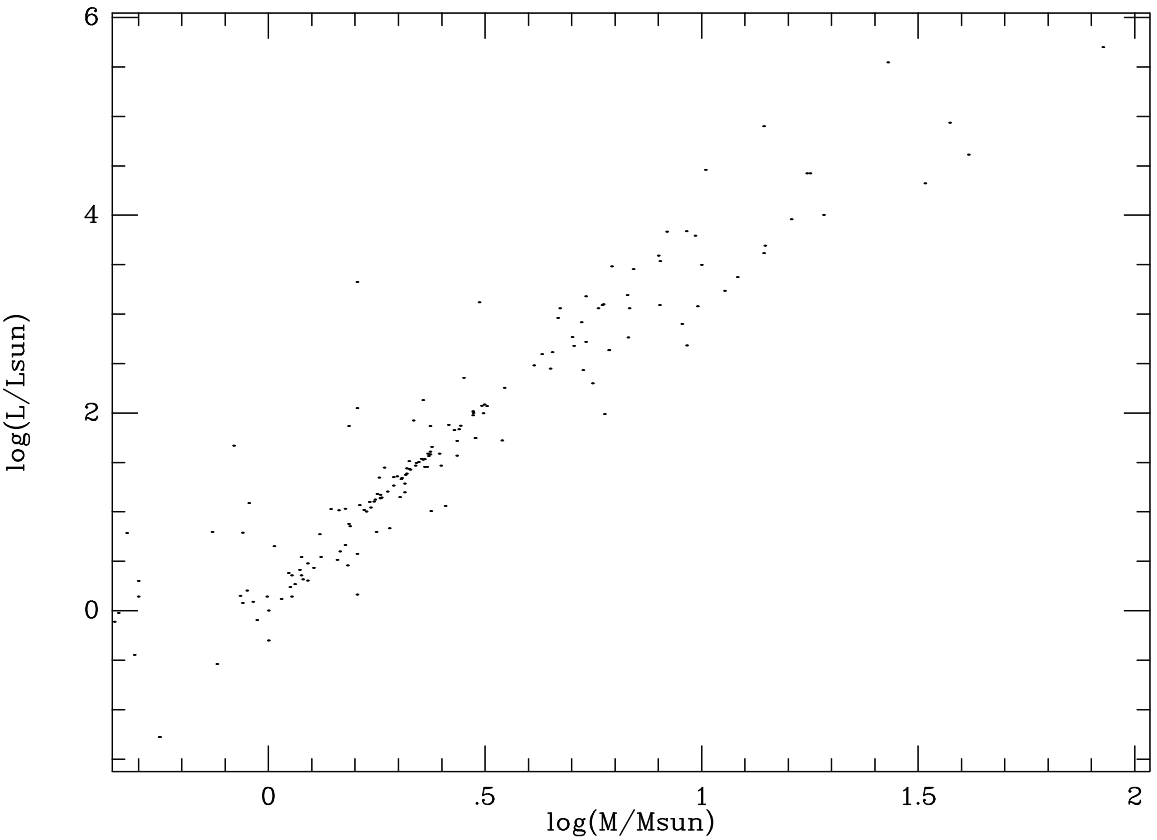

図 3.1: 恒星の質量光度関係。

3.2　清書システム LaTeX 入門

レポートを清書するのに、ワークステーションを使おう。清書システムとして、LaTeX がよく使われる。文書を必要なコマンドと共にテキストファイルとして編集したものに、LaTeX を掛けると

- 組版規則に従って文書を整形する
- ページ付け等を自動的に行う
- 図を適当なところに挿入する

等が行なわれる。これは、バッチ処理方式であり、仕上がり画面そのものを編集する WHYSEWHYG 方式ではないが、

- 数式処理に優れる
- 世界中で広く使われている

- ワークステーションをはじめ、LaTeX は色々な計算機で動くために、汎用性が高い

等の特徴を持つために、特に天文学を始めとする理工系の文書作成には広く使用されており、論文、学会のの申込等も LaTeX で書く事が要求される場合が多い。いまや理工系では必須である。

3.2.1 日本語の入力

FORTRAN プログラムの作成でエディター の使い方には慣れてきたと思う。しかし、プログラムの文字は英数字であり、レポー ト作成で不可欠な日本語ではなかった。そこで、先ず日本語の入力する方法について解説しておこう。Mule で日本語入力する方法は色々あるが、ここでは Egg という日本語入力システムを紹介する。Egg で変換を行う時は、コントロー ルキー を押しながらバックスラッシュキー を押してロー マ字かな変換モー ドとする。この状態では画面の左下に [あ] と表示される。ここでロー マ字で入力し、適当なところで区切ってスペー スキー を押すと、かな漢字変換が行われる。区切りは、単語ごとでもよいし、適当な文節ごとでもよい。ひらがなのままで変換をしたくなければ、スペー スキー ではなく、リター ンキー を押す。文節の区切りは空白で示される。以下に、変換の際の基本操作を列挙する。

表 3.1: Egg で頻繁に使う主なキー操作

操作	コマンド	操作	コマンド
次の変換候補	スペー スキー	文節を長くする	Ctrl-o
前の変換候補	Ctrl-p	文節を短くする	Ctrl-i
右の文節へ	Ctrl-f	確定	リター ンキー
左の文節へ	Ctrl-b	変換モー ドから抜ける	Ctrl-

3.2.2 LaTeX のサンプルと出力方法

レポートを書くための LaTeX 用テキストファイルの例を挙げておく。

```
\documentstyle[epsfig]{jarticle}
\textheight 20.cm
\textwidth 15cm
\hoffset -2cm
\voffset -2cm
\oddsidemargin 3.2cm
\evensidemargin 2.0cm
\pagestyle{headings}
\title{計算天文学レポート I}
\author{橋本 龍太郎\\
(学生証番号 S10101)}
\begin{document}
\maketitle
\begin{abstract}
簡単なアブストラクトを付けよう。
\end{abstract}

\section{はじめに}
こうして本文を書き始める。マージンなど
気にすることなく、
書いてよい。

段落を変えるときは、１行空白行を入れる。文の中に数学表現が入るときには、
$\sin\theta$のように書く。
数式は
\begin{equation}
B(T) = {{2\pi h \nu^3}\over{c^2}}
       {{1}\over{\exp{h\nu/kT}-1}}
\end{equation}
のように書く。式の番号は自動的に付く。
\begin{equation}
B(T) = {{2\pi h c^5}\over{\lambda^5}}
       {{1}\over{\exp{hc/\lambda kT}-1}}
\label{Planck}
\end{equation}
のように式に名前を付けると、数式 (\ref{Planck}) のように、本文中で
式を引用する際に式の番号が自動的にリファーされる。
```

```
\section{数式表現}
ギリシャ文字は
$
\alpha \beta \gamma \delta
$
等と書き、数学記号は
$
\cos \sin \tan \exp \circ \bullet \cdot \odot \leq \geq \ll \gg \simeq \propto
$
のように書く。次のような記号もよく使う。
$
\leftarrow \rightarrow \infty \sum \int \Re \Im
$

\section{箇条書き}
箇条書きは、番号を付けるときは、
\begin{enumerate}
\item 最初の項目
\item 次の項目
\begin{enumerate}
\item 最初の小項目
\item 次の小項目
\end{enumerate}
\end{enumerate}
のように書き、番号を付けないときには、
\begin{itemize}
\item 最初の項目
\item 次の項目とし、
\begin{itemize}
\item 最初の小項目
\item 次の小項目
\end{itemize}
\end{itemize}
のように書く。

\section{表}
表を書くには次のようにする。
\begin{table}[h]
```

```
\caption{表の例：キャプションも自動的に入る。}
\begin{center}
\begin{tabular}{lcc}\hline\hline
項目          & 格納形式 & 行中の位置 \\ \hline
HR 番号       & I4       &   1 --  4  \\
名前          & A7       &   8 -- 14  \\
実視等級      & F5.2     & 109 -- 113 \\
スペクトル型 & A2       & 137 -- 138 \\
視差          & F5.3     & 170 -- 174 \\ \hline
\end{tabular}
\end{center}
\label{tab9}
\end{table}
```

表の名前を付けておくと、文中で、表\ref{tab9}のように引用することができる。

```
\section{ポストスクリプト形式の図の取り込み}
```

ポストスクリプト形式の図のヘッダー部分に図の大きさなどの情報が書かれている
EPS 形式のファイル（ここでは bb.ps という名前のファイルであるとしよう。）
は次のようにして文中に取り込むことができる。

```
\begin{figure}[t]
\begin{center}
\leavevmode
\centerline{\epsfig{file=bb.ps,width=9.5cm}}
\caption{キャプションは自動的に取り入れられる。}
\end{center}
\end{figure}
```

図の大きさは原図によらずに、epsfile の中の記述で自由に変えることができる。
図の位置は、LaTeX が適当に決めてくれる。
GNUPLOT で、結果を EPS 形式のファイルとして保存するには、ターミナルタイプを

```
gnuplot> set term postscript eps
```

と指定する。
図に仮の名前を付けておくと、文中で図\ref{bb_ps} のように引用することができる。

こうして書いた文書ファイルは\end{document}で終わる。

```
\end{document}
```

さて、こうして作成した LaTeX 用ファイルを sample.tex としよう。コマンド platex を実行する。

```
% platex sample
```

.tex は省略してよい。エラーが無ければ、sample.dvi sample.log sample.aux というファイルが作成される。もう一度コマンド platex を実行することによって、文中で仮の名前で引用した数式や表や図が正しく番号で引用されるようになる。

sample.dvi が作成されたら、コマンド xdvi を使って、画面の上で、清書された結果を眺めてみよう。コマンドは

```
% xdvi sample &
```

だ。ここでの sample は、sample.dvi のことである。.dvi は省略してよい。画面には格子が現れるので、マウスで位置を決めて左ボタンを押す。すると、画面上には、清書結果が表示されると同時に、右方には「ページを進める」「ページを戻る」等のメニューが表示される。マウスカーソルを清書結果の適当な文字のところに移動させて、中ボタンを押すと、その部分を拡大表示して見ることができる。図は、外枠だけが表示されている筈だ。その状態で、コントロール記号を押しながら g を押すと (Ctrl-g)、図が表示される。

表示された清書結果に不満があれば、エディターで sample.tex ファイルを修正し、一連の作業を繰り返す。清書結果が満足出来る状態になったならば、

```
% dvi2ps sample | lpr
```

とすると、プリンターに出力させることができる。以下に出力例を示す。

3.2.3 参考書

野寺隆志：楽々LaTeX (第 2 版)(共立出版)
奥村晴彦：LaTeX 入門 (技術評論社)

1

計算天文学レポート I

橋本 龍太郎
(学生証番号 S10101)

平成 15 年 4 月 6 日

概 要

簡単なアブストラクトを付けよう。

1　はじめに

こうして本文を書き始める。マージンなど気にすることなく、書いてよい。

段落を変えるときは、１行空白行を入れる。文の中に数学表現が入るときには、$\sin\theta$ のように書く。数式は

$$B(T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp h\nu/kT - 1} \tag{1}$$

のように書く。式の番号は自動的に付く。

$$B(T) = \frac{2\pi hc^5}{\lambda^5}\frac{1}{\exp hc/\lambda kT - 1} \tag{2}$$

のように式に名前を付けると、数式 (2) のように、本文中で式を引用する際に式の番号が自動的にリファーされる。

2　数式表現

ギリシャ文字は $\alpha\beta\gamma\delta$ 等と書き、数学記号は $\cos\sin\tan\exp\circ\bullet\cdot\odot\ \leq\geq\ll\gg\simeq\propto$ のように書く。次のような記号もよく使う。$\longleftrightarrow\ \infty\ \sum\ \int\ \Re\Im$

3　箇条書き

箇条書きは、番号を付けるときは、

1. 最初の項目
2. 次の項目

(a) 最初の小項目
(b) 次の小項目

のように書き、番号を付けないときには、

- 最初の項目
- 次の項目とし、
  - 最初の小項目
  - 次の小項目

のように書く。

4 表

表を書くには次のようにする。表の名前を付けておくと、文中で、表 1 のように引用することがで

表 1: 表の例：キャプションも自動的に入る。

項目	格納形式	行中の位置
HR 番号	I4	1 – 4
名前	A7	8 – 14
実視等級	F5.2	109 – 113
スペクトル型	A2	137 – 138
視差	F5.3	170 – 174

きる。

5 ポストスクリプト形式の図の取り込み

ポストスクリプト形式の図のヘッダー部分に図の大きさなどの情報が書かれている EPS 形式のファイル (ここでは bb.ps という名前のファイルであるとしよう。) は次のようにして文中に取り込むことができる。図の大きさは原図によらずに、epsfile の中の記述で自由に変えることができる。図の位置は、LaTeX が適当に決めてくれる。GNUPLOT で、結果を EPS 形式のファイルとして保存するには、ターミナルタイプを gnuplot> set term postscript eps と指定する。図に仮の名前を付けておくと、文中で図 1 のように引用することができる。

こうして書いた文書ファイルは

```
\end{document}
```

5. ポストスクリプト形式の図の取り込み 3

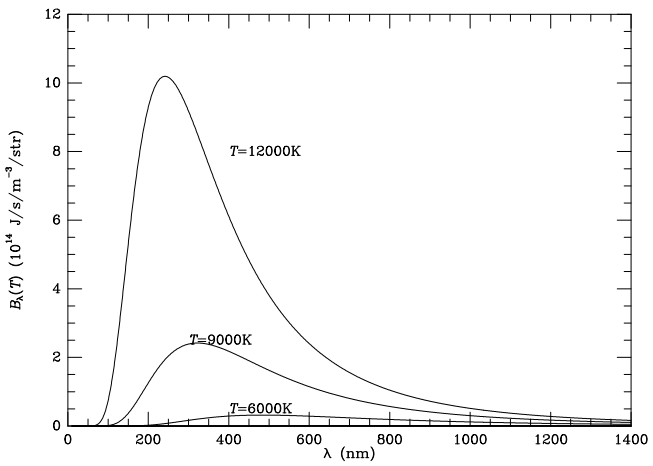

図 1: キャプションは自動的に取り入れられる。

で終わる。

第 4 章　計算機言語入門

4.1　FORTRAN 入門

計算機の言語には色々なものがある。それぞれ特徴を持っており、分野や用途によって使い分けられている。科学計算においては、FORTRAN の重要度が高い。C や C++ も良く使われる。他に、数式処理のための言語として、REDUCE や LISP や Mathematica も重宝である。多くの計算機環境では、こういった言語を組み合わせて使用する事が出来るので、用途や目的に応じて、multilingual な特徴を生かした使い方をするのが良いであろう。

FORTRAN は、1950 年代に開発された言語で、計算機言語としては、歴史が古い。進歩の速い計算機に関しては、歴史が古いという事は、多くの場合、陳腐で劣る事を意味する事が多い。事実、50 年代或いはそれ以後開発された言語で、今日では使用されなくなった言語は非常に多い。そういった環境の中にあっても、FORTRAN は、色々な意味で、優れた点を多く持った言語なので、様々な改良を加えられながら、今日まで、科学計算用の標準的言語の一つとして、使われ続けている。その特徴としては、

- 各時代の最高速の計算機上で使われ続けている事
- 大きなプログラムでも容易に構築できる事
- 機種依存性が少ない事
- 数値計算ライブラリが数多く揃っている事

等が挙げられよう。計算機の演算能力を最大限に発揮するには、計算機が直接理解できる機械語 (アセンブラ) でプログラムを書けば良いのだが、このためには、プログラムを書く人間の側に多大の努力を要し、効率悪く、とても一般の人向きではない。そこで、FORTRAN 等、人間が理解しやすい言語でプログラムを書き、それを機械語に翻訳させる作業 (コンパイルという) を計算機自身にさせる訳だが、FORTRAN には、高速にしかも最適化された機械語に翻訳する技法が最も進んだ形で取り入れられている。これらの理由から、FORTRAN は長い間多く利用され、それが更に、ライブラリを完備させる等、良い方向にフィードバックされて、より便利な道具として使われる理由となっている。

FORTRAN を使って計算をしたい時には、FORTRAN の言語で書かれた一つのファイルを先ず作らなければならない。こういったファイルをプログラムと呼ぶ。例として、球の半径が与えられた

時に、球の表面積と体積を求める計算を考えよう。そのためのプログラムの例は、第 2 章で、エディタを使ってのファイル作成練習で書いた、sphere.f である。念のため、下に掲げておこう[1] 。

```
      Program sphere
      Implicit NONE
c constant:
      Real PI
      Parameter (PI=3.141593)
c local variable:
      Real radius
      Real area, volume
c begin:
      radius = 10.0
      area   = 4. * PI * radius**2
      volume = area * radius /3.
      Write(*,*) 'radius:',radius
      Write(*,*) ' surface area =',area,' volume =',volume
c end:
      Stop
      End
```

4.1.1　FORTRAN の約束事

FORTRAN は、カードでプログラムを入力していた時代 (と言っても、何の事かわからない世代の時代になってしまった。要するに、太古の時代からの意味) から使われていたせいで、プログラムを書く上で、様々な制約、約束事がある。

- FORTRAN のプログラムを構成する文は、1 行の 7 文字目から 72 文字目までに収める。上の例で、多くの行で、最初の 6 文字分下がっているのは、このためである。
- 1 行に収まりきらない時は、次の行の 6 文字目に & などの文字を入れる事で、継続行を意味させる事にして、2 行にわたらせる。もっと長い時も、同様。
- 1 文字目に c 或いは * の文字のある行はコメント行とする。
- ! の後ろもコメントと見做す。
- 1 文字目から 5 文字目まで数字列は行番号を表す。

[1] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/sphere.f
尚、Web ページを見るには、ターミナルウィンドウで、
% mozilla &
と入力して見よ。

- 大文字と小文字の区別はしない。
- プログラムは Program 文で、名前を宣言し、Stop 文と End 文で終わる。

4.1.2 式と代入

左辺=右辺 で右辺の値を左辺の変数の値とする。左辺は変数でなければならない。右辺は数値もしくは数式だが、数式の場合はその段階で数値計算可能である必要がある。

例 .

```
a = 1.0
b = a + 1.0
```

4.1.3 四則演算

右辺で行う四則演算は表 4.1 の様に記す。

表 4.1: FORTRAN での四則演算

演算	FORTRAN	例
加算	+	x + y
減算	−	x - y
掛算	*	x * y
割算	/	x/y
冪乗	**	x**y
括弧	( )	(2.*(x + y))/(3.*(a + b))

4.1.4 変数と型

FORTRAN が扱う変数には、整数、実数、複素数、論理型、文字列がある。サンプルプログラムの中で、local variables の次の行で、Real radius とあるのは、radius という変数が実数型である事を宣言している。整数、実数、複素数を混合して演算しないようにプログラムを書くことを心掛けたい。混合演算をすると、右辺の代入結果は左辺の変数の型になる。表 4.2 に、変数と型に関する制限事項をまとめる。

4.1.5 宣言文

変数の型を宣言する例を見た。他にもこういった宣言文がある。先の例では、

表 4.2: FORTRAN で扱われる変数の型

型	FORTRAN	大きさ
整数型	Integer	$-32768 \sim 32767$
	Integer*4	$-2147483648 \sim 2147487647$
実数型	Real	$\pm 0.29 \times 10^{-38} \sim \pm 1.7 \times 10^{38}$ (有効数字 7 桁)
	Real*8	$\pm 0.29 \times 10^{-38} \sim \pm 1.7 \times 10^{38}$ (有効数字 15 桁)
複素数型	Complex	(有効数字 7 桁)
	Complex*16	(有効数字 15 桁)
論理型	Logical	.true. (真) 或いは .false. (偽)
	Logical*2	
文字型	Character*サイズ	サイズ分の長さの文字列

```
Implicit NONE
Parameter (PI=3.141593)
```

がそうだ。最初の例は、そのプログラムで使用する変数は全て型宣言をしてから使う事を宣言している。FORTRAN では、最初の文字によって、計算機が型を暗黙のうちに解釈するという、便利なような恐ろしいような約束事がある。一見便利なようなルールだが、プログラムを書き直したり、長いプログラムを書く時等、使う変数をきちんと把握している方が、結局は便利である事の方が多い。Implicit NONE をプログラムの頭で宣言しておくと、型宣言していない変数をプログラム中で引用していたら、計算機が警告してくれる。

二番目の例の Parameter 文は、変数 PI の値を指定している。式として書いても同じ事だが、物理定数等この Parameter 文を用いて宣言すると、値を直す時等、場所が決まっているから、便利である。

DIMENSION の宣言は、良く使うであろう。y_i $(i = 1, ..., 10)$ 等を変数として、使いたい時がある。この様な時、

```
DIMENSION y(10)
```

の様に宣言すると、y(1), ... , y(10) が使えるようになる。引数が二次元ならば、

```
DIMENSION y(i,j)
```

の様にすれば良い。i と j は、それより前の Parameter 文でサイズを宣言しておけば良い。

4.1.6 WRITE 文

先のプログラムで、

```
Write(*,*) 'radius:',radius
Write(*,*) ' surface area =',area,' volume =',volume
```

が、WRITE 文である。'radius:' は radius: と表示させる事を意味し、カンマに続く radius は、変数 radius の値を表示させる事を意味している。

4.1.7 IF 文

変数の値などの条件によって、次に行うべき演算が違う事がある。FORTRAN では、次の様にして場合分けを行う。

```
if (code.eq.1) then
   ...
else
   ...
end if
```

或いは次の様な更に細かい条件分岐も出来る。

```
if (code.gt.1) then
   ...
else if (code.eq.1) then
   ...
else
   ...
end if
```

4.1.8 DO ループ

例えば

$$y = \sum_{i=1}^{10} a_i$$

を計算するために、DO ループと呼ばれる繰り返し演算がある。

```
y = 0.0
Do i=1,10
  y = y + a(i)
End do
```

i が 10 以下である限り繰り返すといった場合には、次の様な Do while が便利だ。

表 4.3: FORTRAN で扱う大小符号や等号

関係式	FORTRAN
$a = b$	a.eq.b
$a \neq b$	a.ne.b
$a < b$	a.lt.b
$a \leq b$	a.le.b
$a > b$	a.gt.b
$a \geq b$	a.ge.b
$a \wedge b$	a.and.b
$a \vee b$	a.or.b
$\neg a$	.not.a

```
i = 1
Do while (i.le.10)
  y = y + a(i)
  i = i + 1
End do
```

4.1.9 条件判断

If 文や While 文の条件判断では、大小符号や真偽等を条件として使うが、それらは次のように表される。

4.1.10 サブルーチン

先に掲げた球の表面積と体積を求める計算で、半径を 1 から 2 刻みで 10 まで変えて計算する事を考えよう。同じ作業の繰り返しだから、その部分だけを別のパーツとしてプログラムを構築できたら、プログラムは短く、かつ見易いものとなるであろう。サブルーチンはこの様な目的に、使われるプログラムのパーツである[2] 。

```
      Program sphere2
      Implicit NONE
c constant:
      Real RADIUS_INITIAL,MAX_RADIUS,DELTA_R
      Parameter(RADIUS_INITIAL=1.0,MAX_RADIUS=10.0)
```

[2] ここに挙げた例は、http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/sphere2.f

```
      Parameter(DELTA_R=2.0)
c local variable:
      Real radius
      Real area, volume
c begin:
      radius = RADIUS_INITIAL
      Do while (radius .le. MAX_RADIUS)
         Call calculation(radius, area, volume)
         Write(*,*) 'radius:', radius
         Write(*,*) ' area =',area,' volume =',volume
         Write(*,*)
         radius = radius + DELTA_R
      End do
      Stop
      End

      Subroutine calculation(radius, area, volume)
      Implicit NONE
c input:
      Real radius
c output:
      Real area, volume
c constant:
      Real PI
      Parameter (PI=3.141593)
c begin:
      area   = 4. * PI * radius**2
      volume = area * radius /3.
      Return
      End
```

メインプログラムでは、半径を与えるだけで、計算はサブルーチン calculation で行っている。そしてメインプログラムとサブルーチンとの間のやり取りは、メインプログラム中の call 文で行う。その際、引数 (radius,area,volume) は、radius がメインプログラムから与えられ、area と volume は、サブルーチンから計算の結果として、メインプログラムに返される。それぞれの引数の型は、メインプログラムとサブルーチンの間で必ず一致させなければならない。但し、引数の名前は両者の間で異なっていても構わない。この例に見るように、引数はメインプログラムからサブルーチンにも渡せるし、逆にサブルーチンからメインプログラムにも渡せる。どちらからどちらに渡されているかは、一見して明らかな訳ではないので、上のサブルーチン calculation の例のように、コメントで

注釈を附けておくと、便利である。また、サブルーチンから、別のサブルーチンを呼ぶことも出来る。サブルーチンは Return と End で終わるのが約束である。

4.1.11 READ 文

先に掲げた球の表面積と体積を求めるプログラムでは、球の半径は、プログラムの中で与えた。任意の半径を与えられるようにならないだろうか。下に掲げるプログラムは、端末から、半径を与える様に、sphere2.f を直したものである[3]。(サブルーチン calculation は再掲していない。)

```
      Program sphere3
      Implicit NONE
c constant:
      Real RADIUS_INITIAL,MAX_RADIUS,DELTA_R
c local variable:
      Real radius
      Real area, volume
c begin:
      Write(*,*) 'Input RADIUS_INITIAL:'
      Read(*,*) RADIUS_INITIAL
      Write(*,*) 'Input MAX_RADIUS:'
      Read(*,*) MAX_RADIUS
      Write(*,*) 'Input DELTA_R:'
      Read(*,*) DELTA_R

      radius = RADIUS_INITIAL
      Do while (radius .le. MAX_RADIUS)
         Call calculation(radius, area, volume)
         Write(*,*) 'radius:', radius
         Write(*,*) ' area =',area,' volume =',volume
         Write(*,*)
         radius = radius + DELTA_R
      End do
      Stop
      End
```

Read(*,*) が、端末から変数を読み込ませるときに用いる文である。

[3] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/sphere3.f

4.1.12 ファイルへの入出力

上の例で、Read 文や Write 文で、端末に入出力するのではなく、ファイルに入出力するには、次の様にすれば良い[4] 。

```
      Program sphere4
      Implicit NONE
c constant:
      Real RADIUS_INITIAL,MAX_RADIUS,DELTA_R
c local variable:
      Real radius
      Real area, volume
c file open:
      Open(Unit=2,File='Input.dat',Status='OLD')
      Open(Unit=3,File='Output.dat',Status='NEW')
c begin:
      Read(2,*) RADIUS_INITIAL,MAX_RADIUS,DELTA_R
      radius = RADIUS_INITIAL
      Do while (radius .le. MAX_RADIUS)
         Call calculation(radius, area, volume)
         Write(3,*) 'radius:', radius
         Write(3,*) ' area =',area,' volume =',volume
         Write(3,*)
         radius = radius + DELTA_R
      End do
      Stop
      End
```

(*,*) のところが (2,*) となったため、入力は 2 番の論理装置から行なわれる。その 2 番の論理装置が Input.dat という名前の既製のファイルである事を最初の Open 文が記述している。Write 文が、(3,*) であるから、出力は 3 番の論理装置に対してなされる。二つ目の Open 文は、同様に 3 番の論理装置が Input.dat という名前のの新規のファイルである事を記述している。

4.1.13 入力回数が予め決まっていない場合

入力データの数が予めわかっている場合は、先の方法や、それを DO ループでデータの読み込み回数分だけ繰り返せば良いが、入力データの数が予めわかっていない場合はどうすれば良いであろうか。FORTRAN の READ 分は、この様な場合に備えて、論理装置番号、読み込み形式を表す*のほかに、

[4] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/sphere4.f

もう一つ割り込み文番号を指定できるようになっている。次のプログラム[5] で、Read 文が (2,*) ではなく、(2,*,end=900) となっている事に注意しよう。これは、N 回まで DO ループが回ろうとしているうちに、読み込みデータがなくなったら、900 番の文番号に飛ぶ事を意味している。900 番の文では、その時点での変数 i を書き出すように命令しているから、これにより、幾つデータを読んだかが判る。この様な場合、DO 文は、途中で割り込みが入ることになり、完結しないことに注意しておこう。

```
      Program sphere5
      Implicit NONE
c constant
      Integer N
      Parameter(N=2000)
c local variable:
      Real radius
      Real area, volume
      integer i
c file open:
      Open(Unit=2,File='Input.dat',Status='OLD')
      Open(Unit=3,File='Output.dat',Status='NEW')
c begin:
      Do i=1,N
         Read(2,*,end=900) radius
         Call calculation(radius, area, volume)
         Write(3,*) 'radius:',radius,' area =',area,' volume =',volume
      End do
  900 Write(*,*) 'number of data=', i-1

      Stop
      End
```

このプログラムで、N 以上読み込みデータがあると、number of data として正しくない答え N を表示する。

4.1.14 組み込み関数

計算の中で、三角関数などの関数を使いたい場合も多い。FORTRAN には様々な関数が標準で用意されており、それらを利用する事が出来る。例えば、プログラムの中で y=cos(x) とあれば、変数 y には、変数 x の余弦が代入される。良く使われる関数を表 4.4 に掲げる。

[5] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/sphere5.f

表 4.4: FORTRAN の組込み関数

FORTRAN	意味	FORTRAN	意味
`sqrt(x)`	$\sqrt{x}$	`exp(x)`	$\exp(x)$
`log(x)`	$\ln x$	`log10(x)`	$\log x$
`sin(x)`	$\sin x$	`asin(x)`	$\arcsin x$
`cos(x)`	$\cos x$	`acos(x)`	$\arccos x$
`tan(x)`	$\tan x$	`atan(x)`	$\arctan x$
`sinh(x)`	$\sinh x$	`cosh(x)`	$\cosh x$
`tanh(x)`	$\tanh x$	`abs(x)`	x の絶対値
`int(x)`	x の整数部	`float(n)`	整数 n を実数に変換
`max(x,y,z,...)`	$x, y, z, ...$ の最大値	`min(x,y,z,...)`	$x, y, z, ...$ の最小値

混合演算をしないように、と書いたが、実数 x を整数に型変換するには、`int(x)` を使い、整数 x を実数に型変換するには、`float(x)` を使う。

4.1.15 自分で定義して作る外部関数：FUNCTION 文

FORTRAN が用意してくれる標準的関数以外に、自分で外部関数を定義して使う事も出来る。例えば、球の表面積と体積を半径の関数として、それぞれ関数 `S(r)`、`V(r)` を

```
      real function S(r)
      implicit NONE
c constant:
      real PI
      parameter (PI=3.141593)
c local variable:
      real r
c begin:
      S=4.*pi*r**2
      return
      end


      real function V(r)
      implicit NONE
c constant:
```

```
      real PI
      parameter (PI=3.141593)
c local variable:
      real r
c begin:
      V=4./3.*pi*r**3
      return
      end
```

で定義して、メインプログラムからは、

```
      Program sphere6
      Implicit NONE
c constant:
      Real RADIUS_INITIAL,MAX_RADIUS,DELTA_R
c local variable:
      Real radius
      Real area, volume, S, V
c begin:
      Write(*,*) 'Input RADIUS_INITIAL:'
      Read(*,*) RADIUS_INITIAL
      Write(*,*) 'Input MAX_RADIUS:'
      Read(*,*) MAX_RADIUS
      Write(*,*) 'Input DELTA_R:'
      Read(*,*) DELTA_R

      radius = RADIUS_INITIAL
      Do while (radius .le. MAX_RADIUS)
         Write(*,*) 'radius:', radius
         area  =S(radius)
         volume=V(radius)
         Write(*,*) ' area =',area,' volume =',volume
         Write(*,*)
         radius = radius + DELTA_R
      End do
      Stop
      End
```

のように、外部関数を使う。FUNCTION 文は、メインプログラムの後ろにつけて、コンパイルするのが良いだろう[6] 。

4.1.16 参考書

FORTRAN の文法や利用法等、とてもこのテキストでは書ききれないので、以下に掲げるような参考書で自習して欲しい。

浦 昭二: FORTRAN 入門 (3訂版) (培風館)

森口繁一：JIS FORTRAN 入門 (第 3 版) 上・下 (東大出版会)

4.2 FORTRAN プログラムのコンパイルと実行

プログラム `sphere.f` は無事ファイルとして作成されたとする。完成した FORTRAN プログラムをどうやって機械語に翻訳させるか、コンパイルと呼ばれる作業の手順を説明しよう。先ず、マウスを移動させて、ターミナルウィンドウをアクティブにしよう。そして、ターミナルウィンドウで、

```
% f77 -o sphere sphere.f
% sphere
```

と入力しよう。

```
% sphere
```

と入力してもエラーメッセージが表示されてしまう場合には、

```
% ./sphere
```

と入力して見よう。ターミナルウィンドウは、この様に、計算機に対するコマンドを一つ一つ入れていくためのウィンドウである。

ターミナルウィンドウは、必要に応じて、複数開いておくと便利である。ターミナルウィンドウを新しく開くには、マウスをウィンドウ以外の場所に移動させて、そこで、左ボタンを押す。すると、メニューが出現するが、その中の `kterm` の部分が反転するまでマウスを押したまま下に動かし、そこでマウスのキーを離す。暫くすると、画面には格子状のものが表示され、マウスと連動する。好みの場所に移動させて、マウスの左ボタンを押して離すと、その場所に新しいターミナルウィンドウが開かれる。

ターミナルウィンドウをいくつも開くと、計算機のメモリー等を浪費する事になるので、必要な数だけ開くように心掛けよう。

タイトルバーの部分にマウスのカーソルを入れて、中ボタンを押しながらマウスを動かすと、ウィンドウは格子状になり、マウスの動きと連動する。適当な場所にウィンドウを引きずって、そこでボタンを離すと、ウィンドウが再現する。こうして、ウィンドウの位置を変えることができる。

タイトルバーの右端の四角の部分にマウスカーソルを入れ、左ボタンを押しながら動かすと、マウスの動きに合わせて、格子状のものが伸び縮みをする。格子が適当な大きさになったところでボタン

[6] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/sphere6.f

を離すと、ウィンドウの大きさが変化して再現する。こうして、ウィンドウのサイズを変更することができる。

f77 コマンドが sphere.f をコンパイルし、-o というオマジナイがついているので、更に sphere という実行ファイルを作成させる。計算の実行は sphere それ自身がコマンド名になる。

前の例題 sphere2 で、メインプログラムとサブルーチンの二つの別々のファイルとして作ったとし、メインプログラムのファイル名を sphere2.f とし、サブルーチンのファイル名を calculation.f としよう。そういった時、それぞれを別々にコンパイルして、オブジェクトファイルを融合させて、実行ファイルを作るには、次のようにする。

```
% f77 -c -o calculation.o calculation.f
% f77 -o sphere2 calculation.o sphere2.f
% sphere2
```

サブルーチンをコンパイルする時、-c -o のオマジナイを付けておく。結果として、.o の拡張子の付いたオブジェクトファイルが作られる。メインプログラムをコンパイルする時、後ろにこのオブジェクトファイル名を付けておく。この方法により、良く使うサブルーチンのオブジェクトファイルをいちいちコンパイルする手間を省いたり、プログラムのチェックの効率を上げたりする事が出来る。外部関数 FUNCTION 文もサブルーチンと同じように、メインプログラムとは別にコンパイルしておき、そのオブジェクトファイルとメインプログラムのオブジェクトファイルを結合して、実行ファイルを作る事が出来る。

第 5 章　計算機の更なる活用

5.1　計算グラフィックス入門

ここでは、FORTRAN で計算を行い、その計算結果を GNUPLOT を使ってグラフに表わすことをマスターしよう。レポートとして提出する際には、グラフも LaTeX に取り入れよう。

5.1.1　問題：黒体輻射

熱平衡にある完全黒体の物体から放射される光を黒体輻射と呼ぶ。単位面積から単位立体角に放射される黒体輻射のエネルギー $B(T)$ は、Planck の輻射式

$$B(T)d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1}d\lambda \qquad (\mathrm{J\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}\cdot str^{-1}}) \tag{5.1}$$

に従う。但し、ここで、h は Planck 定数、k は Boltzman 定数、c は光速を表す。輻射エネルギー分布を $T = 3\mathrm{K}$、$300\mathrm{K}$、$3,000\mathrm{K}$、$30,000\mathrm{K}$ について、計算し、図示せよ[1] 。$hc/\lambda \gg kT$ の場合、輻射エネルギー分布は Wien の法則

$$B(T)d\lambda \simeq \frac{2hc^2}{\lambda^5}\exp(-hc/\lambda kT)d\lambda \tag{5.2}$$

で近似される事、逆に $hc/\lambda \ll kT$ の場合には、輻射エネルギー分布は Rayleigh-Jeans の法則

$$B(T)d\lambda \simeq \frac{2kTc}{\lambda^4}d\lambda \tag{5.3}$$

で近似される事を確かめよ。また、黒体輻射のエネルギー強度が最大になる波長 $\lambda_{\max}$ は、Wien の変位則

$$\lambda_{\max}T = 2.897\cdot 10^{-3} \quad \mathrm{m\cdot K} \tag{5.4}$$

を満たす事を確かめよ。ただし、$h = 6.6260755\times 10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$, $k = 1.380658\times 10^{-23}\mathrm{J\cdot K^{-1}}$, $c = 2.99792458\times 10^{8}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ とせよ。

5.2　データベースの活用：HR 図を描く

天文学・宇宙科学は、装置や予算が大きいという意味で巨大科学である。世界有数の大望遠鏡の建設や衛星の打ち上げには巨額の費用がかかり、研究機関毎にそのような施設を持つことはできな

[1] GNUPLOT で図 5.1.1 の様に、λ や B_λ を書く方法は、章の初めに紹介したホームページを参照せよ。

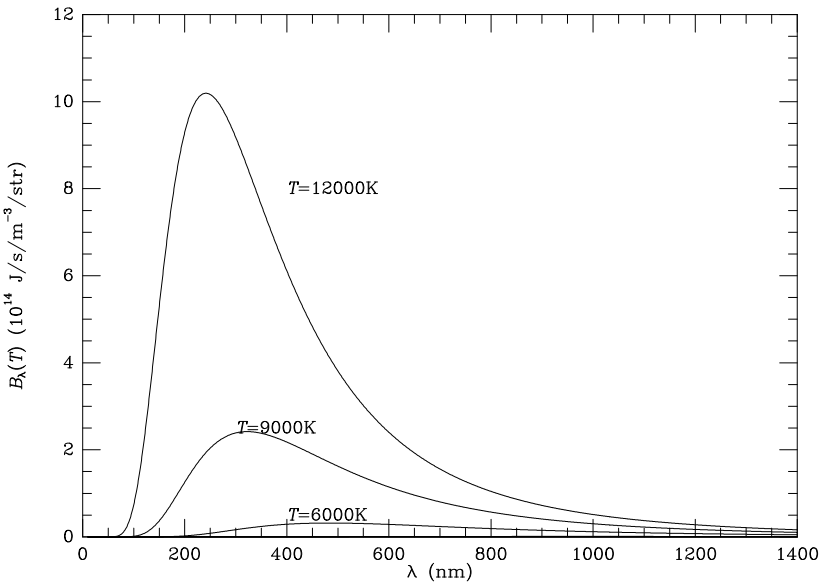

図 5.1: 黒体輻射のプランク関数。

い。そこで、これらの装置は、特定の研究者・研究機関によってだけ使われるというのでなく、多かれ少なかれ共同利用に供せられる。そのような場合、取得されたデ- タは、一定の期間は、取得した研究者に専有的に使われるが、しかる後は、運営している機関によりアーカイブとして保存され、一般の研究者に公開される、というのがよくあるルールである。これらは、オンラインで公開されているものが多い。こうした天文・宇宙科学の特質からか、天文学・宇宙科学の、ネットワ- クでの情報公開の量とサービスは、他の分野に比べても、充実したものが多いと思う。ここでは光学的に観測される約 9000 個の星の情報が格納された The Bright Star Catalogue (BSC4)[2] を用いて、HR 図を描いてみよう。

5.2.1 書式

この BSC4 カタログは、一つの恒星に対して、表 5.1 のような情報が各行の指定された位置に、指定された形式で与えられている。

但し、格納形式の An は、n 文字分の文字データを意味し、In は、n 桁の整数データである事を意味し、F$m.n$ は、小数点以下 n 桁で且つ小数点と符号も含めて m 桁の実数である事を意味している $(m \geq n+3)$。尚、書式としては、他に 1.25×10^{-8} を `1.25E-08` と表すような E$m.n$ という形式

[2] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/BSC4.dat

表 5.1: BSC4 カタログの表記内容

項目	格納形式	行中の位置
HR 番号	I4	1 – 4
名前	A7	8 – 14
赤経 (時)	I2	74 – 75
赤経 (分)	I2	77 – 78
赤経 (秒)	F4.1	80 – 83
赤緯 符号	A1	85
赤緯 (度)	I2	86 – 87
赤緯 (分)	I2	89 – 90
赤緯 (秒)	I2	92 – 93
実視等級	F5.2	109 – 113
スペクトル型	A2	137 – 138
視差	F5.3	170 – 174

がある。整数部は -38 から $+38$ までの整数、仮数部は小数点以下 n 桁で、且つ `E-08` という表記も含めて全部で m 文字である事を意味している $(m \geq n + 5)$。

5.2.2 FORMAT 文

このカタログを読んで、HR 図を描いてみよう。星の実視等級を m、星までの距離を d(パーセク) とすると、絶対等級 M は

$$M = m - 5.0 \log \frac{d}{10} \tag{5.5}$$

表 5.2: 入出力の表記

型	表記	意味
文字	An	n 文字
整数	In	n 桁整数 (含符号)
実数	F$m.n$	小数点以下 n 桁、少数と符号も含め全体で m 文字
	E$m.n$	小数点以下 n 桁、少数と符号も含め全体で m 文字 (単精度)
	D$m.n$	小数点以下 n 桁、少数と符号も含め全体で m 文字 (倍精度)
空白	X	
行替	/	

となる。星までの距離 d(パーセク) は、年周視差を π(秒)、地球の公転長半径を R(天文単位) とすると、

$$d = R/\pi \tag{5.6}$$

となる。そこで、BSC4 カタログの視差と実視等級から、絶対等級を求め、それをスペクトル型に対してプロットしてやればよい。実視等級は数値データだから、グラフ化での取り扱いも容易だが、スペクトル型は文字型データだから、取り扱いには工夫が必要だ。

格納形式が決まっているデータの読み込みや、決まった形式での書き込みのために、FORMAT 文なるものが用意されている。以下に掲げるのは、BSC4 カタログを BSC4.DAT として、読み込み、年周視差と実視等級から絶対等級を求め、また、HR 図にグラフ化する際に便利なようにスペクトル型を数値化した上で別のカタログに別の様式で格納するためのプログラム[3] である。

```
      program main

      implicit NONE
      integer N,m,maxindex
      parameter(N=50000,m=7,maxindex=10)
      integer j,number_of_stars,jj,jjj
      real Vmag,parallax
      real Abs_mag(N),Sp_index(N)
      character*1 Sp_type,Sp_sub,s(m),sub(maxindex)

      data s/'O','B','A','F','G','K','M'/
      data sub/'0','1','2','3','4','5','6','7','8','9'/
c-------------------------------------------------------------------------------
      number_of_stars=0

      open(unit=1,file='BSC4.DAT',status='OLD')
      open(unit=2,file='STARS.DAT',status='NEW')

! Read the BSC catalogue:
      do j=1,N
        read (1,100,end=20) Vmag,Sp_type,Sp_sub,parallax
        if(parallax.gt.0.)then
          do jj=1,m
            if(Sp_type.eq.s(jj))then
              do jjj=1,maxindex
                if(Sp_sub.eq.sub(jjj))then
```

[3] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/hr-diagram.f

```
                number_of_stars=number_of_stars+1
                Abs_mag(number_of_stars)=Vmag+5.0
     *                                  +5.0*log10(parallax)
                Sp_index(number_of_stars)=float(10*(jj-1) + (jjj-1))
                write(2,220) j,Vmag,
     *                       Sp_index(number_of_stars),
     *                       Abs_mag(number_of_stars)
              end if
            end do
          end if
        end do
      end if
     end do
  20 write(6,131) number_of_stars

     close(1)
     close(2)

 100 format(108x,f5.2,23x,2a1,31x,f5.3)
 131 format(////'   there are ',i6,' stars in the catalog'//)
 220 format(i7,3(3x,f5.2))

     stop
     end
```

READ 文が今までのように read(*,*) や read(1,*) ではなく、read(1,100) となっている事に注目しよう。最初の 1 は、ユニット番号 1 番から読み込む事を意味している事は、もう判ると思う。次の 100 は、100 番の文番号のついた FORMAT 文の形式で読む事を意味している。100 番の文番号の文は、確かに FORMAT 文になっており、表 5.1 の形式で読み込もうとしている事が判るであろう。READ 文で、end=20 とあるのは、データを読み終えたら、20 番の文番号に飛ぶ事を意味している。データを幾つ読むのか、予め定まっていない場合に、使われる手段であることは以前に説明した。この 100 番の文番号のついた FORMAT 文では、HR 番号や赤経赤緯等、今の目的に要しないデータを読み飛ばすために、nX で n 個分の空白データを読んでいる。WRITE 文も、220 番の FORMAT 文を従えており、実数形式で実視等級、スペクトル型に対応する数値、絶対等級を書き込もうとしている。220 番の FORMAT 文での 3x は、３個の空欄を空ける事を意味している。文番号は、１文字目から 5 文字目までに書く事が約束となっている。

5.2.3　DATA 文

上のプログラムでは、スペクトル型の文字部と細分類の数字部分をそれぞれ 1 文字データ Sp_type と Sp_sub として読み込み、型に応じて数値を当て嵌める事によって、スペクトル型を数値化して、グラフ化する際の x-座標に対応させようとしている。Sp_type が O であれば、1 の位、B であれば 10 代、A であれば 20 代をあてがう。そこで、7 元の配列 s(7) を s(1)='O'、s(2)='B'、···、s(7)='M' と定義して、Sp_type がどの s(n) に一致するかを調べれば良い。ところで、プログラム中で中身が変わる事のない 7 元の配列 s(7) を、s(1)='O'、s(2)='B'、···、s(7)='M' と定義式をいちいち書くのは煩わしいし、プログラムもみにくくなる。上のプログラムでは、代わりに、data s/'O','B',···'M'/ のような文で与えている。このような文を DATA 文という。これは、1 文字の文字型データ配列 s(7) を定義し、s(1)='O'、s(2)='B'、s(3)='A'、··· s(7)='M' と与える役割を果たしている。その次の行の data sub/'0','1',···'9'/ も同様の役割を果たす。

5.2.4　問題：HR 図を描く

BSC4 カタログを読んで、HR 図を描け。

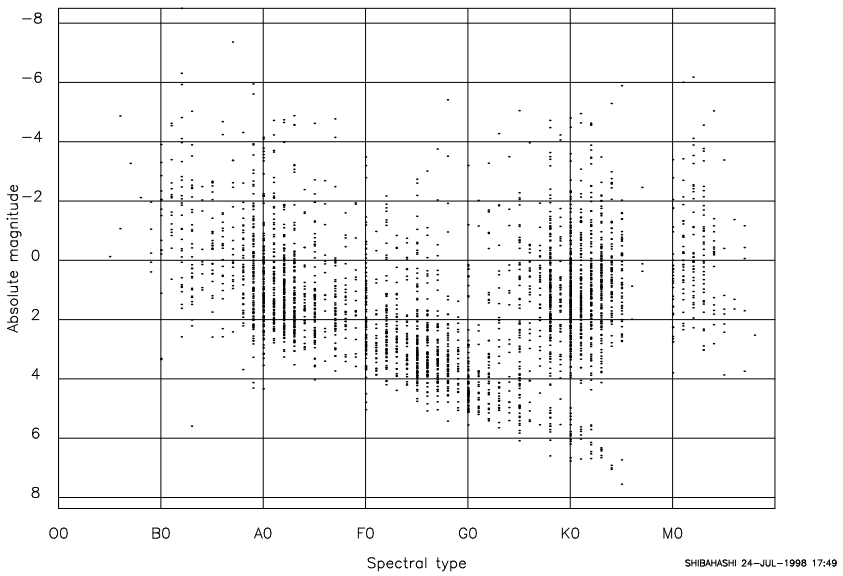

図 5.2: BSC4 カタログ上の星の HR 図。

5.3 データベースの活用：銀河の三次元分布図を描く

天体の天球上の二次元分布は、直接見ることができるが、距離をも考慮した三次元分布を見る事は容易ではない。そもそも天体までの距離を測る事は、天文学の歴史を顧みれば判るように、太陽系とか銀河系といった基本的概念を作り上げ、宇宙の中での我々の位置付けを確定する上で、天文学上の最も基本的且つ最も重要なテーマであった。この事情は、今も、また、今後も変わりない。銀河系の大きさが確定した現在、次に着目するのは、銀河がどのように分布しているかということである。銀河までの距離を測るのは、個々の星が分解して見えるほどの近くの銀河では、セファイドの周期光度関係を使う。更に遠方の銀河は、既に距離が決定された近くの銀河を参照に、距離と相関のある、見かけの物理量の様々な関係を使って、距離を決定する。一方、スペクトル線のドップラー遷移で測定して銀河の視線速度が測定されるが、両者の間には、遠方の銀河ほど後退速度が大きいという法則（ハッブルの法則）がある。

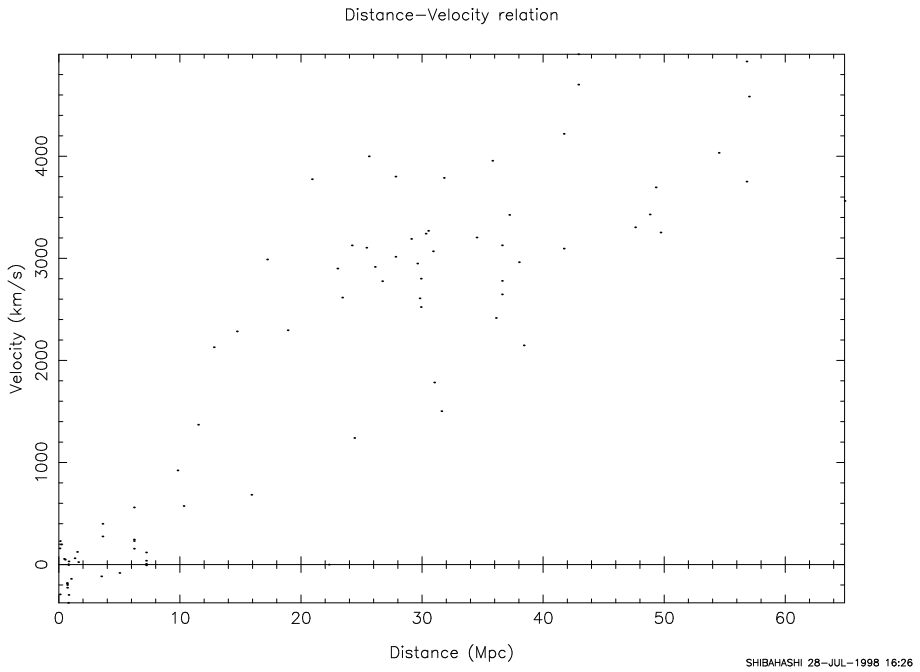

図 5.3: 銀河の距離速度関係。

更に遠方銀河の距離は、この関係を利用して、スペクトルの赤方偏移で測るしか手段がない。赤方偏移 ($z = \Delta\lambda/\lambda_0$) は、宇宙膨張によって生ずるものであるが、これを銀河の後退速度 ($v\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) と見做せば、$z$ と v の対応は

$$\frac{v}{c} = \{(1+z)^2 - 1\}/\{(1+z)^2 + 1\} \tag{5.7}$$

(但し、c は光速度で単位は $\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) で与えられる。$z < 0.05$ のときは、近似的に $v = cz$ を用いて

表 5.3: CfA カタログの表記内容

項目	格納形式	行中の位置
名前	A11	1 – 11
赤経 (時)	I2	12 – 13
赤経 (分)	I2	14 – 15
赤経 (秒)	F4.1	16 – 19
赤緯 符号	A1	20
赤緯 (度)	I2	21 – 22
赤緯 (分)	I2	23 – 24
赤緯 (秒)	I2	25 – 26
B (等級)	F5.2	27 – 31
後退速度	I5	32 – 36
後退速度誤差	I3	37 – 39
その他の情報		40 – 69
独立に求めた距離 (Mpc)	F4.2	70 – 73
その他の情報		74 – 120

も誤差は無視できる。ハッブル定数を $H_0 = 75\mathrm{km \cdot s^{-1}Mpc^{-1}}$ と仮定し、宇宙が平坦であるとして、何年前に銀河を発した光を我々が観測しているかに基づいて距離 d (光年) を以下のように計算することができる。

$$d = 3.26 \times 10^6 \frac{2}{3} \frac{c}{H_0} \{1 - (1+z)^{-3/2}\} \tag{5.8}$$

ハーバード大学のグループは、銀河の赤方偏移を隈無く測定するプロジェクトを行ない、宇宙地図を描く事を行った。銀河系から距離約 1 億光年以内にある銀河は、乙女座銀河団を中心とし、薄い円盤部とそれを取り巻くハロー成分とから成る局部超銀河団を形成している。この他に、かみのけ、ヘルクレス、うお-ペルセウス、うみへび-ケンタウルス等の超銀河団が同定されている。ハーバード大学のサーベイの結果、 1 億光年以上のスケールにわたって銀河の殆どない領域 (ボイド) のあること、超銀河団とボイドが互いに入り交じって大規模な構造を成している事が明らかになった。

このハーバード大学の赤方偏移カタログは、一つの銀河に対して、表 5.3 のような情報が各行の指定された位置に、指定された形式で与えられている。

このカタログを読んで、宇宙地図を描いてみよう。以下に掲げるのは、CfA カタログを `VELOCITY.DAT` [4] として、読み込み、赤経、赤緯を度の単位に直した上で別のカタログに別の様式で格納するためのプログラム[5] である。`READ` 文が `read(1,100)` となっている事に注目しよう。最初の `1` は、ユニット番号 1 番から読み込む事を意味している事、次の `100` は、`100` 番の文番号のついた `FORMAT` 文の形式で読む事を意味している事は、もう判ると思う。。`100` 番の文番号の文は、確かに `FORMAT` 文に

[4] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/VELOCITY.DAT
[5] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/CfA-read.f

なっており、表 5.3 の形式で読み込もうとしている事が判るであろう。同様に、WRITE 文も、220 番の FORMAT 文を従えており、実数形式で赤経、赤緯を書き込もうとしている。220 番の FORMAT 文での 3x は、３個の空欄を空ける事を意味している。文番号は、１文字目から 5 文字目までに書く事が約束となっている。

```
      program main

      implicit NONE
      integer N
      parameter(N=50000)
      integer j,RA_hr,RA_min,dec_deg,dec_min,dec_sec,
     *        vel,number_of_galaxy
      real RA_sec,RA,dec,distance,sign
      character*1 dec_sign,minus

      data minus/'-'/

      number_of_galaxy=0

      open(unit=1,file='VELOCITY.DAT',status='OLD')
      open(unit=2,file='GALAXY.DAT',status='NEW')

      do  j=1,N
        read (1,100,end=20) RA_hr,RA_min,RA_sec,
     *                      dec_sign,dec_deg,dec_min,dec_sec,
     *                       vel,distance
        RA=15.*(float(RA_hr)+float(RA_min)/60.+ RA_sec/3600.) !in units of deg

        if(dec_sign.eq.minus)then
          sign=-1.
        else
          sign=1.
        end if
        dec=(float(dec_deg)+float(dec_min)/60.+float(dec_sec)/3600.)
     *         *sign

        write(2,220) j,RA,dec,vel,distance
        number_of_galaxy=number_of_galaxy+1
      end do
```

```
 20 write(6,131) number_of_galaxy

    close(1)
    close(2)

100 format(11x,i2,i2,f4.1,a1,3i2,5x,i5,33x,f4.2/)
131 format(////'   there are ',i6,' galaxies in the catalog'//)
220 format(i7,3x,2f15.5,3x,i5,3x,f5.2)

    stop
    end
```

5.3.1　問題：ハッブルの法則

CfA カタログを使って、距離と後退速度が独立に測られている銀河に対して、両者がどのような関係になっているかを距離-後退速度図を描いて示せ。

5.3.2　問題：宇宙地図

CfA カタログを使って、ある赤緯帯の銀河を赤経・距離の二次元マップ上にを描け。

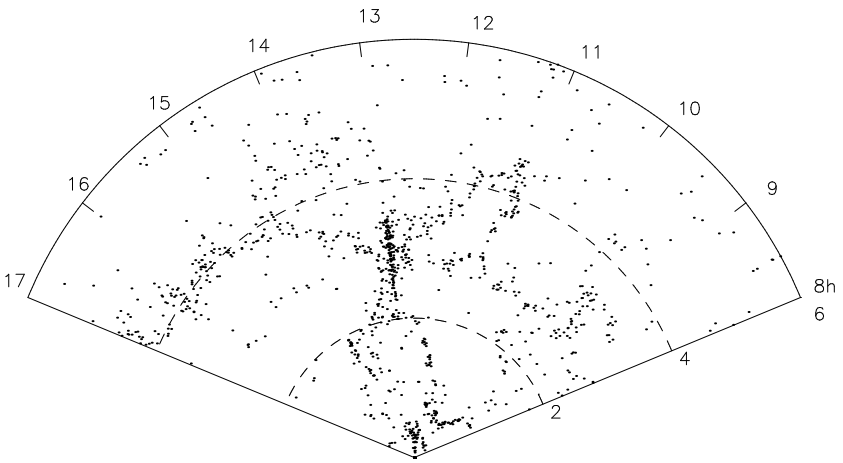

図 5.4: 赤経 8h-17h、赤緯 $+26.5°$-$+38.5°$ の帯状領域にある 15.5 等級より明るい銀河の空間分布。赤緯については、これ以上区別せず、同一平面上に描いてある。距離の単位は億光年。

第 6 章　方程式の数値解法

3 次や 4 次の方程式までは直接解法があるが、5 次以上の方程式や非線形方程式を解くには、一般には数値的に解くしかない。方程式の解を求める数値解法をマスターしよう。

6.1　Newton-Raphson 法

Newton-Raphson 法は、関数 $f(x)$ が単調連続で変曲点がなく、且つ導関数 $f'(x)$ が数値的に求められる時に利用できる数値解法で、収束が速く、広く用いられている。いま、曲線上の点 $(x, f(x))$ での接線と x-軸との交点を $(x_{n+1}, 0)$ とすると、

$$f'(x_n) = -\frac{f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \tag{6.1}$$

だから、解の適当な推定値から始めて、反復公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{6.2}$$

を繰り返すと、漸近的に解に達する。

収束の判定条件としては、ある ε に対して、

1. 二つの近似解間の差 $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$
2. 二つの近似解間の相対差 $|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}| < \varepsilon$
3. 二つの近似解関数値間の差 $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \varepsilon$

等が考えられるが、1 と 2 の条件では、$f'(x_n)$ の値が大きいと、真の解に未だ充分近くないのに満たされてしまう場合があるので、3 の条件を判定条件として用いる方が誤った解を出してしまう危険性がすくない。

以下の外部関数 `rtnewt` は、関数 $f(x)$ を `funcd` として、$f(x) = 0$ となる解を Newton-Raphson 法で解くプログラム例である[1] 。収束判定条件は上記 1 を使っている。

```
function rtnewt(funcd,x1,x2,xacc)
```

[1] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. 1992, *Numerical Recipes in FORTRAN77* (*Second Edition*), (Cambridge University Press, Cambridge) から転載。尚、この本は、http://cfatab.harvard.edu/nr/nronline.html でオンラインで読む事が出来る。

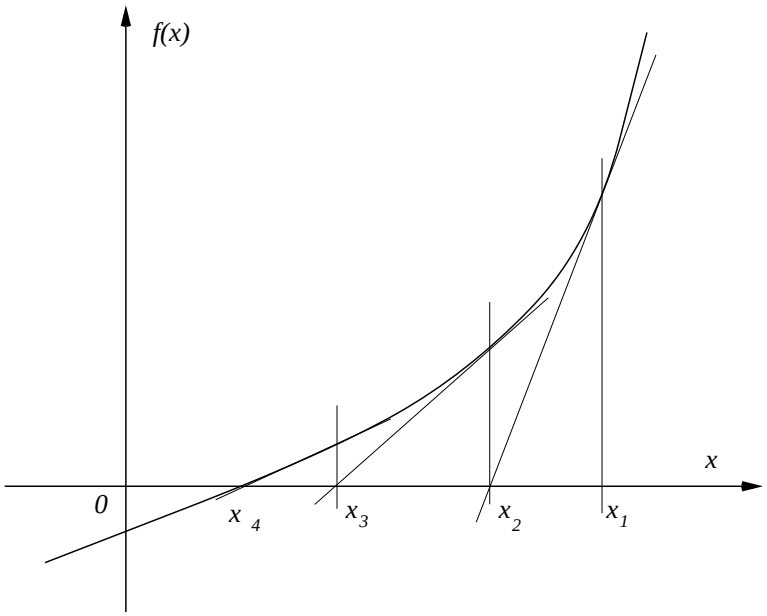

図 6.1: Newton-Raphson 法の概念図。

```
      Implicit NONE
      Integer JMAX
      Real rtnewt,x1,x2,xacc
      external funcd
      Parameter (JMAX=20)       !Set to maximum number of iterations.
! Using the Newton-Raphson method, find the root of a function known to
! lie in the interval [x1,x2]. The root 'rtnewt' will be refined until
! its accuracy is known within +-'xacc'. 'funcd' is a user-supplied
! subroutine that returns both the function value and the first
! derivative of the function at the point x.
      Integer j
      Real df,dx,f
      rtnewt=.5*(x1+x2)         !Initial guess.
      do j=1,JMAX
        call funcd(rtnewt,f,df)
        dx=f/df
        rtnewt=rtnewt-dx
        if((x1-rtnewt)*(rtnewt-x2).lt.0.)
     *    pause 'rtnewt jumped out of brackets'
```

```
  if(abs(dx).lt.xacc) return     !Convergence.
end do
pause 'rtnewt exceeded maximum iterations'
end
```

6.1.1 EXTERNAL 文

上記サンプルプログラムで、`external funcd` という行がある。これは、EXTERNAL 文と呼ばれる宣言文である。FUNCTION 文の引数は、通常はその関数の独立変数であるが、今の場合、`funcd` は、解きたい関数名である。そして、この関数は、別にサブルーチンで与える。そこで、FUNCTION 文の引数が、外部手続きサブルーチンの名である事を宣言しておくのである。

6.1.2 問題：Newton-Raphson 法を簡単な問題に適用する

Newton-Raphson 法で、

$$f(x) = 2x + \sin x - 2\pi = 0 \tag{6.3}$$

を解け。

6.1.3 問題：Mollwide 画法で天球図を描く

CfA カタログを使って、銀河の天球上の赤経・赤緯座標、銀経・銀緯座標、の二次元マップを、Mollwide 画法で描いて見よう。Mollwide 図法では経度・緯度 λ-ϕ を次の様に x-y 座標に変換する。

$$x = (\sqrt{8}/\pi)(\lambda - \lambda_0)\cos\theta, \tag{6.4}$$

$$y = \sqrt{2}\sin\theta. \tag{6.5}$$

但し、λ_0 は地図上の中心経度であり、θ は

$$2\theta + \sin 2\theta = \pi \sin\phi \tag{6.6}$$

で定義する[2] 。(経度 λ はファイル GALAXY.DAT から読み取った値を直接使用するのではない。適切な変換をしてから使用する。図 6.2、6.3 の x-軸を見て、良く考えよう。) 与えられた緯度 ϕ から上の式に基づいて θ を求めるには、先ず適当な推定値 θ を用意して、Newton-Raphson 法により、上の式を満たすように逐次修正して行けば良い。修正値 $\Delta\theta$ は、(6.2) 式を使って、

$$\Delta\theta = -(2\theta + \sin 2\theta - \pi\sin\phi)/2(1 + \cos 2\theta) \tag{6.7}$$

で求め、これを θ に加えたものを改めて θ として、修正値 $\Delta\theta$ が予め定めておいた限界値以下になるまで、上のプロセスを繰り返す。

[2] 各種の図法は以下の文献に詳しい。Snyder, J. P. 1987, "Map Projections —A Working Manual," *U.S. Geological Survey Professional Paper 1395*, (United States Goverment Printing Office, Washington).

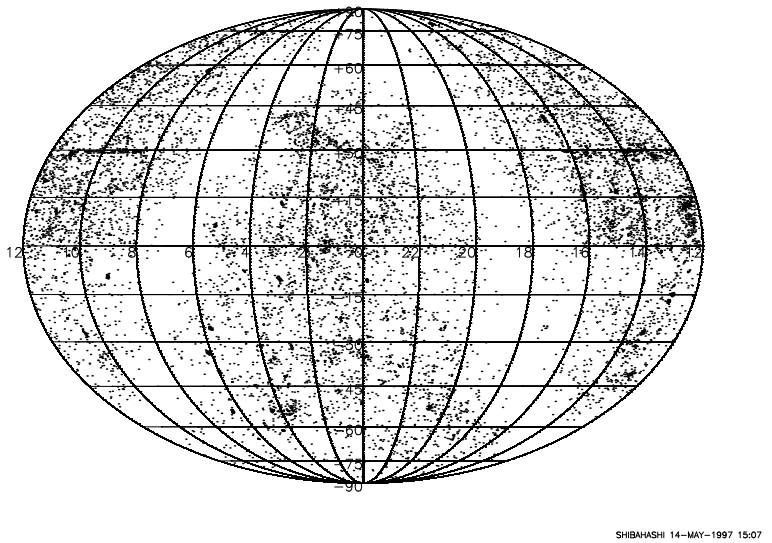

図 6.2: 銀河の天球上の分布。赤経、赤緯座標で図示。

赤経 (α)・赤緯 (δ) と銀経 (l)・銀緯 (b) の変換は、銀河の北極の赤経・赤緯を α_0 , δ_0 とし、

$$\Omega = 90^\circ + \alpha_0 \tag{6.8}$$

$$i = 90^\circ - \delta_0 \tag{6.9}$$

$$\alpha' \equiv \alpha - \Omega \tag{6.10}$$

として、

$$\cos b \cos l = \cos \delta \cos \alpha' \tag{6.11}$$

$$\sin b = \cos i \sin \delta - \sin i \cos \delta \sin \alpha' \tag{6.12}$$

$$\cos b \sin l = \sin i \sin \delta + \cos i \cos \delta \sin \alpha' \tag{6.13}$$

で与えられる。但し、$(\alpha_0, \delta_0) = (12^{\rm h}51^{\rm m}.4, +27^\circ 08'.0)$。

6.2　二分法

関数 $y = f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続であるとき、$f(a)f(b) < 0$ ならば、その区間に解が少なくとも一つ存在する。いま、その区間に解が一つしか存在しない場合を考えることにする。すると、$f(a)f(b) < 0$ のとき、a と b の中点 $c = \frac{a+b}{2}$ に対し、

1. $f(a)f(c) < 0$ ならば、解の存在区間は $[a, c]$ に狭まるし、逆に

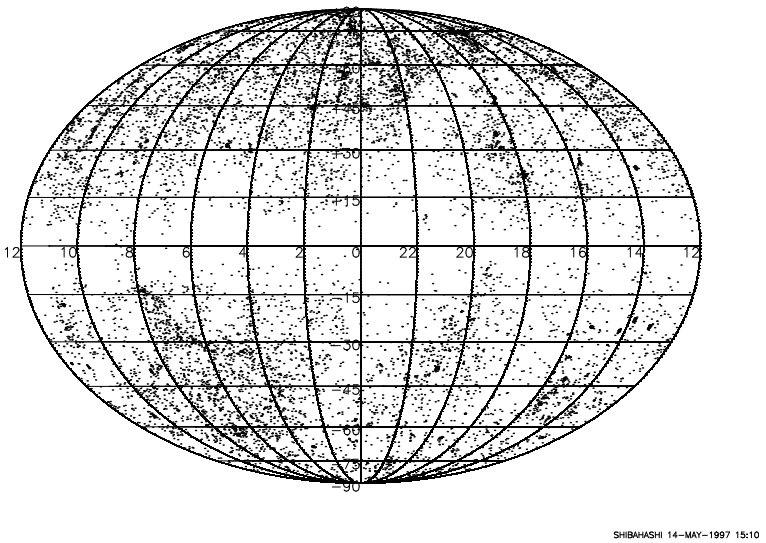

図 6.3: 銀河の天球上の分布。銀経、銀緯座標で図示。

2. $f(b)f(c) < 0$ ならば、解の存在区間は $[c, b]$ に狭まる。

そこで、狭まった解の存在区間を更に二分して、同様の判定を行ない、解の存在区間を更に狭める。以下、同様に、この操作を繰り返せば、解を得る事が出来る。収束判定条件としては、

1. $|b - a| < \varepsilon$
2. $|f(c)| < \varepsilon$

がある。

この方法では、収束解を得るのに必要な反復計算回数 n を、初期値 a、b を用いて、

$$\frac{|b-a|}{2^n} < \varepsilon \tag{6.14}$$

から、予め知る事が出来る。したがって、n 回の反復計算の後も、収束解が得られない場合には、プログラムに誤りがあると判断できる。

以下の外部関数 `rtbis` は、関数 $f(x)$ を `func` として、$f(x) = 0$ となる解を二分法で解くプログラム例である[3] 。

```
function rtbis(func,x1,x2,xacc)
implicit NONE
```

[3] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. 1992, *Numerical Recipes in FORTRAN77* (*Second Edition*), (Cambridge University Press, Cambridge) から転載。http://cfatab.harvard.edu/nr/nronline.html でオンラインで読む事も出来る。

```
      Integer JMAX
      Real rtbis,x1,x2,xacc,func
      external func
      Parameter (JMAX=40)      !Maximum allowed number of bisections.
! Using bisection, find the root of a function 'func' known to lie
! betwee x1 and x2. The root, returned as 'rtbis', will be refined
! until its accuracy is +-'xacc'.
      Integer j
      Real dx,f,fmid,xmid
      fmid=func(x2)
      f=func(x1)
      if(f*fmid.ge.0.) pause 'root must be bracketed in rtbis'
      if(f.lt.0.)then          !Orient the search so that f>0 lies at x+dx.
        rtbis=x1
        dx=x2-x1
      else
        rtbis=x2
        dx=x1-x2
      endif
      do j=1,JMAX              !Bisection loop.
        dx=dx*.5
        xmid=rtbis+dx
        fmid=func(xmid)
        if(fmid.le.0.)rtbis=xmid
        if(abs(dx).lt.xacc .or. fmid.eq.0.) return
      end do
      pause 'too many bisections in rtbis'
      end
```

6.3　Newton-Raphson 法と二分法のハイブリッド法

Newton-Raphson 法では、推定値 x_n の真の解 x からのずれを ε_n とすると、(6.2) 式より

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6.15}$$

だが、

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \varepsilon^2 \frac{f''(x)}{2} + \cdots, \tag{6.16}$$

$$f'(x+\varepsilon) = f'(x) + \varepsilon f''(x) + \cdots \tag{6.17}$$

だから、

$$\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon_n^2 \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \tag{6.18}$$

となり、良い推定値さえ得られていれば、収束が速いことが判る。しかし、解を捜す区間に変曲点があると、近傍の解には収束しないか、収束しても一般には収束は速くない。そこで、二分法と組み合わせて、確実に、しかも収束の速いプログラムを用意すると良い。以下のプログラムは、そんな例である[4] 。

```
      function rtsafe(funcd,x1,x2,xacc)
      implicit NONE
      Integer MAXIT
      Real rtsafe,x1,x2,xacc
      external funcd
      Parameter (MAXIT=100)   !Maximum allowed number of iterations.
! Using a combination of Newton-Raphson and bisection, find the root of a
! function bracketed between x1 and x2. The root, returned as the
! function value 'rtsafe', will be refined until its accuracy is known
! within +-'xacc'. 'funcd' is a user-supplied subroutine which returns
! both the function value and the first derivative of the function.
      Integer j
      Real df,dx,dxold,f,fh,fl,temp,xh,xl
      call funcd(x1,fl,df)
      call funcd(x2,fh,df)
      if((fl.gt.0..and.fh.gt.0.).or.(fl.lt.0..and.fh.lt.0.))
     * pause 'root must be bracketed in rtsafe'
      if(fl.eq.0.)then
        rtsafe=x1
        return
      else if(fh.eq.0.)then
        rtsafe=x2
        return
      else if(fl.lt.0.)then   !Orient the search so that f(x1)<0.
        xl=x1
        xh=x2
      else
        xh=x1
        xl=x2
```

[4] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. 1992, *Numerical Recipes in FORTRAN77* (*Second Edition*), (Cambridge University Press, Cambridge) から転載。http://cfatab.harvard.edu/nr/nronline.html でオンラインで読む事も出来る。

```
      endif
      rtsafe=.5*(x1+x2)       !Initialize the guess for root,
      dxold=abs(x2-x1)        !the "stepsize before last,"
      dx=dxold                !and the last step.
      call funcd(rtsafe,f,df)
      do j=1,MAXIT            !Loop over allowed iterations.
        if(((rtsafe-xh)*df-f)*((rtsafe-xl)*df-f).ge.0. !Bisect if Newton out of
     *     .or. abs(2.*f).gt.abs(dxold*df) ) then      !range, or not decreasing
          dxold=dx                                     !fast enough.
          dx=0.5*(xh-xl)
          rtsafe=xl+dx
          if(xl.eq.rtsafe)return        !Change in root is negligible.
        else                            !Newton step acceptable. Take it.
          dxold=dx
          dx=f/df
          temp=rtsafe
          rtsafe=rtsafe-dx
          if(temp.eq.rtsafe)return
        endif
        if(abs(dx).lt.xacc) return      !Convergence criterion.
        call funcd(rtsafe,f,df)         !The one new function evaluation per
        if(f.lt.0.) then                !iteration.
          xl=rtsafe                     !Maintain the bracket on the root.
        else
          xh=rtsafe
        endif
      end do
      pause 'rtsafe exceeding maximum iterations'
      return
      END
```

第 7 章　常微分方程式の数値解法：初期値問題

常微分方程式

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i[x, y_i(x)] \tag{7.1}$$

$i, j = 1, 2, 3, ..., n$ を、初期値問題として数値的に解く事を考えよう。$x = x_0$ において初期値 $y_i(x_0) = y_{i,0}$ が与えられた時、$x = x_0 + h$ での y_i の値 $y_i(x_0 + h)$ が求められれば、次のステップでは、その (x, y_i) を新たな初期値と考えれば良いから、問題は $x = x_0 + h$ での y_i の値を数値的に求める事である。

7.1　Euler 法と Runge-Kutta 法

7.1.1　Euler 法

簡単のために、一元の微分方程式の場合を考えよう：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{7.2}$$

$x = x_0$ の周りでの Taylor 展開を利用する事はすぐに思いつくだろう：

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + ... \tag{7.3}$$

ここで、$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ だから、$O(h)$ までは、Taylor 展開で求める事が出来る。即ち、

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf(x_0, y_0) + O(h^2) \tag{7.4}$$

誤差は

$$\frac{h^2}{2!}y''(x_0) = \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{7.5}$$

のオーダーである。この方法による計算は、Euler 法と呼ばれる。

7.1.2　Runge-Kutta 法

x_0 と $x_0 + h$ の間の、中間の x における導関数、$f(x, y)$ の関数値を何回か計算し、それらの適当な平均を用いる事によって、高次の Taylor 展開を達成しようというのが、Runge-Kutta 法である。

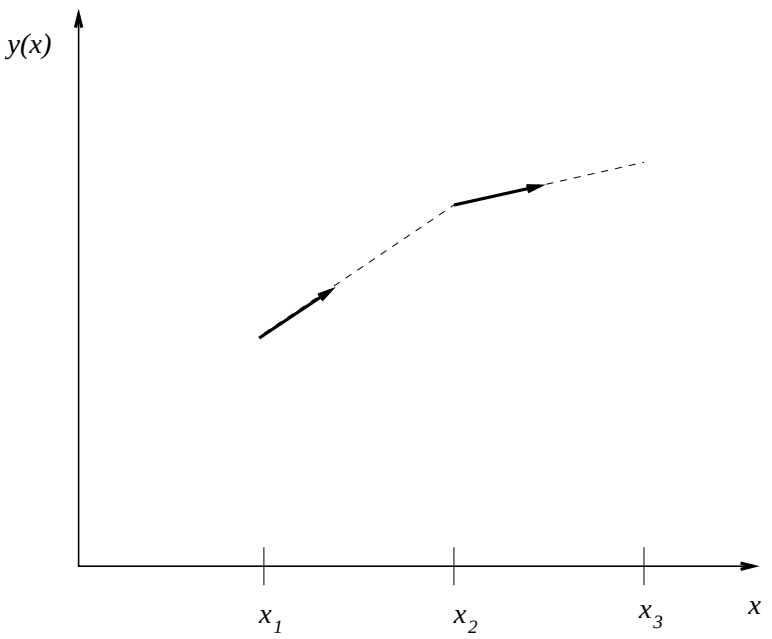

図 7.1: Euler 法による積分の概念図。

次の例で説明しよう。

$$y(x_0+h) = y(x_0) + \mu_1 h f(x_0, y_0) + \mu_2 h f(x_0+\alpha h, y_0+\beta k) \tag{7.6}$$

と表す。右辺第二項は、点 (x_0, y_0) での傾き $h \cdot f(x_0, y_0)$ に μ_1 の重みを掛けたものであり、第三項は、x_0 と x_0+h の間のある点 $(x_0+\alpha h, y_0+\beta k)$ での傾き $h \cdot f(x_0+\alpha h, y_0+\beta k)$ に μ_2 の重みを掛けたものである。即ち、第二項と第三項とで、x_0 と x_0+h の間の、中間の x における導関数、$f(x,y)$ の関数値の適当な平均を用いて、$y(x_0)$ から $y(x_0+h)$ を求める事を考える。ここで、

$$f(x_0+\alpha h, y_0+\beta k) = f_0 + \alpha h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \beta k \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \tag{7.7}$$

だから、(7.6) 式は、

$$\begin{aligned} y(x_0+h) &= y(x_0) + \mu_1 h f_0 + \mu_2 h \left[f_0 + \alpha h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \beta k \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \right] \\ &= y(x_0) + (\mu_1+\mu_2) h f_0 + \alpha\mu_2 h^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \beta\mu_2 hk \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \end{aligned} \tag{7.8}$$

となる。この式と (7.3) 式とを比べれば、

$$\mu_1 + \mu_2 = 1 \tag{7.9}$$

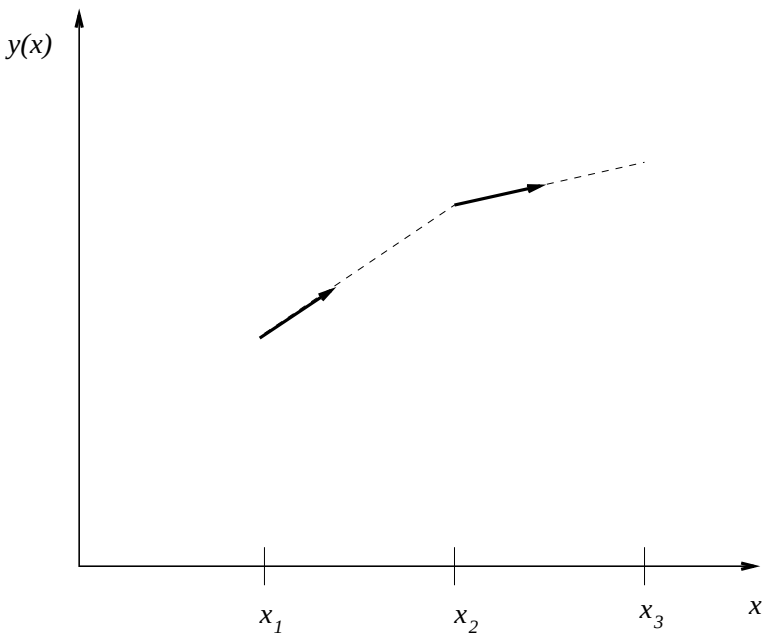

図 7.2: 修正 Euler 法による積分の概念図。

$$\alpha\mu_2 = \beta\mu_2 = 1/2 \tag{7.10}$$

$$k = hf_0 \tag{7.11}$$

ならば、(7.9) 式は、Taylor 展開に $O(h^2)$ の精度まで一致する事が判る。α , β や重み μ_1 , μ_2 はユニークではない。

特に、$\alpha = \beta = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$ の時は、

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{2}[hf_0 + hf_0(x_0 + h, y_0 + hf_0)] \tag{7.12}$$

で、これを改良 Euler 公式、或いは、Heun の二次公式と呼ぶ。$\alpha = \beta = 1/2$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ の場合は、

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf(x_0 + h/2, y_0 + h/2f_0) \tag{7.13}$$

で、これは修正 Euler 公式と呼ばれる。改良 Euler 公式も修正 Euler 公式も、幾何学的に考えれば、意味は明らかであろう。

ここでは証明は略すが、

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{6}\{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\} \tag{7.14}$$

但し、

$$k_1 = hf(x_0, y_0) \tag{7.15}$$

$$k_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) \tag{7.16}$$

$$k_3 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) \tag{7.17}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) \tag{7.18}$$

とすると、(7.14) 式は、Taylor 展開の四次の精度までを持つ。通常、(7.14) 式を Runge-Kutta の公式と呼ぶ。

Runge-Kutta の公式のサブルーチンプログラムの例を下に掲げる。このプログラムでは、n 元連立一次方程式で、$x_0, y_0, (dy/dx)_0, h$ は与えられているとして、$y(x_0 + h)$ を計算する。中間点での導関数を与えるプログラムは、別のサブルーチンで与えられているとして、それを DERIVS と呼んでいる。この名前は仮の名前だから、引数として扱っている。メインプログラムでは、external 文を使って、導関数を与えるプログラムを指定しておくだけで良い。

```
      subroutine RK4(y,dydx,n,x,h,yout,DERIVS)

      implicit NONE
      real*8 y,dydx,yout,yt,dyt,dym,
     &     x,xh,h,hh,h6
      integer nmax,n,i
      parameter (nmax=2)
      dimension y(n),dydx(n),yout(n),yt(nmax),dyt(nmax),dym(nmax)

      hh=h*0.5
      h6=h/6.
      xh=x+hh
      Do i=1,n
        yt(i)=y(i)+hh*dydx(i)
      End do
      call DERIVS(xh,yt,dyt)
      Do i=1,n
        yt(i)=y(i)+hh*dyt(i)
      End do
      call DERIVS(xh,yt,dym)
      Do i=1,n
        yt(i)=y(i)+h*dym(i)
        dym(i)=dyt(i)+dym(i)
      End do
      call DERIVS(x+h,yt,dyt)
      Do i=1,n
```

```
        yout(i)=y(i)+h6*(dydx(i)+dyt(i)+2.*dym(i))
      End do

      Return
      End
```

7.1.3 例題

Runge-Kutta 法と Euler 法と修正 Euler 法を使って、次の連立一階常微分方程式を解き、誤差を評価せよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \tag{7.19}$$

但し、初期値は $x = 0$ で $y = 1$, $dy/dx = 0$ とし、区間 $x = [0, \pi/2]$ について解け。尚、先に挙げたサブルーチン RK4 の使用例として、Runge-Kutta 法でのサンプルプログラムを下に掲げる。

```
      program main

      implicit NONE
      real*8 y,dydx,x,h,yout,pi
      integer i
      parameter(i=2,h=0.001,pi=3.141593)
      dimension y(i),dydx(i),yout(i)
      external diff_eq

      open(unit=1,file='RK_sample1.dat',status='new')
c initial value
      x    = 0.
      y(1) = 1.
      y(2) = 0.
c do loop
      do while (x.le.pi/2.)
        write(1,100) x,y(1),y(2)
        call diff_eq(x,y,dydx)
        call rk4(y,dydx,2,x,h,yout,diff_eq)
        y(1) = yout(1)
        y(2) = yout(2)
        x    = x + h
      end do
100   format(11x,f6.3,1p2e12.4)
```

```
      close(1)
      stop
      end


      subroutine diff_eq(x,y,dydx)

      implicit NONE
      real*8 y,dydx,x,n
      dimension y(2),dydx(2)

      dydx(1)=y(2)
      dydx(2)=-y(1)
      return
      end
```

7.1.4　参考文献

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. 1992, *Numerical Recipes in FORTRAN 77* (*Second Edition*), (Cambridge University Press, Cambridge).

http://cfatab.harvard.edu/nr/nronline.html

7.2　ポリトロープガス球とLane-Emden方程式

常微分方程式の初期値問題の例として、ポリトロープガス球のLane-Emden方程式を解いてみよう。

7.2.1　恒星の内部構造の基本

恒星の内部構造の釣り合いを考えよう。

- 静水圧平衡
  - 星は自分自身の重力による収縮しようする力とガス圧力による対抗する力とがバランスして、力学平衡を保っている。r を中心からの距離、P をそこでの圧力、M_r をその半径より内側に含まれる質量とすると、G を重力定数として、この力学平衡は、次のように表す事が出来る。

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \tag{7.20}$$

- 連続の式
  - 半径 r ,厚み dr の球殻に含まれる質量 dM_r は、そこでの密度を ρ とすると、$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr$ であるから、次の連続の式を得る。

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{7.21}$$

- 状態方程式
  - ガスの圧力 P と密度 ρ は、ガスの成分、温度 T によって決まっている。即ち、

$$P = P(\rho, T, X_i) \tag{7.22}$$

    ただし、X_i は、ガスに含まれる i 種の元素の質量比とする。

- エネルギー輸達
  - 星は、自身の持つ熱エネルギーを外に放出している系である。温度 T は、エネルギーの輸達の効率によって決められる。エネルギーの輸達の取りえる形態には、輻射と対流と伝導があるが、通常の星の内部では伝導は効率が悪く、輻射か対流によっている。

$$\frac{dT}{dr} = \begin{cases} \frac{-3}{4ac}\frac{\kappa\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} & \text{if radiative} \\ \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} & \text{if convective} \end{cases} \tag{7.23}$$

    ただし、ここで、a は輻射定数、c は光速、κ は吸収係数、L_r は半径 r での光度、γ は断熱指数を表す。

- 吸収係数
  - 吸収係数は、ガスの成分と状態による。

$$\kappa = \kappa(\rho, T, X_i) \tag{7.24}$$

- エネルギー保存式
  - 半径 r、厚み dr の球殻で発生するエネルギーを、$dL_r = 4\pi r^2 \rho\varepsilon dr$ と書くと、

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon \tag{7.25}$$

- 核反応生成率
  - ε は、エネルギー発生率を表す。星のエネルギー源は核反応である。これは、ガスの成分と状態によって決まる。

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X_i) \tag{7.26}$$

7.2.2 Lane-Emden 方程式

状態方程式

$$P = P(\rho, T, X_i) \tag{7.27}$$

において、

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{N}} \tag{7.28}$$

として解く事を考える。これを指数 N のポリトロープと呼ぶ。すると、上の基礎方程式で、力学平衡を表す静水圧平衡の式と連続の式の二本の式がエネルギーの式と分離する。即ち静水圧平衡の式より

$$M_r = -\frac{r^2}{G}\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} \tag{7.29}$$

を得、これを連続の式に代入すれば

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{7.30}$$

を得る。ここで

$$\rho = \rho_{\rm c}\theta^N \tag{7.31}$$

($\rho_{\rm c}$ は 星の中心密度) として、先の状態方程式を仮定すると

$$\left[\frac{(N+1)K}{4\pi G}\rho_{\rm c}^{\frac{1}{N}-1}\right]\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -\theta^N \tag{7.32}$$

を得る。

$$\alpha \equiv \left[\frac{(N+1)K}{4\pi G}\rho_{\rm c}^{\frac{1}{N}-1}\right]^{1/2} \tag{7.33}$$

で α を定義し、

$$r \equiv \alpha\xi \tag{7.34}$$

で 無次元変数 ξ を導入すると

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^N \tag{7.35}$$

を得る。これを 指数 N の Lane-Emden equation と呼ぶ。

星の中心 $\xi = 0$ で

$$\theta = 1 \tag{7.36}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0 \tag{7.37}$$

である。また $\theta = 0$ になる点が星の表面に相当する。

7.2.3 Lane-Emden 方程式の解の中心近傍での振舞

Lane-Emden 方程式 (7.35) は、$\xi = 0$ が、確定特異点になっている。この様な場合、特異点の近傍での解の Laurent 級数展開を考える必要がある。いま、$\xi = 0$ のまわりの形式解を

$$\theta(\xi) = 1 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + \cdots \tag{7.38}$$

の形に仮定して、(7.35) 式の両辺に代入すれば、左辺は、

$$\mathrm{LHS} = 6a_2 + 20a_4\xi^2 + \cdots \tag{7.39}$$

一方、右辺は、

$$\mathrm{RHS} = -(1 + Na_2\xi^2 + \cdots) \tag{7.40}$$

となる。 両辺の ξ^0 と ξ^2 の係数を比較して、$a_2 = -1/6$, $a_4 = N/120$ を得る。よって、中心近傍での解は、

$$\theta(\xi) \simeq 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{N}{120}\xi^4 + \cdots \tag{7.41}$$

と表される。

7.2.4 積分の方法

例えば、$y_1 = \theta$, $y_2 = \xi^2 d\theta/d\xi$ とおくと、(7.35) 式は次の二元連立一階微分方程式となる：

$$\frac{dy_1}{d\xi} = \xi^{-2} y_2, \tag{7.42}$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} = -\xi^2 y_1^N. \tag{7.43}$$

この方程式を、$\xi = 0$ から外側に向かって、Runge-Kutta 法で積分していけば良い。中心は、明らかに確定特異点だから、初期値は、$\xi = 0$ ではなく、中心からわずかにずれた $\xi = h$ で設定する。そこでの y_i の値は、上で求めた展開から得られる

$$y_1 \simeq 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{N}{120}\xi^4 + \cdots, \tag{7.44}$$

$$y_2 \simeq -\frac{1}{3}\xi^3 + \frac{N}{30}\xi^5 + \cdots \tag{7.45}$$

を使って求める。積分を進めて、$y_1 = 0$ になる点が表面である。その ξ を ξ_1 とすると、星の半径は

$$\begin{aligned} R &= \alpha\xi_1 \\ &= \left[\frac{(N+1)K}{4\pi G}\right]^{1/2} \rho_{\mathrm{c}}^{(1-N)/2N}\xi_1 \end{aligned} \tag{7.46}$$

となる。中心から ξ より内側に含まれる質量は

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \int_0^{\alpha\xi} 4\pi\rho r^2 dr \\ &= 4\pi\alpha^3\rho_{\rm c}\int_0^{\xi}\xi^2\theta^N d\xi, \end{aligned} \tag{7.47}$$

或いは、(7.35) 式を使って書き直すと、

$$\begin{aligned} M(\xi) &= -4\pi\alpha^3\rho_{\rm c}\int_0^{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)d\xi \\ &= -4\pi\alpha^3\rho_{\rm c}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} \end{aligned} \tag{7.48}$$

で与えられる。従って、星の全質量は

$$M = -4\pi\left[\frac{(N+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2}\rho_{\rm c}^{(3-N)/2N}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} \tag{7.49}$$

となる。

7.2.5　問題

1. 指数 $N = 1.5$、$N = 3$、及び $N = 4$ の場合について、Lane-Emden equation を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解け。

2. 太陽が $N = 3$ のポリトロープで近似できるとして、その内部構造を求めよ。但し太陽半径 $R_\odot = 6.96\times10^5$ km、太陽質量 $M_\odot = 1.99\times10^{30}$ kg とし、内部は完全気体の状態方程式

$$P_{\rm gas} = NkT \tag{7.50}$$

に従うものとする。ここで N は単位体積当たりの全粒子数、k はボルツマン定数。今、水素、ヘリウム、それ以外の元素が質量比 (X, Y, X_i) である完全電離理想気体を考える。水素原子の質量を $m_{\rm H}$ で表わすとすると、水素については核の数密度は $\rho X/m_{\rm H}$、電子の数密度は同じく $\rho X/m_{\rm H}$ 、ヘリウムについては核の数密度は $\rho Y/(4m_{\rm H})$、電子の数密度は $\rho Y/(2m_{\rm H})$、それら以外の元素については、それぞれの元素の atomic weight を A_i、atomic number を Z_i とすると、核の数密度は $\rho X_i/(A_i m_{\rm H})$、電子の数密度は $\rho X_i Z_i/(A_i m_{\rm H})$ だから、全粒子数 N は

$$N = \frac{\rho}{m_{\rm H}}\left(2X + \frac{3}{4}Y + \sum_i\frac{Z_i+1}{A_i}X_i\right) \tag{7.51}$$

となる。重元素については $(Z_i+1)/A_i \sim 1/2$ だから、水素とヘリウム以外の元素の質量比を Z $(Z = 1-X-Y = \sum_i X_i)$ と表わす事にすれば、

$$N = \frac{\rho}{\mu m_{\rm H}} \tag{7.52}$$

であり、ガス圧は

$$P_{\rm gas} = \frac{\rho}{\mu m_{\rm H}} kT \tag{7.53}$$

$$= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho T \tag{7.54}$$

ここに μ は

$$\mu^{-1} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \tag{7.55}$$

で、平均分子量と呼ぶ。また $\mathcal{R} \equiv k/m_{\rm H} = 8.314510\times10^3\ {\rm J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$。($k = 1.380658\times10^{-23}$ ${\rm J\cdot K^{-1}}$、$m_{\rm H} = 1.672623\times10^{-27}\,{\rm kg}$)。太陽の水素、ヘリウム、金属の質量比はそれぞれ $X = 0.75$、$Y = 0.23$、$Z = 0.02$ とする。

3. 白色矮星の内部では、電子は縮退し、その縮退圧が星を支えるようになる。電子が完全に縮退した場合、分布関数は

$$n_{\rm e}(p)dp = \begin{cases} \frac{2}{h^3}4\pi p^2 dp & \text{for } p < p_0 \\ 0 & \text{for } p > p_0 \end{cases} \tag{7.56}$$

全電子数 $n_{\rm e}$ は

$$n_{\rm e} = \int_0^{p_0} n_{\rm e}(p)dp = \frac{8\pi}{3h^3}p_0^3 \tag{7.57}$$

だから、与えられた電子数に対しては p_0 は

$$p_0 = \left(\frac{3\pi^3}{8\pi}n_{\rm e}\right)^{1/3} \tag{7.58}$$

$p_0 \ll m_{\rm e}c^2 = 0.51{\rm MeV}$ であれば、$v = p/m_{\rm e}$ として、電子の縮退による圧力は

$$P = \frac{1}{3}\int_0^{p_0} p v_p n(p)dp$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{p_0} \frac{8\pi}{m_{\rm e}h^3}p^4 dp$$

$$= \frac{8\pi}{15 m_{\rm e}h^3}p_0^5$$

$$= \frac{h^2}{20m_{\rm e}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_{\rm e}^{5/3} \tag{7.59}$$

$$= \frac{h^2}{20m_{\rm e}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} N_0^{5/3}\left(\frac{\rho}{\mu_{\rm e}}\right)^{5/3}$$

$$= 1.004\times10^7\left(\frac{\rho}{\mu_{\rm e}}\right)^{5/3}\ {\rm Pa} \tag{7.60}$$

となり、$N = 1.5$ のポリトロープに相当する。ここで、$\mu_{\rm e}^{-1} = (X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z) = \frac{1}{2}(1+X)$。白色矮星の状態方程式を (7.60) 式とした時、その半径と質量はどれぐらいになるか。中心密度は $\rho_{\rm c} = 10^9{\rm kg\cdot m^{-3}}$ を目安とせよ。また、半径の質量依存性はどうなるか。

相対論的縮退の場合は、

$$\begin{aligned} P &= \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} N_0^{4/3}\left(\frac{\rho}{\mu_{\rm e}}\right)^{4/3} \\ &= 1.243\times 10^{10}\left(\frac{\rho}{\mu_{\rm e}}\right)^{4/3} \quad {\rm Pa} \end{aligned} \tag{7.61}$$

となる。状態方程式が (7.60) 式で表される程の高密度の白色矮星では、その半径と質量はどれぐらいになるか。同じく中心密度は $\rho_{\rm c} = 10^9 {\rm kg\cdot m^{-3}}$ を目安とせよ。質量が中心密度によらない事を導け。この事の意味する所を考察せよ。

7.2.6　参考文献

Hansen, C. J. and Kawaler, S. D. 1994, *Stellar Interiors*, (Springer-Verlag, New York).

第 8 章　常微分方程式の数値解法：境界値問題

8.1　シューティング法

常微分方程式

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i[x, y_j(x)] \tag{8.1}$$

$i, j = 1, 2, 3, ..., 2n$ において、$x = x_0$ で

$$g_k[y_j(x_0), x_0] = 0 \tag{8.2}$$

(但し、$k = 1, ..., n$) 且つ $x = x_1$ で

$$g_l[y_j(x_1), x_1] = 0 \tag{8.3}$$

(但し、$l = n + 1, ..., 2n$) を満たすよう解を求める場合を考えよう。境界値問題という訳である。例えば、初期値問題の例に挙げたのと同じ微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{8.4}$$

を、$x = 0$ で $y = 1$, $x = \pi/2$ で $y = 0$ の下で解く境界値問題として考えよう。

与えられた境界から、もう一方の境界に向かって初期値問題として積分する事を考える。決められている条件は、$x = 0$ で $y = 1$ だけだから、初期値問題として積分を進めるためにはもう一つ条件を課す必要がある。そこで、$x = 0$ での dy/dx にある値を与えて積分していくことにする。いろいろと、このパラメーターを変えてみて、もう一方の境界での条件 $x = \pi/2$ で $y = 0$ を満たすようなパラメーターを捜せば良い。シューティング法という。場合によっては、境界条件が特異になっていて、シューティング法ではなかなか当たりが見つからない事がある。この様な場合は、それぞれの境界から、初期値問題として他方の境界に向かって積分していき、ある適当な点 (フィッティングポイント) で、双方の解が接続するようにパラメーターを決める。これをフィッティング法と呼ぶ。

8.1.1　問題

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{8.5}$$

を、$x = 0$ で $y = 1$, $x = \pi/2$ で $y = 1/4$ という境界条件の境界値問題として、シューティング法により、数値的に解け。

$z \equiv dy/dx(x=0)$、$Y \equiv y(x=\pi/2)$ とすると、この問題は $Y(z)=1/4$ となる z を求めることと同じである。手順としては、先ず、適当に選んだ $z_{\rm t}$ に対する Y を求める。次に、z の値を $z_{\rm t}$ から $z_{\rm t}+\delta z$ に変えて、Y の変化量を求める。これから

$$dY/dz = [Y(z_{\rm t}+\delta z) - Y(z_{\rm t})]/\delta z \tag{8.6}$$

を数値的に求める。今、$z_{\rm t}$ の値が、真の解 z_0 から Δz ずれているとすると、1 次の精度で、

$$Y(z_{\rm t}) + (dY/dz)\Delta z = 1/4 \tag{8.7}$$

そこで、

$$z = z_{\rm t} + \Delta z = z_{\rm t} + \{1/4 - Y(z_{\rm t})\}/(dY/dz) \tag{8.8}$$

を改めて $z_{\rm t}$ として、再び dY/dz を計算し、Δz が充分小さくなるまで、逐次計算を繰り返せば良い。

8.2　境界値問題としての Lane-Emden 方程式

Lane-Emden 方程式 (7.35) を境界値問題として解いてみよう。適当なフィッティングポイント $\xi_{\rm f}$ を設け、中心からフィッティングポイントまでの解は前節で解説した通りの方法で求め、その解に、表面、即ち $\theta(\xi)=0$ となる $\xi=\xi_{\rm s}$ から積分してきた解が、このフィッティングポイントで一致するようにすれば良い。

表面からの積分は $\xi_{\rm s}$ の値を決めた上で行わなければならないのは言うまでもないが、微分方程式は 2 階だから、$\xi=\xi_{\rm s}$ での初期条件が 2 つ必要である。その 1 つは $\theta(\xi)=0$ だが、もう 1 つの $d\theta/d\xi$ は最初はわからない。そこで、$\xi_{\rm s}$ とそこでの $d\theta/d\xi$ の値をパラメーターとして与えてやれば、外側の解をこの 2 つのパラメーターの関数として扱う事が出来る。$y_1=\theta$，$y_2=\xi^2 d\theta/d\xi$ とし、$y_1^{(\rm int)}$ と $y_2^{(\rm int)}$ を中心からの積分で求めた $\xi=\xi_{\rm f}$ での値、$y_1^{(\rm ext)}$ と $y_2^{(\rm ext)}$ を表面からの積分で求めた $\xi=\xi_{\rm f}$ での値としよう。内側の解はユニークに決まっている。一方、外側の解は $x\equiv\xi_{\rm s}$ とそこでの $z\equiv d\theta/d\xi$ の値に依存している。全体の解となるには、$\xi=\xi_{\rm f}$ で

$$Y(x,z) \equiv y_1^{(\rm int)} - y_1^{(\rm ext)}(x,z) = 0 \tag{8.9}$$

$$Z(x,z) \equiv y_2^{(\rm int)} - y_2^{(\rm ext)}(x,z) = 0 \tag{8.10}$$

が満たされなければならない。

手順としては、先ず、適当に選んだ $x_{\rm t}$ と $z_{\rm t}$ に対する Y と Z を求める。次に、z の値を変えずに、x を $x_{\rm t}$ から $x_{\rm t}+\delta x$ に変えて、Y 及び Z の変化量を求める。同様に、x の値を変えずに、z を $z_{\rm t}$ から $z_{\rm t}+\delta z$ に変えて、Y 及び Z の変化量を求める。これから

$$\partial Y/\partial x = [Y(x_{\rm t}+\delta x, z_{\rm t}) - Y(x_{\rm t}, z_{\rm t})]/\delta x \tag{8.11}$$

$$\partial Y/\partial z = [Y(x_{\rm t}, z_{\rm t}+\delta z) - Y(x_{\rm t}, z_{\rm t})]/\delta z \tag{8.12}$$

を数値的に求める。今、$x_{\rm t}$、$z_{\rm t}$ の値が、真の解 x_0，z_0 から Δx，Δz ずれているとすると、1 次の精度で、

$$Y(x_{\rm t}, z_{\rm t}) + (\partial Y/\partial x)\Delta x + (\partial Y/\partial z)\Delta z = 0 \tag{8.13}$$

$$Z(x_{\rm t}, z_{\rm t}) + (\partial Z/\partial x)\Delta x + (\partial Z/\partial z)\Delta z = 0 \tag{8.14}$$

となる。そこで、上の 2 式から Δx と Δz を求め、$x = x_{\rm t} + \Delta x$ を改めて $x_{\rm t}$，$z = z_{\rm t} + \Delta z$ を改めて $z_{\rm t}$ として、Δx，Δz が充分小さくなるまで、逐次計算を繰り返せば良い。

8.2.1 問題

境界値問題として、Lane-Emden 方程式を解け。

8.3 現実的な恒星内部構造モデル

境界値問題の例として、恒星内部を記述する以下の方程式を現実的な仮定の下に解く事を考えよう。基本方程式は、M_r を独立変数に選べば、

1. 静水圧平衡
$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \tag{8.15}$$
2. 連続の式
$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{8.16}$$
3. エネルギー保存式
$$\frac{dL_r}{dM_r} = \varepsilon \tag{8.17}$$
4. エネルギー輸達
$$\frac{dT}{dM_r} = -\frac{GM_r T}{4\pi r^4 P}\nabla \tag{8.18}$$
但しここに
$$\nabla \equiv \min\left[\frac{3}{16\pi acG}\frac{\kappa L_r P}{M_r T^4}, \nabla_{\rm ad}\right] \tag{8.19}$$

で与えられる。これに、補助的な関係式

1. 状態方程式
$$P = P(\rho, T, X, Y) \tag{8.20}$$
2. 吸収係数
$$\kappa = \kappa(\rho, T, X, Y) \tag{8.21}$$

3. 核反応生成率

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X, Y) \tag{8.22}$$

を考慮する事によって、(8.15) – (8.18) 式は、(P, r, L_r, T) を変数とする四元連立常微分方程式となる。これは境界値問題で、境界条件は星の中心 $M_r = 0$ で

$$r = 0 \tag{8.23}$$

$$L_r = 0 \tag{8.24}$$

星の表面 $Mr = M$ で

$$P = 0 \tag{8.25}$$

$$T = 0 \tag{8.26}$$

である。

8.3.1　恒星内部での輻射輸達

恒星内部で両面の温度が T と $T + dT$ の層を考える。この層に加わるネットの輻射圧を $dP_{\rm rad}$ とする。輻射平衡を考えると、この輻射圧に伴う運動量は物質に吸収される。今単位質量単位断面積当たりの吸収係数を κ とすると、単位面積単位時間当たり $F_{\rm rad}$ の輻射エネルギーが入射して dr 進む間に、$F_{\rm rad}\kappa\rho dr/c$ の運動量が吸収される。従って、

$$-dP_{\rm rad} = F_{\rm rad}\kappa\rho dr/c \tag{8.27}$$

或いは

$$P_{\rm rad} \equiv \frac{a}{3}T^4 \tag{8.28}$$

だから

$$F_{\rm rad} = -\frac{ac}{3\kappa\rho}\frac{dT^4}{dr} \tag{8.29}$$

を得る。

$$L_r \equiv 4\pi r^2 F_{\rm rad} \tag{8.30}$$

として

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-3}{4ac}\frac{\kappa\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{8.31}$$

を得る。

8.3.2 対流によるエネルギー輸送

対流に対する安定性

静水圧平衡にある層で、bubble を 断熱的に dr だけ平衡位置からずらせたとする。最初の平衡位置における bubble の圧力と密度をそれぞれ P_0、ρ_0 とする。これらは周囲の圧力、密度に等しい。dr ずれた周囲の圧力、密度は $P_0 + (dP/dr)dr$、$\rho_0 + (d\rho/dr)dr$ である。ずれた位置での bubble の圧力 P^* はその周囲の圧力に等しい。一方、密度 ρ^* は断熱変化により決まる。即ち

$$\rho^* = \rho_0 (P^*/P_0)^{(1/\gamma)} \tag{8.32}$$

bubble が元の平衡位置に戻るかどうかは ρ^* と周囲の密度の大小による。戻るのが対流安定、どんどんずれていくのが対流不安定である。従って、線形の範囲で、対流不安定の条件は

$$\frac{d\ln\rho}{dr} - \frac{1}{\gamma}\frac{d\ln P}{dr} > 0 \tag{8.33}$$

対流によるエネルギーフラックス

対流不安定の時、bubble の温度超過分は

$$dT = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}dr - \frac{dT}{dr}dr \tag{8.34}$$

$$\equiv \Delta\nabla T dr \tag{8.35}$$

単位質量当たりの熱エネルギー超過分はこれに $c_p\rho$ を掛けて与えられ、単位面積単位時間当たりのエネルギーフラックスは更に速度を掛けたものである。

$$F_{\rm conv} = \Delta\nabla T dr c_p \rho v \tag{8.36}$$

同様に密度超過分は

$$d\rho = \frac{\rho}{T}\Delta\nabla T dr \tag{8.37}$$

で与えられるが、移動によってなされる平均仕事量はこれに重力加速度と移動距離を掛けた上で平均したものである。これが運動エネルギーの元であるから、

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{\rho}{T}\Delta\nabla T dr \frac{GM_r}{r^2}\frac{1}{2}dr \tag{8.38}$$

が成り立つ。dr として、対流で混ざる代表的長さ l を採ると、エネルギーフラックスは

$$F_{\rm conv} = c_p\rho\left(\frac{GM_r}{Tr^2}\right)^{1/2}(\Delta\nabla T)^{3/2}\frac{l^2}{4} \tag{8.39}$$

で与えられる。

対流温度勾配

対流核の場合、温度超過は温度勾配に比べて無視出来るほど小さい。そこで温度勾配は、

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} \tag{8.40}$$

で与えられる。

8.3.3　おおよその値

微分方程式を解く前に、解のおおよその値に目星をつけよう。基本方程式において、左辺の微分、例えば dP/dM_r を単なる割り算 P/M_r に置き換える。そのうえで $M_r \sim M/2$、$r \sim R/2$、$\rho \sim \rho_{\rm c}$、$T \sim T_{\rm c}$、$P \sim P_{\rm c}$ として恒星の物理諸量の大雑把な値を求めよ。

1. 静水圧平衡

$$\frac{P_{\rm c}}{M} \sim -\frac{GM/2}{4\pi(R/2)^4} \tag{8.41}$$

これより

$$P_{\rm c} \sim \frac{2}{\pi}\frac{GM^2}{R^4} \tag{8.42}$$

2. 連続の式

$$\frac{R}{M} \sim \frac{1}{4\pi(R/2)^2(\rho_{\rm c}/2)} \tag{8.43}$$

これより

$$\rho_{\rm c} \sim \frac{2}{\pi}\frac{M}{R^3} \tag{8.44}$$

3. 状態方程式

ガス圧が主である場合を想定すると

$$P_{\rm c} \sim \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_{\rm c}T_{\rm c} \tag{8.45}$$

これより

$$\begin{aligned} T_{\rm c} &\sim \frac{1}{\mathcal{R}/\mu}\frac{P_{\rm c}}{\rho_{\rm c}} \\ &\sim \frac{1}{\mathcal{R}/\mu}\frac{GM}{R} \end{aligned} \tag{8.46}$$

ただし $G = 6.6726 \times 10^{-11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}$。

4. エネルギー輸達

エネルギーは輻射によって運ばれていると想定すると

$$\frac{T_{\rm c}}{M} \sim -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\bar{\kappa}L/2}{(T_{\rm c}/2)^3(R/2)^4} \tag{8.47}$$

これより

$$\begin{aligned} L &\sim \frac{\pi^2 ac}{3\bar{\kappa}} \frac{T_{\rm c}^4 R^4}{M} \\ &\sim \frac{\pi^2}{3\bar{\kappa}} \frac{acG^4}{(\mathcal{R}/\mu)^4} M^3 \end{aligned} \tag{8.48}$$

今、太陽を想定して $M = M_\odot \sim 2 \times 10^{30}\mathrm{kg}$、$R = R_\odot \sim 7 \times 10^8\mathrm{m}$、$\mathcal{R}/\mu \sim 1.7 \times 10^8$ を代入すると

$$T_{\rm c} \sim 10^7 \quad \mathrm{K} \tag{8.49}$$

$$P_{\rm c} \sim 10^{15} \quad \mathrm{Pa} \tag{8.50}$$

$$\rho_{\rm c} \sim 4 \times 10^4 \quad \mathrm{kg \cdot m^{-3}} \tag{8.51}$$

を得る。光度については、

$$\bar{\kappa} \sim \kappa_0 Z(1+X) \frac{\rho_{\rm c}/2}{(T_{\rm c}/2)^{3.5}} \sim 8 \times 10^3 \quad \mathrm{m^2 \cdot kg^{-1}} \tag{8.52}$$

だから

$$\begin{aligned} L &\sim 10^{24} \quad \mathrm{J \cdot s{-}1} \\ &= 10^{24} \quad \mathrm{W} \end{aligned} \tag{8.53}$$

を得る。

8.3.4 HR 図と主系列

$$\bar{\kappa} L \sim \frac{\pi^2}{6} \frac{acG^4}{(\mathcal{R}/\mu)^4} M^3 \tag{8.54}$$

$$\frac{\bar{\kappa} L}{\bar{\kappa} L_\odot} \sim \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \tag{8.55}$$

$$\sigma T_{\rm eff}^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \tag{8.56}$$

$$\left(\frac{T_{\rm eff}}{T_{\rm eff,\odot}} \right)^4 = \frac{L}{L_\odot} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-2} \sim \frac{L}{L_\odot} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \sim \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{1/3} \tag{8.57}$$

8.3.5　輻射圧と臨界光度

輻射圧 $P_{\rm rad}$ は

$$P_{\rm rad} = \frac{a}{3}T^4 \tag{8.58}$$

で与えられる。恒星の内部ではガス圧の他にこの輻射圧が無視できない。温度の依存性がガス圧に比べて高いので、低密度高温状態ではむしろ輻射圧が主たる圧力になる。輻射圧の変化は輻射輸達の方程式から

$$\frac{dP_{\rm rad}}{dM_r} = -\frac{1}{16\pi^2 c}\frac{\kappa L_r}{r^4} \tag{8.59}$$

これから

$$\begin{aligned} L_r &= -\frac{16\pi^2 c r^4}{\kappa}\frac{dP_{\rm rad}}{dM_r} \\ &= -\frac{16\pi^2 c r^4}{\kappa}(1-\beta)\frac{dP}{dM_r} \\ &= \frac{4\pi c G M_r}{\kappa}(1-\beta) \end{aligned} \tag{8.60}$$

これにより、輻射光度には或る上限値がある事が判る。即ち、

$$L \le L_{\rm crit} \equiv \frac{4\pi c G M_r}{\kappa} \tag{8.61}$$

等号は $\beta = 0$ で成立するが、$\beta = 0$ の場合は輻射圧だけで支える極限の場合である。

8.3.6　質量光度関係

星の光度は質量の何乗ぐらいで変わっているだろうか？ 星の質量と光度の関係を導いてみよう。臨界光度に近い高温大質量星の場合、$1-\beta \simeq 1$ ゆえ

$$L \sim \left(\frac{L_{\rm crit}}{M}\right) M \tag{8.62}$$

となり、光度は星の質量の 1 乗に比例する。

一方ガス圧が主になる中質量星、低質量星では、前に導いたように、

$$L \sim \frac{2\pi^2}{3}\frac{acG^4}{(\mathcal{R}/\mu)^4}\frac{M^3}{\kappa} \tag{8.63}$$

となり、吸収係数に依存する。中質量星の場合には吸収係数としては電子散乱が主たる寄与をしており、κ は 温度によらない。従って、光度は星の質量の 3 乗に比例する。一方、低質量星では 吸収係数へは Kramers の項の寄与が大きい。そこで

$$\begin{aligned} \kappa &\sim \rho T^{-3.5} \\ &\sim \frac{M}{R^3}\left(\frac{M}{R}\right)^{-3.5} \\ &\sim M^{-2.5} R^{0.5} \end{aligned} \tag{8.64}$$

よって

$$L \propto R^{-0.5} M^{5.5} \tag{8.65}$$

となり、光度は星の質量の 5.5 乗に比例する。

8.3.7 現実的な恒星内部構造の解法の方針

恒星内部を記述する 4 本の微分方程式を、中心及び表面でのそれぞれ 2 本ずつ計 4 本の境界条件とともに、数値的に解く。中心と表面からそれぞれ数値積分をはじめ、ある適当な所で両者がフィットするようにする。星の中心から外に向かって積分していくとしたら二つの物理量 $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ がパラメーターとして残る。星の表面から内に向かって積分していくとしたら二つの物理量 R, L がパラメーターとして残る。解がフィットするようなパラメーター $(P_{\rm c}, T_{\rm c}, R, L)$ を捜す事になる。

星としては $2 - 15\ M_\odot$ の主系列星を考えることにしよう。そこで状態方程式としては理想気体と輻射を考えて

$$\begin{aligned} P &= P_{\rm gas} + P_{\rm rad} \\ &= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho T + \frac{a}{3}T^4 \end{aligned} \tag{8.66}$$

ここに μ は

$$\mu^{-1} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \tag{8.67}$$

で、平均分子量。また $\mathcal{R} \equiv k/m_{\rm H}$ で、a は

$$a = 7.565 \times 10^{-16} \quad {\rm J \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}} \tag{8.68}$$

で radiation constant。吸収係数としては Kramers + 電子散乱 を考え

$$\kappa = \kappa_0 Z(1+X)\rho T^{-3.5} + 0.019(1+X) \tag{8.69}$$

$$\kappa_0 = 4.34 \times 10^{24} \quad {\rm m^2 \cdot kg^{-1}} \tag{8.70}$$

とする。核反応生成率は CNO-cycle を考え

$$\varepsilon_{\rm CNO} = \varepsilon_0 \rho X X_{\rm CNO} T^{16} \tag{8.71}$$

$$\varepsilon_0 = 8 \times 10^{-118} \quad {\rm W \cdot kg^{-1}} \tag{8.72}$$

とする。

8.3.8 ステップ 1 : 中心からの積分

$M = 3M_\odot$、$M = 5M_\odot$、$M = 7M_\odot$、$M = 10M_\odot$ の星の Zero-Age Main-Sequence 時のモデルを計算してみよう。星が Zero-Age Main-Sequence に達した時は、それに先立つ林-フェーズにおけ

る星全体に及ぶ対流の結果、化学組成は一様になっていると考えられる。そこで化学組成一様な星のモデルを計算する。$X = 0.75$, $Z = 0.02$ としよう。最初のステップとして中心からの積分を行う。二つの物理量 $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ がパラメーターとして残る。積分は Runge-Kutta 法で行う。中心近傍での物理量は

$$M_r \simeq \frac{4\pi}{3}\rho_{\rm c} r^3 \tag{8.73}$$

$$P \simeq P_{\rm c} - \frac{2\pi}{3} G\rho_{\rm c}^2 r^2 \tag{8.74}$$

$$L_r \simeq \frac{4\pi}{3}\rho_{\rm c} r^3 \varepsilon_{\rm c} \tag{8.75}$$

$$T \simeq \begin{cases} T_{\rm c} - \frac{\kappa_{\rm c}\varepsilon_{\rm c}\rho_{\rm c}^2}{8acT_{\rm c}^3} r^2 & \text{if radiative} \\ T_{\rm c} - \frac{2\pi}{3} G \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T_{\rm c}}{P_{\rm c}} \rho_{\rm c}^2 r^2 & \text{if convective} \end{cases} \tag{8.76}$$

パラメーター $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ の現実的な値としては、前回計算を行ったポリトロープ球から得られる値を用いると良いだろう。(後で行う表面からの積分の解と fitting point で解がフィットするようなパラメーターを捜さなければならないので、パラメーターを任意に変えられるようなプログラムを書く必要がある[1] 。)

8.3.9　問題：中心近傍での解の振舞

中心近傍での解の振舞を議論せよ。

8.3.10　ステップ 2 ：表面からの積分

次のステップとして表面からの積分を行う。二つの物理量 (L, R) がパラメーターとして残る。独立変数として M_r を用いるのが良いだろう。積分は 前回同様 Runge-Kutta 法で行う。

今考えているような $M = 3M_\odot$、$M = 5M_\odot$、$M = 7M_\odot$、$M = 10M_\odot$ の星では、エネルギーは中心近傍では対流で運ばれ、外側では輻射で運ばれる。そこで radiative envelope を考える。すると

$$\frac{dP}{dT} = \frac{16\pi acGM_r}{3L_r}\frac{T^3}{\kappa} \tag{8.77}$$

だが、表面近傍では $M_r \simeq M$ $L_r = L$ なので、上の式は

$$\frac{dP}{dT} \simeq \frac{16\pi acGM}{3L}\frac{T^3}{\kappa} \tag{8.78}$$

となる。ここで opacity を

$$\kappa = \tilde{\kappa_0} P^\alpha T^\gamma \tag{8.79}$$

[1] サンプルプログラムとして、http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/core.for を挙げておく。

とすると、上の式は更に

$$P^{\alpha}dP = \frac{A}{\tilde{\kappa_0}}T^{3-\gamma}dT \tag{8.80}$$

となるから、この式を積分して

$$P^{1+\alpha} - P_{\rm e}^{1+\alpha} = \frac{A}{\tilde{\kappa_0}}\frac{1+\alpha}{4-\gamma}(T^{4-\gamma} - T_{\rm e}^{4-\gamma}) \tag{8.81}$$

を得る。但し、ここで

$$A \equiv \frac{16\pi acGM}{3L} \tag{8.82}$$

であり、P、T の表面での値をそれぞれ $P_{\rm e}$、$T_{\rm e}$ とした。もし $1+\alpha > 0$ 且つ $4-\gamma > 0$ であれば、上記 P-T 関係は表面での値 $P_{\rm e}$、$T_{\rm e}$ に殆ど依存しなくなる。実際 Kramers' opacity では $\alpha = 1$、$\gamma = -4.5$ でこの条件を満たす。そこで、ここでは、星の表面 $(M_r = M)$ では $P = 0$、 $T = 0$ とする。Kramers' opacity を採用すると、

$$P \sim \sqrt{\frac{1}{4.25}\frac{A}{\tilde{\kappa_0}}}T^{4.25} \tag{8.83}$$

となる。そこで表面領域では解くべき方程式は

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \tag{8.84}$$

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{\mathcal{R}T}{4\pi r^2 \mu P} \tag{8.85}$$

$$\frac{dL_r}{dM_r} = 0 \tag{8.86}$$

$$\frac{dT}{dM_r} = -\frac{3\kappa_0\mu}{64\pi^2 ac\mathcal{R}}Z(1+X)LT^{-7.5}PR^{-4} \tag{8.87}$$

となる。これらを $M_r = M$ から内側に積分していく。初期値として、$M_r = M$ で $P = T = 0$。そこでの L 及び $r(\equiv R)$ が二つの自由パラメーターになる。

パラメーター (L, R) の現実的な値としては、ポリトロープ球から得られる値を用いると良いだろう。(いずれにせよ、前回行った中心からの積分の解と fitting point で解がフィットするようなパラメーターを捜さなければならないので、パラメーターを任意に変えられるようなプログラムを書く必要がある[2] 。)

8.3.11 問題：表面近傍の温度構造

表面近傍では温度は

$$T \simeq \frac{1}{4.25}\frac{\mu}{\mathcal{R}}GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \tag{8.88}$$

で良く近似できる事を導け。

[2] サンプルプログラムとして、http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/envelope.for を挙げておく。

8.3.12　ステップ 3 ：中心からの積分と表面からの積分のフィッティング

中心と表面からそれぞれ数値積分をはじめ、ある適当な所で両者がフィットするようにする。中心からの積分は二つの物理量 $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ をパラメーターとして行った。この時、ある適当なフィッティングポイント (例えば $M_r = 0.7M$) での 4 変数の値 (これらを $T_{\rm i}$, $P_{\rm i}$, $r_{\rm i}$, $L_{\rm i}$ と記そう。) は $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ の関数になっている。

$$T_{\rm i} = T_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) \tag{8.89}$$

$$P_{\rm i} = P_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) \tag{8.90}$$

$$r_{\rm i} = r_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) \tag{8.91}$$

$$L_{\rm i} = L_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) \tag{8.92}$$

同様にして、ある適当なフィッティングポイント (例えば $M_r = 0.7M$) での表面から積分してきた 4 変数 (これらを $T_{\rm e}$, $P_{\rm e}$, $r_{\rm e}$, $L_{\rm e}$ と記そう。) の値は (L, R) の関数になっている。

$$T_{\rm e} = T_{\rm e}(L, R) \tag{8.93}$$

$$P_{\rm e} = P_{\rm e}(L, R) \tag{8.94}$$

$$r_{\rm e} = r_{\rm e}(L, R) \tag{8.95}$$

$$L_{\rm e} = L_{\rm e}(L, R) \tag{8.96}$$

両者が一致する必要が条件は

$$T_{\rm i} = T_{\rm e} \tag{8.97}$$

$$P_{\rm i} = P_{\rm e} \tag{8.98}$$

$$r_{\rm i} = r_{\rm e} \tag{8.99}$$

$$L_{\rm i} = L_{\rm e} \tag{8.100}$$

だが、任意に選んだ $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$, (L, R) に対してはこの条件は満たされない。この条件を満たす $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$, (L, R) を $(\bar{P_{\rm c}}, \bar{T_{\rm c}})$, $(\bar{L}, \bar{R})$ とし、その時のフィティングポイントでの (T, P, r, L) の値を $(\bar{T}, \bar{P}, \bar{r}, \bar{L})$ とし、前に用いた $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$, (L, R) との差を δ で表わすことにする。今、前に用いた $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$, (L, R) がかなり $(\bar{P_{\rm c}}, \bar{T_{\rm c}})$, $(\bar{L}, \bar{R})$ に近いとすると、フィティングの条件は、δ の一次の範囲では

$$T_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) + \frac{\partial T_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}\delta P_{\rm c} + \frac{\partial T_{\rm i}}{\partial T_{\rm c}}\delta T_{\rm c} = T_{\rm e}(L, R) + \frac{\partial T_{\rm e}}{\partial L}\delta L + \frac{\partial T_{\rm e}}{\partial R}\delta R \tag{8.101}$$

$$P_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) + \frac{\partial P_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}\delta P_{\rm c} + \frac{\partial P_{\rm i}}{\partial T_{\rm c}}\delta T_{\rm c} = P_{\rm e}(L, R) + \frac{\partial P_{\rm e}}{\partial L}\delta L + \frac{\partial P_{\rm e}}{\partial R}\delta R \tag{8.102}$$

$$r_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) + \frac{\partial r_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}\delta P_{\rm c} + \frac{\partial r_{\rm i}}{\partial T_{\rm c}}\delta T_{\rm c} = r_{\rm e}(L, R) + \frac{\partial r_{\rm e}}{\partial L}\delta L + \frac{\partial r_{\rm e}}{\partial R}\delta R \tag{8.103}$$

$$L_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) + \frac{\partial L_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}\delta P_{\rm c} + \frac{\partial L_{\rm i}}{\partial T_{\rm c}}\delta T_{\rm c} = L_{\rm e}(L, R) + \frac{\partial L_{\rm e}}{\partial L}\delta L + \frac{\partial L_{\rm e}}{\partial R}\delta R \tag{8.104}$$

となる。ここで微分係数 $\frac{\partial T_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}$ などは、フィティングポイントでの $T_{\rm i}$ の値のパラメーター $P_{\rm c}$ に対する依存性で、これらは数値的に調べる事が出来る。従って、上の 4 本の式は、$(\delta P_{\rm c}, \delta T_{\rm c}, \delta L, \delta R)$ を 4 つの未知変数とする代数方程式と見做す事が出来る[3] 。

これを解いて最初に用いたパラメーター $(P_{\rm c}, T_{\rm c}, L, R)$ に対する補正量 $(\delta P_{\rm c}, \delta T_{\rm c}, \delta L, \delta R)$ を求める。このプロセスを繰り返し、収束するまで行えばフィティングする解が求められた事になる。

8.4 Henyey 法

星の内部構造を解く問題は、非線形の境界値問題であることを既に述べた。主系列近傍の恒星の内部構造は、フィッティング法で解けた。1960 年代に恒星進化の理論は、主系列から赤色巨星への進化を追うようになったが、赤色巨星になると、表面での境界値に対する依存性が鈍くなって、フィッティング法では上手く解くことが出来なくなっていた。こういった状況をブレークしたのは、カリフォルニア大学の Henyey であった。彼は、一種の relaxation method で代数方程式を解くことに成功したのである[4] 。この方法は、一般の 2 点境界値問題に適用出来る方法で、天文学の社会では、Henyey 法と呼ばれている。以下に、この Henyey 法を解説しよう[5] 。

問題とする微分方程式を

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_j) \qquad i, j = 1, \cdots, 4 \tag{8.105}$$

とする。独立変数 x の領域を N メッシュに切って、微分方程式を差分方程式に書き換え、これを数値的に解くことを考える。元の微分方程式を 4 階の微分方程式だとすると、計 $4(N-1)$ 本の差分方程式となる。これらは 4 つの変数 y_i $(i = 1, \cdots, 4)$ の N 個のメッシュそれぞれでの値、合計 $4N$ 個の未知数、$y_i(x_n)$、の代数方程式と見なすことができる。未知数の数と方程式の数が合わない？このままでは、その通り。しかし、境界条件があることをお忘れなく。内側の境界に境界条件が 2 本、外側の境界にも 2 本、合計 4 本の境界条件の式があるので、方程式の数は合計 $4N$ 本になって、未知数の数と同じになり、代数方程式は原理的に解けるのである。ただ、これは「原理的に」である。この方程式が非線形であれば、そのまま解くのが容易でないのは明らかであり、線形であったとしても、実際に数値的に解けるかどうかは、N による。実際的には、$N = 1000$ とすると、4000 元の代数方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{8.106}$$

を解かねばならないことになり、これを直接、4000×4000 の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を計算して

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{8.107}$$

とするのは、実際的ではない。4000×4000 もの大行列の逆行列を求めるのが困難だからである。

従属変数 y_i の $x = x_n$ での値であることを表わすのに、上付き添え字 n をつけて y_i^n で表わすことにする：

$$y_i^n = y_i(x_n). \tag{8.108}$$

[3] サンプルプログラムとして、http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/dinv.for を挙げておく。
[4] Henyey, L. G., Forbes, J. E. and Gould, N. L. 1964, ApJ, 139, 164
[5] 参考書として、Kippenhahn, R., Weigert, A. and Hoffmeister, E. 1967, in Methods in Computational Physics, ed. B. Alder, S. Fernbach and M. Rotenberg (Academic Press, New York), p. 129 を挙げておこう。

微分を差分に置き換えると、(8.105) 式は

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\Delta x}=\frac{1}{2}[f_i(y_j^{n+1})+f_i(y_j^n)];\quad i,j=1,\cdots,4;\quad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{8.109}$$

となる。但し、

$$\Delta x=x_{n+1}-x_n;\quad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{8.110}$$

である。中心と表面での境界条件を、それぞれ、

$$g_l(y_j^1)=0;\quad l=1,2;\quad j=1,\cdots,4 \tag{8.111}$$

と

$$g_l(y_j^N)=0;\quad l=3,4;\quad j=1,\cdots,4 \tag{8.112}$$

としよう。

8.4.1　線形化

このままでは、方程式系は非線形である。推定値からのずれを取り扱うことにして、問題を線形化しよう。即ち、真の解 y_i についての推定値を $\bar{y}_i$ として、真の値からのずれを δy_i とする：

$$y_i^n=\bar{y}_i^n+\delta y_i^n;\quad i=1,\cdots,4;\quad n=1,2,\cdots,N. \tag{8.113}$$

(8.113) 式を (8.109), (8.111), 及び (8.112) 式に代入して、δy_i^n の 2 次以上の項を無視すると、次の $4N$ 本の式を得る：

$$\bar{y}_i^{n+1}+\delta y_i^{n+1}-\bar{y}_i^n-\delta y_i^n=\frac{\Delta x}{2}\left[f_i(\bar{y}_j^{n+1})+\sum_{j=1}^4\frac{\partial f_i(\bar{y}_j^{n+1})}{\partial \bar{y}_j^{n+1}}+f_i(\bar{y}_j^n)+\sum_{j=1}^4\frac{\partial f_i(\bar{y}_j^n)}{\partial \bar{y}_j^n}\right];\quad i=1,\cdots,4, \tag{8.114}$$

$$g_l(\bar{y}_j^1)+\sum_{j=1}^4\frac{\partial g_l(\bar{y}_j^1)}{\partial \bar{y}_j^1}=0;\quad l=1,2, \tag{8.115}$$

$$g_l(\bar{y}_j^N)+\sum_{j=1}^4\frac{\partial g_l(\bar{y}_j^N)}{\partial \bar{y}_j^N}=0;\quad l=3,4. \tag{8.116}$$

整理すると、

$$\sum_{j=1}^4 A_{ij}^n\delta y_j^n+\sum_{j=1}^4 B_{ij}^n\delta y_j^{n+1}+d_i^n=0;\quad i=1,\cdots,4;\quad n=1,2,\cdots,N-1, \tag{8.117}$$

$$\sum_{j=1}^4 G_{lj}^1\delta y_j^1+\bar{g}_l^1=0;\quad l=1,2, \tag{8.118}$$

それに

$$\sum_{j=1}^{4} G_{lj}^N \delta y_j^N + \bar{g}_l^N = 0; \quad l = 3, 4, \tag{8.119}$$

但し、ここに

$$A_{ij}^n = \frac{\Delta x^n}{2} F_{ij}^n + \delta_{ij}, \tag{8.120}$$

$$B_{ij}^n = \frac{\Delta x^n}{2} F_{ij}^{n+1} - \delta_{ij}, \tag{8.121}$$

$$\bar{d}_i^n = -(\bar{y}_i^{n+1} - \bar{y}_i^n) + \frac{\Delta x}{2}[\bar{f}_i^{n+1} + \bar{f}_i^n] \tag{8.122}$$

であり、δ_{ij} は Kronecker のデルタを表す。また、

$$\bar{f}_i^n \equiv f_i(\bar{y}_j^n); \quad i, j = 1, \cdots, 4; \quad n = 1, 2, \cdots, N, \tag{8.123}$$

$$\bar{g}_l^1 \equiv g_l(\bar{y}_j^1); \quad l = 1, 2; \quad j = 1, \cdots, 4, \tag{8.124}$$

$$\bar{g}_l^N \equiv g_l(\bar{y}_j^N); \quad l = 3, 4; \quad j = 1, \cdots, 4, \tag{8.125}$$

$$F_{ij}^n = \frac{\partial \bar{f}_i^n}{\partial \bar{y}_j^n}; \quad i, j = 1, \cdots, 4; \quad n = 1, 2, \cdots, N, \tag{8.126}$$

$$G_{lj}^1 = \frac{\partial \bar{g}_l^1}{\partial \bar{y}_j^1}; \quad l = 1, 2; \quad i = 1, \cdots, 4, \tag{8.127}$$

$$G_{lj}^N = \frac{\partial \bar{g}_l^N}{\partial \bar{y}_j^N}; \quad l = 3, 4; \quad i = 1, \cdots, 4 \tag{8.128}$$

で定義する。

8.4.2 係数行列は帯行列

方程式 (8.117)–(8.119) は、$4N$ 個の未知変数 δy_i^n に関する線形方程式である。一見したところ、この方程式系は大行列を要し、解くことが出来ないと思えるかも知れない。しかし、係数行列の要素の多くはゼロである。実際、$\boldsymbol{A}_n \equiv \{A_{ij}^n\}$、$\boldsymbol{B}_n \equiv \{B_{ij}^n\}$、$\boldsymbol{G}_1 \equiv \{G_{lj}^1\}$、$\boldsymbol{G}_N \equiv \{G_{lj}^N\}$、$\boldsymbol{\delta y}_n \equiv \{\delta y_i^n\}$ 等と記して、方程式 (8.117)–(8.119) を行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{A}_{N-1} & \boldsymbol{B}_{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boldsymbol{G}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta y}_1 \\ \boldsymbol{\delta y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta y}_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{g}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{d}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{d}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{d}}_{N-1} \\ \bar{\boldsymbol{g}}_N \end{pmatrix} \tag{8.129}$$

になり、左辺の $4N \times 4N$ の係数行列の対角帯以外はゼロである。Henyey 法は、この特質を有効に利用するのである。

8.4.3　帯行列を区分化して解く：漸化式

まず、2 本の中心での境界条件の式 (8.118) と、最初の差分方程式 (8.117) のうちから 2 本 ($i = 1, 2$) をセットにして考える。この 4 本の式は次の様に表される：

$$(\boldsymbol{P}_1)\begin{pmatrix}\delta y_1^1\\ \delta y_2^1\\ \delta y_3^1\\ \delta y_4^1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{Q}_1)\begin{pmatrix}\delta y_1^2\\ \delta y_2^2\\ \delta y_3^2\\ \delta y_4^2\end{pmatrix} + (\boldsymbol{q}_1). \tag{8.130}$$

ここに

$$(\boldsymbol{P}_1) = \begin{pmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{13}^1 & G_{14}^1\\ G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{23}^1 & G_{24}^1\\ A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & A_{14}^1\\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & A_{24}^1\end{pmatrix}, \tag{8.131}$$

$$(\boldsymbol{Q}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -B_{11}^1 & -B_{12}^1 & -B_{13}^1 & -B_{14}^1\\ -B_{21}^2 & -B_{22}^2 & -B_{23}^2 & -B_{24}^2\end{pmatrix}, \tag{8.132}$$

$$(\boldsymbol{q}_1) = \begin{pmatrix} -\bar{g}_1^1\\ -\bar{g}_2^1\\ -\bar{d}_1^1\\ -\bar{d}_2^1\end{pmatrix} \tag{8.133}$$

である。この 4 本の方程式は、8 個の未知変数 δy_i^1、δy_i^2 $(i = 1, \cdots, 4)$ を含むから、4 個の変数は、残り 4 個の変数の線形従属として表すことが出来る。即ち、

$$\begin{pmatrix}\delta y_1^1\\ \delta y_2^1\\ \delta y_3^1\\ \delta y_4^1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{R}_1)\begin{pmatrix}\delta y_1^2\\ \delta y_2^2\\ \delta y_3^2\\ \delta y_4^2\end{pmatrix} + (\boldsymbol{r}_1), \tag{8.134}$$

但し、ここに

$$(\boldsymbol{R}_1) = (\boldsymbol{P}_1)^{-1}(\boldsymbol{Q}_1), \tag{8.135}$$

$$(\boldsymbol{r}_1) = (\boldsymbol{P}_1)^{-1}(\boldsymbol{q}_1) \tag{8.136}$$

であり、$(\boldsymbol{P}_1)^{-1}$ は $(\boldsymbol{P}_1)$ の逆行列を表す。(8.134) 式は、一旦 $\boldsymbol{\delta y}_2$ が求まれば、$\boldsymbol{\delta y}_1$ が求められることを意味している。

次に、$n = 1$ の (8.117) 式の残りの 2 本 $(i = 3, 4)$ と、$n = 2$ の (8.117) 式の最初の 2 本 $(i = 1, 2)$ のセットを考える。このセットは

$$(\boldsymbol{S}_1)\begin{pmatrix}\delta y_1^1\\ \delta y_2^1\\ \delta y_3^1\\ \delta y_4^1\end{pmatrix} + (\boldsymbol{P}_2)\begin{pmatrix}\delta y_1^2\\ \delta y_2^2\\ \delta y_3^2\\ \delta y_4^2\end{pmatrix} = (\boldsymbol{Q}_2)\begin{pmatrix}\delta y_1^3\\ \delta y_2^3\\ \delta y_3^3\\ \delta y_4^3\end{pmatrix} + (\boldsymbol{q}_2), \tag{8.137}$$

と表される。但し、ここで

$$(\boldsymbol{S}_1) = \begin{pmatrix} A^1_{31} & A^1_{32} & A^1_{33} & A^1_{34} \\ A^2_{41} & A^2_{42} & A^2_{43} & A^2_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.138}$$

$$(\boldsymbol{P}_2) = \begin{pmatrix} B^1_{31} & B^1_{32} & B^1_{33} & B^1_{34} \\ B^1_{41} & B^1_{42} & B^1_{43} & B^1_{44} \\ A^2_{11} & A^2_{12} & A^2_{13} & A^2_{14} \\ A^2_{21} & A^2_{22} & A^2_{23} & A^2_{24} \end{pmatrix}, \tag{8.139}$$

$$(\boldsymbol{Q}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B^2_{11} & -B^2_{12} & -B^2_{13} & -B^2_{14} \\ -B^2_{21} & -B^2_{22} & -B^2_{23} & -B^2_{24} \end{pmatrix}, \tag{8.140}$$

それに

$$(\boldsymbol{q}_2) = \begin{pmatrix} -\bar{d}^1_3 \\ -\bar{d}^1_4 \\ -\bar{d}^2_1 \\ -\bar{d}^2_2 \end{pmatrix} \tag{8.141}$$

である。(8.134) 式を (8.137) 式に代入して、

$$\begin{pmatrix} \delta y^2_1 \\ \delta y^2_2 \\ \delta y^2_3 \\ \delta y^2_4 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{R}_2) \begin{pmatrix} \delta y^3_1 \\ \delta y^3_2 \\ \delta y^3_3 \\ \delta y^3_4 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{r}_2), \tag{8.142}$$

を得る。但し、ここで、行列 $(\boldsymbol{R}_2)$ と $(\boldsymbol{r}_2)$ は

$$(\boldsymbol{R}_2) = \left[(\boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{R}_1) + (\boldsymbol{P}_2)\right]^{-1} (\boldsymbol{Q}_2), \tag{8.143}$$

$$(\boldsymbol{r}_2) = \left[(\boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{R}_1) + (\boldsymbol{P}_2)\right]^{-1} \left[(\boldsymbol{q}_2) - (\boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{r}_1)\right] \tag{8.144}$$

で定義する。

(8.142) 式は

$$\begin{pmatrix} \delta y^n_1 \\ \delta y^n_2 \\ \delta y^n_3 \\ \delta y^n_4 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{R}_n) \begin{pmatrix} \delta y^{n+1}_1 \\ \delta y^{n+1}_2 \\ \delta y^{n+1}_3 \\ \delta y^{n+1}_4 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{r}_n); \quad n = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{8.145}$$

と一般化した漸化式に書くことが出来る。但し、

$$(\boldsymbol{R}_n) = \left[(\boldsymbol{S}_{n-1})(\boldsymbol{R}_{n-1}) + (\boldsymbol{P}_n)\right]^{-1} (\boldsymbol{Q}_n), \tag{8.146}$$

$$(\boldsymbol{r}_n) = \left[(\boldsymbol{S}_{n-1})(\boldsymbol{R}_{n-1}) + (\boldsymbol{P}_n)\right]^{-1} \left[(\boldsymbol{q}_n) - (\boldsymbol{S}_{n-1})(\boldsymbol{r}_{n-1})\right], \tag{8.147}$$

であり、

$$(\boldsymbol{S}_{n-1}) = \begin{pmatrix} A_{31}^{n-1} & A_{32}^{n-1} & A_{33}^{n-1} & A_{34}^{n-1} \\ A_{41}^{n-1} & A_{42}^{n-1} & A_{43}^{n-1} & A_{44}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.148}$$

$$(\boldsymbol{P}_n) = \begin{pmatrix} B_{31}^{n-1} & B_{32}^{n-1} & B_{33}^{n-1} & B_{34}^{n-1} \\ B_{41}^{n-1} & B_{42}^{n-1} & B_{43}^{n-1} & B_{44}^{n-1} \\ A_{11}^{n} & A_{12}^{n} & A_{13}^{n} & A_{14}^{n} \\ A_{21}^{n} & A_{22}^{n} & A_{23}^{n} & A_{24}^{n} \end{pmatrix}, \tag{8.149}$$

$$(\boldsymbol{Q}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{11}^{n} & -B_{12}^{n} & -B_{13}^{n} & -B_{14}^{n} \\ -B_{21}^{n} & -B_{22}^{n} & -B_{23}^{n} & -B_{24}^{n} \end{pmatrix}, \tag{8.150}$$

それに

$$(\boldsymbol{q}_n) = \begin{pmatrix} -\bar{d}_3^{n-1} \\ -\bar{d}_4^{n-1} \\ -\bar{d}_1^{n} \\ -\bar{d}_2^{n} \end{pmatrix} \tag{8.151}$$

である。

8.4.4　帯行列を区分化して解く：後退代入

(8.145) 式は、一旦 $\boldsymbol{\delta y}_{n+1}$ が求まれば、$\boldsymbol{\delta y}_n$ が求められることを意味している。問題をいつまでも先送りしているだけの様に見えるかもしれないが、そうではない。

一番外側のメッシュ点 $n = N$ では、$n = N - 1$ での (8.117) 式の残りの 2 本の式と表面での 2 本の境界条件 (8.112) 式とで

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \begin{pmatrix} \delta y_1^{N-1} \\ \delta y_2^{N-1} \\ \delta y_3^{N-1} \\ \delta y_4^{N-1} \end{pmatrix} + (\boldsymbol{\Pi}) \begin{pmatrix} \delta y_1^{N} \\ \delta y_2^{N} \\ \delta y_3^{N} \\ \delta y_4^{N} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}), \tag{8.152}$$

を得る。但し、ここで、

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} A_{31}^{N-1} & A_{32}^{N-1} & A_{33}^{N-1} & A_{34}^{N-1} \\ A_{41}^{N-1} & A_{42}^{N-1} & A_{43}^{N-1} & A_{44}^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.153}$$

$$(\boldsymbol{\Pi}) = \begin{pmatrix} B_{31}^{N-1} & B_{32}^{N-1} & B_{33}^{N-1} & B_{34}^{N-1} \\ B_{41}^{N-1} & B_{42}^{N-1} & B_{43}^{N-1} & B_{44}^{N-1} \\ G_{31}^{N} & G_{32}^{N} & G_{33}^{N} & G_{34}^{N} \\ G_{41}^{N} & G_{42}^{N} & G_{43}^{N} & G_{44}^{N} \end{pmatrix}, \tag{8.154}$$

それに

$$(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} -\bar{d}_3^{N-1} \\ -\bar{d}_4^{N-1} \\ -\bar{g}_3^N \\ -\bar{g}_4^N \end{pmatrix} \tag{8.155}$$

である。$n = N-1$ の (8.145) 式を (8.152) 式に代入すれば、4 次の正方行列 $(\boldsymbol{Z})$

$$(\boldsymbol{Z}) \equiv [(\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{R}_{N-1}) + (\boldsymbol{\Pi})] \tag{8.156}$$

と列ベクトル $(\boldsymbol{c})$

$$(\boldsymbol{c}) \equiv [(\boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{r}_{N-1})] \tag{8.157}$$

を使って、

$$(\boldsymbol{Z}) \begin{pmatrix} \delta y_1^N \\ \delta y_2^N \\ \delta y_3^N \\ \delta y_I^N \end{pmatrix} = (\boldsymbol{c}) \tag{8.158}$$

となるが、$(\boldsymbol{Z})$ の逆行列を (8.158) 式にあてがえば、

$$\begin{pmatrix} \delta y_1^N \\ \delta y_2^N \\ \delta y_3^N \\ \delta y_I^N \end{pmatrix} = (\boldsymbol{Z})^{-1}(\boldsymbol{c}). \tag{8.159}$$

を得る。こうして、ここにきて、一番外側のメッシュ点での解 δy_i^N $(i = 1, \cdots, 4)$ が求められるのである。一旦、δy_i^N が決まれば、これを $n = N-1$ に対する (8.145) 式に代入すれば、$n = N-1$ についての解 δy_i^n を得る。同様の操作を繰り返し、解 δy_i^n が順次得られる寸法だ。δy_i^n が充分小さくなるまで補正を繰り返してやれば、逐次解を得ることが出来る。

8.4.5 Henyey 法の利点

こうして、非線形常微分方程式の境界値問題を、推定した解の近傍で線形化して、解くことが出来ることが判ったと思う。線形化した点が、Henyey 法の真髄ではない。線形化して得た、方程式 (8.129) を、左辺の大きい係数行列の逆行列を求めるのが困難なところを、小行列に区分化して、解いていった点が本質なのである。元の係数行列は $4N \times 4N$ 次であった。それに対して、Henyey 法では 4×4 の区分行列を N 回取り扱うのである。行列の演算は、行列の次元の二乗に比例するから、元の係数行列そのものの逆行列演算は $16N^2$ に比例するのに対し、Henyey 法では、$16N$ にしか比例しない。従って、N が大きくなるにつれて、Henyey 法の優越性が顕著となる。

第 9 章　常微分方程式の数値解法：固有値問題

9.1　フィッティング法

境界値問題の中でも固有値問題は様々な物理的問題で登場する。古典物理の問題での弦の振動の問題や、量子力学の（定常状態に対する）Schrödinger 方程式を思い浮かべれば、その事は明らかであろう。波動方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 \tag{9.1}$$

を、$x = 0$ で $y = 0$，$x = L$ で $y = 0$ という条件の下に解く事を考える。適当な固有値 k^2 を仮定すると、この問題は前のセクションで扱った境界値問題として扱う事が出来る。すなわち、$x = 0$ での dy/dx を与えて、$x = 0$ から $x = L$ まで、初期値問題として積分していき、$y(x = L)$ が 0 になるかどうかを見れば良い。任意の k^2 に対して、$y(L) = 0$ は満たされず、特定の k^2 の値の場合のみ、$y(L) = 0$ が満たされる。丁度 $y(x = L) = 0$ を満たすとき、その仮定した k^2 は固有値であり、解 $y(x)$ が固有関数である。固有値問題では、解の形は固有解としてユニークに決まるが、解の絶対値は不定なので規格化の自由度が残る。$x = 0$ での dy/dx を自由に与える事は、規格化を自由にしている事に対応する。

9.1.1　問題

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 \tag{9.2}$$

を、$x = 0$ で $y = 0$，$x = \pi$ で $y = 0$ という条件の下に数値的に解け。

9.2　固有値問題としての Lane-Emden 方程式

Lane-Emden 方程式 (7.35) を固有値問題として解いてみよう。$y = \theta$，$z = dy/d\xi$ に対して、Lane-Emden 方程式は

$$dy/d\xi = z \tag{9.3}$$

$$dz/d\xi = -y^N - \frac{2}{\xi} z \tag{9.4}$$

となる。境界条件は、$\xi = 0$ で $y = 1$ であり、どこか判っていない或る $\xi_{\rm s}$ で $y = 0$ である。この表面の値 $\xi_{\rm s}$ で ξ を規格化してやれば、ξ の範囲は $[0, 1]$ となる。そこで、独立変数を ξ から

$$x = \xi/\xi_{\rm s} = \xi/\lambda \tag{9.5}$$

で定義する x に変更すると、方程式は

$$dy/dx = \lambda z \tag{9.6}$$

$$dz/dx = -\lambda y^N - \frac{2}{x}z \tag{9.7}$$

となり、境界条件は $x = 0$ で $y = 1$, $x = 1$ で $y = 0$ となる。ここで λ の値が幾つであるか、まだ判っていないが、この λ が特別の値でしか、境界条件を満たせない。そこで、λ は固有値という事になる。

適当なフィッティングポイント $x_{\rm f}$ を設け、中心からフィッティングポイントまでの解は前節で解説した通りの方法で求め、その解に、表面、即ち $x = 1$ から積分してきた解が、このフィッティングポイントで一致するようにすれば良い。$x = 1$ からの積分は、$x = 1$ で $y = 0$ とし、そこでの z の値と λ を与えれば出来る。$x = 0$ からの積分も λ を与えれば出来る。フィッティングポイントでの内側の解と外側の解との差は、従って、$z(x = 1)$ と λ の関数と見做す事が出来る。未知数 2 つに対して、y と z の内側の解と外側の解の差についての 2 本の式があるから、境界値問題として Lane-Emden 方程式を解いたのと同じ要領で、問題を解く事が出来る。

9.2.1　問題

固有値問題として、Lane-Emden 方程式を解け。

9.3　恒星の固有振動

星自身の膨張収縮によって 光度変化をする一群の星 (脈動変光星) がある。HR 図上でセファイド不安定帯と呼ばれるところに位置する δ Cepheid 型, RR Lyrae 型, δ Sct 型変光星や ミラ型変光星などの赤色長周期変光星が古典的な脈動変光星として知られていた。最近二十年ぐらいの間に、白色矮星や、A 型特異星や、ほかならぬ太陽までが非常に小さい振幅ながら脈動している事が判ってきた。従って今では殆ど全ての星が大なり小なりの脈動をしていると考えられている。これらの星の脈動は、それぞれの星の固有振動に他ならない。固有値問題の例として、星の固有振動を解いてみよう。

9.3.1　基本方程式

参考図書：坂下志郎・池内了 著「宇宙流体力学」(培風館)

1. 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9.8}$$

2. 運動方程式

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}=-\nabla p-\rho\nabla\Phi \tag{9.9}$$

3. エネルギーの式

$$\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)S=\rho\epsilon-\nabla\cdot\boldsymbol{F} \tag{9.10}$$

4. ポアソン方程式

$$\nabla^2\Phi=4\pi G\rho \tag{9.11}$$

5. 輻射の式

$$\boldsymbol{F}=-\frac{4ac}{3\kappa\rho}T^3\nabla T \tag{9.12}$$

9.3.2 平衡状態

平衡状態では、時間変動なし、運動なし、即ち $\frac{\partial}{\partial t}\equiv 0$、$\boldsymbol{v}_0\equiv 0$ とすると

1. 運動方程式

$$-\nabla p_0-\rho_0\nabla\Phi_0=0 \tag{9.13}$$

2. エネルギーの式

$$\rho_0\epsilon_0-\nabla\cdot\boldsymbol{F}_0=0 \tag{9.14}$$

3. ポアソン方程式

$$\nabla^2\Phi_0=4\pi G\rho_0 \tag{9.15}$$

4. 輻射の式

$$\boldsymbol{F}_0=-\frac{4ac}{3\kappa_0\rho_0}T_0^3\nabla T_0 \tag{9.16}$$

9.3.3 球対称の場合の平衡状態

特に球対称として、極座標 (r,θ,ϕ) で記述すると

1. 運動方程式

$$\frac{dp}{dr}=-\rho g \tag{9.17}$$

2. 連続の式

$$\frac{dM_r}{dr}=4\pi r^2\rho \tag{9.18}$$

3. エネルギーの式

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{3\kappa\rho}{4ac}\frac{1}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{9.19}$$

4. 重力

$$g = \frac{GM_r}{r^2} \tag{9.20}$$

5. 輻射の式

$$L_r = 4\pi r^2 F_{\rm rad} \tag{9.21}$$

これらは、星の平衡状態を記述する式に他ならない。

9.3.4　Euler 摂動と Lagrange 摂動

星の脈動の振幅は大きくないので、振動を平衡状態からのずれが小さいとして、平衡状態からの線形摂動として取り扱う。摂動には、二つの考え方がある。特定の場所を固定して見る立場と、特定の流体要素に着目してみる立場で、前者は Euler 的摂動であり、後者は Lagrange 的摂動と呼ばれる。

1. Euler 摂動

$$f(\boldsymbol{r}, t) = f_0(\boldsymbol{r}) + f'(\boldsymbol{r}, t) \tag{9.22}$$

2. Lagrange 摂動

$$f(\boldsymbol{r}, t) = f_0(\boldsymbol{r}_0) + \delta f(\boldsymbol{r}_0, t) \tag{9.23}$$

3. 相互の関係

$$\delta f(\boldsymbol{r}, t) = f'(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla f_0(\boldsymbol{r}) \tag{9.24}$$

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \tag{9.25}$$

4. Euler 微分 と Lagrange 微分

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \tag{9.26}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{9.27}$$

5. 速度の Euler 摂動 と Lagrange 摂動

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{dt} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_0 \tag{9.28}$$

9.3.5 線形化した基礎方程式

従って、線形化した基礎方程式を Euler 摂動について書くと

1. 連続の式
$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9.29}$$
2. 運動方程式
$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p' + \rho_0 \nabla \Phi' + \rho' \nabla \Phi_0 = 0 \tag{9.30}$$
3. エネルギーの式
$$\rho_0 T_0 \frac{\partial}{\partial t}(S' + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla S_0) = (\rho\epsilon)' - \nabla \cdot \boldsymbol{F}' \tag{9.31}$$
4. ポアソン方程式
$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \tag{9.32}$$

9.3.6 断熱近似と重力摂動の無視

星の振動の時間尺度は $(GM/R^3)^{-1/2}$ で、例えば太陽の場合、これは約 1 時間のオーダーである。それに対し、熱の出入の時間尺度として $\int c_p T dM_r/L$ を考えると、これは星の表面近くを除けば振動の時間尺度に比べ桁違いに長い。そこで振動は断熱として扱って良い。そこでエネルギーの式は

$$\frac{\delta p}{p} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho} \tag{9.33}$$

となる。ここに γ は断熱指数。

また重力の摂動も無視できるぐらいに小さい場合が殆どである。これは、星の固有振動の多くは、密度の小さい外層で大きく揺れているので、重力に対する効果が小さいためである。そこで、重力の摂動も無視することにする。

すると、基礎方程式は

1. 連続の式
$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9.34}$$
2. 運動方程式
$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p' - \rho' \boldsymbol{g} = 0 \tag{9.35}$$
3. エネルギーの式
$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} + \gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.36}$$

9.3.7　動径振動

振動が球対称を保ったまま行なわれる場合、特に動径振動と称する。前の節で述べてきた解析では、幾つかの近似を行って最後の微分方程式を簡単化したが、動径振動を扱う場合には、厳密な式のままでも、簡単な式になるので、ここでは、以下動径振動を考えよう。Lagrange 摂動で考えると簡単である。変位を δr とすると、連続の式 (9.34) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{(d\delta r)}{dt}\right]=0 \tag{9.37}$$

となる。また、運動方程式 (9.35) は、

$$\begin{aligned}\frac{d^2(\delta r)}{dt^2} &= -\delta(4\pi r^2)\frac{dP}{dM_r}-4\pi r^2\frac{\partial\delta P}{\partial M_r}-\frac{GM_r}{r^2}\left(-2\frac{\delta r}{r}\right)\\ &= 4g\frac{\delta r}{r}-4\pi r^2\frac{\partial\delta P}{\partial M_r}\end{aligned} \tag{9.38}$$

となる。ここで、全ての摂動量の時間依存性を $\exp(i\sigma t)$ に比例するものとすると、結局、連続の式、運動方程式、断熱の式は、

$$\frac{\delta\rho}{\rho}+\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\delta r\right)=0 \tag{9.39}$$

$$-\sigma^2\delta r=4g\frac{\delta r}{r}-4\pi r^2\frac{\partial\delta P}{\partial M_r} \tag{9.40}$$

$$\frac{\delta P}{P}=\gamma\frac{\delta\rho}{\rho} \tag{9.41}$$

となる。ここで、相対変位

$$\xi\equiv\frac{\delta r}{r} \tag{9.42}$$

を定義し、これを使って表すと、連続の式は

$$\frac{\delta\rho}{\rho}=-3\xi-r\frac{d\xi}{dr} \tag{9.43}$$

となる。これを断熱の式に代入して

$$\frac{\delta P}{P}=-\gamma\left(3\xi+r\frac{d\xi}{dr}\right) \tag{9.44}$$

を得るから、これを運動方程式に代入すると、

$$-\sigma^2 r\xi=4g\xi+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dr}\left[\gamma P\left(3\xi+r\frac{d\xi}{dr}\right)\right] \tag{9.45}$$

となる。結局、整理すると、線形断熱動径振動の方程式は

$$\frac{d}{dr}\left[r^4\gamma P\frac{d\xi}{dr}\right]+\xi\left\{\sigma^2\rho r^4+r^3\frac{d}{dr}[(3\gamma-4)P]\right\}=0 \tag{9.46}$$

となった。境界条件は、中心で変位がゼロ、即ち、

$$\delta r = r\xi = 0 \tag{9.47}$$

と、表面が自由境界、即ち、

$$\delta P = -\gamma P \left(3\xi + r\frac{d\xi}{dr}\right) = 0 \tag{9.48}$$

である。上記方程式 (9.46) は、

$$\frac{d}{dr}\left[\alpha(r)\frac{d\xi}{dr}\right] - \beta(r)\xi + \lambda\mu(r)\xi = 0 \tag{9.49}$$

の形であるから、Sturm-Liouville 型の方程式である。係数は

$$\alpha(r) = \gamma P r^4 \tag{9.50}$$

$$\beta(r) = -r^3\frac{d}{dr}[(3\gamma - 4)P] \tag{9.51}$$

$$\mu(r) = \rho r^4 \tag{9.52}$$

に対応し、固有値は

$$\lambda = \sigma^2 \tag{9.53}$$

である。これは固有振動数に他ならない。$0 \leq r \leq R$ で、$\alpha(r) \geq 0$ 且つ $\beta(r) \geq 0$ を満たしている。Sturm-Liouville 型の方程式の特性から、直ちに、固有値 σ^2 は実数の離散固有値であり、下限がある。即ち、

$$\sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \sigma_2^2 < ... \tag{9.54}$$

であり、対応する固有関数 $\xi_0(r)$，$\xi_1(r)$，$\xi_2(r)$，... は節を 0，1，2，... を持ち、固有関数 $\xi_n(r)$ の節は ξ_{n-1} の節の間に各 1 ずつ位置する。また、固有関数は、

$$\int_0^R \xi_i\xi_j\mu(r)dr = \delta_{ij} \tag{9.55}$$

と正規直交系をなし、また、完全系をなす。

密度一様な星

特別な場合として、密度一様な星を考えよう。平衡状態は、

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const.} \tag{9.56}$$

$$M_r = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 \tag{9.57}$$

$$P(r) = \frac{2\pi}{3}G\rho_0^2(R^2 - r^2) \tag{9.58}$$

である。無次元量

$$x \equiv r/R \tag{9.59}$$

$$P_{\rm c} \equiv \frac{2\pi}{3} G\rho_0^2 R^2 \tag{9.60}$$

$$\omega^2 \equiv \frac{\sigma^2}{\frac{4\pi}{3}G\rho_0} \tag{9.61}$$

を導入すると、

$$P = P_{\rm c}(1-x^2) \tag{9.62}$$

であり、方程式 (9.46) は、

$$\frac{d}{dx}\left\{x^4(1-x^2)\frac{d\xi}{dx}\right\} + \alpha x^4 \xi = 0 \tag{9.63}$$

となる。但し、ここに

$$\alpha \equiv \frac{\omega^2 - (3\gamma - 4)}{\gamma/2} \tag{9.64}$$

である。この場合の基本モードは、$\alpha = 0$ の場合である。これは、$\alpha = 0$ ならば、解は $\xi = \text{const.}$ となること明らかであろう。これは、星全体が homologous な振動をすることを意味している。固有値 ω^2 は $\alpha = 0$ より、

$$\omega^2 = 3\gamma - 4 \tag{9.65}$$

であるから、$\gamma > 4/3$ なら $\omega^2 > 0$ で系は安定であり、逆に $\gamma < 4/3$ ならば、$\omega^2 < 0$ で、系は動的に不安定となる。$\gamma = 4/3$ のとき、系は中立である。

陪振動を求めよう。

$$\xi = 1 + ax^2 \tag{9.66}$$

として、(9.63) 式に代入してみると、

$$a = -7/5 \tag{9.67}$$

$$\alpha = 14 \tag{9.68}$$

を得る。対応する ω^2 は、

$$\omega_1^2 = 10\gamma - 4 \tag{9.69}$$

である。熱力学から、常に $\gamma > 1$ であるから、常に $\omega_1^2 > 0$ である。以後同様にして高次の陪振動を求めて行く事が出来る。

9.3.8　ポリトロープ星の動径振動

一般の星の場合でも、$\gamma = 4/3$ のときは、$\sigma^2 = 0$ であり、$\xi(r) = \text{const.}$ となる事は、(9.46) 式から見て取れよう。ただし、それ以外の場合は、数値的に解く必要がある。

以下、$\gamma = \text{const.}$ とする。新たに無次元量

$$q \equiv M_r/M \tag{9.70}$$

と

$$V \equiv -\frac{d\ln P}{d\ln r} \tag{9.71}$$

を導入すると、(9.46) 式は、

$$x^2\frac{d^2\xi}{dx^2} + (4-V)x\frac{d\xi}{dx} + \left[\frac{x^3}{q}\omega^2 - (3\gamma-4)\right]\frac{V}{\gamma}\xi = 0 \tag{9.72}$$

となる。一階二元連立微分方程式にするべく

$$y_1 \equiv \xi \tag{9.73}$$

$$y_2 \equiv \frac{d\xi}{dx} \tag{9.74}$$

を独立変数にすると、(9.46) 式は

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \tag{9.75}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{4-V}{x}y_2 - \left[\frac{x}{q}\omega^2 - \frac{3\gamma-4}{x^2}\right]\frac{V}{\gamma}y_1 \tag{9.76}$$

と表す事が出来る。

方程式は、星の中心 $x=0$ と表面 $x=1$ が特異点となっている。そこで、解を求めるには、これらの近傍で Laurent 展開をしてやらなければならない。ポリトロープの場合、

$$V = -\frac{(N+1)x}{\theta}\frac{d\theta}{dx} \tag{9.77}$$

であり、中心近傍では

$$\theta \sim 1 - \frac{1}{6}x^2 \tag{9.78}$$

$$\frac{d\theta}{dx} \sim -\frac{x}{3} \tag{9.79}$$

だから

$$V \sim (N+1)\left[\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + ...\right] \tag{9.80}$$

となる。 また、

$$M_r = -4\pi\alpha^3\rho_{\rm c}x^2\frac{d\theta}{dx} \tag{9.81}$$

に注意すると

$$q \sim \frac{1}{M}\frac{4\pi}{3}\rho_{\rm c}r^3 = \frac{\rho_{\rm c}}{\bar{\rho}}x^3 \tag{9.82}$$

である。そこで、中心近傍で、

$$\xi \sim \xi_{\rm c}[1 + ax^n] \tag{9.83}$$

とすると、(9.76) 式の左辺は

$$y_2 \sim \xi_{\rm c}anx^{n-1} \tag{9.84}$$

だから、

$$\frac{dy_2}{dx} \sim \xi_{\rm c} an(n-1)x^{n-2} \tag{9.85}$$

であり、一方右辺は

$$\mathrm{RHS} \sim -\xi_{\rm c}\left[4-(N+1)\frac{x^2}{3}\right]anx^{n-2} - \xi_{\rm c}\left[\frac{\bar{\rho}}{\rho_{\rm c}}-(3\gamma-4)\right]\frac{1}{\gamma}\frac{N+1}{3}(1+ax^n) \tag{9.86}$$

である。両辺の x の次数を見ると、最低次は x^0 の項であり、よって、

$$an(n-1)x^{n-2} \sim -[(\bar{\rho}/\rho_{\rm c})\omega^2-(3\gamma-4)]\frac{N+1}{\gamma}x^0 - 4anx^{n-2} \tag{9.87}$$

を得る。これより、

$$n=2 \tag{9.88}$$

$$10a = -[\bar{\rho}/\rho_{\rm c}\omega^2-(3\gamma-4)]\frac{N+1}{3\gamma} \tag{9.89}$$

であるから、結局、解は

$$y_1 \sim \xi_{\rm c}\left\{1+\frac{1}{10}[\bar{\rho}/\rho_{\rm c}\omega^2-(3\gamma-4)]\frac{N+1}{3\gamma}x^2\right\} \tag{9.90}$$

$$y_2 \sim \xi_{\rm c}\left\{-\frac{1}{5}[\bar{\rho}/\rho_{\rm c}\omega^2-(3\gamma-4)]\frac{N+1}{3\gamma}x\right\} \tag{9.91}$$

となる。ここで $\xi_{\rm c}$ は未知であることに注意しておこう。

表面近傍の振舞を考えよう。$x\to 1$ で

$$V = -\frac{(N+1)x}{\theta}\frac{d\theta}{dx} \to \infty \tag{9.92}$$

だから、解が正則であるためには、(9.76) 式の右辺で $O(V)$ の項が釣り合う必要がある。そこで、

$$\frac{V}{x}y_2 - \left[\frac{x}{q}\omega^2 - \frac{3\gamma-4}{x^2}\right]\frac{V}{\gamma}y_1 \sim 0 \tag{9.93}$$

であり、よって、$x\to 1$、$q\to 1$ で

$$y_2 \sim [\omega^2-(3\gamma-4)]\frac{1}{\gamma}y_1 \tag{9.94}$$

を得る。これより、表面近傍での解は、表面で $y_1=1$ と規格化すると、

$$y_1 \sim 1-[\omega^2-(3\gamma-4)]\frac{1}{\gamma}(1-x) \tag{9.95}$$

$$y_2 \sim [\omega^2-(3\gamma-4)]\frac{1}{\gamma} \tag{9.96}$$

となる。ここで、ω^2 は未知である事に注意しておこう。

表 9.1: ポリトロープ星の固有振動 ($\gamma = 5/3$ の場合)

N	$\rho_{\rm c}/\bar{\rho}$	ω_0^2	$(\xi_{\rm R}/\xi_{\rm c})_0$	$(\xi_{\rm R}/\xi_{\rm c})_1$	node of ξ_1
1.5	5.99	2.712	1.42	-3.39	$x = 0.72$
3.0	54.2	9.261	22.41	-59.12	$x = 0.67$
3.5	153.	12.69	2.55×10^2		
4.0	622.	15.38	5.95×10^3		

結局、中心近傍では $\xi_{\rm c}$ が、表面近傍では ω^2 が未知のまま残った。そこで、中心及び表面から、方程式を積分して行き、ある fitting point $x = x_{\rm F}$ で、y_1 , y_2 が共に一致すれば良い。内側の解、外側の解を表すために、添字 i と e をつけて表記すると、

$$D \equiv \left(\frac{y_2}{y_1}\right)_i - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)_e = 0 \tag{9.97}$$

を満たす ω^2 を探せば良い。D は ω^2 の関数であるから、何点かの ω^2 に対して、$D(\omega^2)$ をプロットし、$D(\omega^2)$ のゼロ点を求めれば良い。それらのゼロ点が固有振動数である。一旦固有振動数 ω^2 が求まったら、固有関数は直ちに求める事が出来よう。

固有関数 ξ は表面で大きく、中心で小さい。また、密度の中心集中度が高い程、即ち、$\rho_{\rm c}/\bar{\rho}$ が大きい程、$\xi_{\rm R}/\xi_{\rm c}$ が大きい。次元のある固有振動数 σ^2 は $\sigma^2 = \omega^2(GM/R^3)$ だから、これは平均密度 $\bar{\rho}$ に比例する。従って、振動の周期は、平均密度の平方根に反比例する。或いは、別の言い方をすると、モードが同じなら、異なる星について、振動の周期 Π と平均密度の積は、ほぼ同一の値という事になる。例えば、$\omega^2 = 9.261$ に対して、

$$Q \equiv \text{Period(day)} \times \sqrt{\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot} \simeq 0.0383 \tag{9.98}$$

である。

9.3.9 問題：固有関数、固有振動数の計算

ポリトロープ星のモデルを使って、波動方程式 (9.46) を数値的に解き、その固有値、固有関数を求めよ。

参考図書：

Kippenhahn, R. and Weigert, A. 1990, *Stellar Structure and Evolution*, (Springer-Verlag, New York).

Hansen, C. J. and Kawaler, S. D. 1994, *Steelar Interiors*, (Springer-Verlag, New York).

9.3.10　非動径振動

球対称なままの振動に限らない一般的な固有振動を記述する方程式を導出してみよう。運動方程式 (9.35) の時間微分をとると

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = \nabla(c^2\chi + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}) - \frac{c^2N^2}{g}\chi\boldsymbol{e}_{\rm r} \tag{9.99}$$

ここに

$$\chi \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{9.100}$$

$$N^2 \equiv g\left(\frac{1}{H_\rho} - \frac{g}{c^2}\right) \tag{9.101}$$

とする。式 (9.99) に rotation を二回作用させて

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v} &\equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \nabla^2\boldsymbol{v}\} \\ &= \nabla^2\left(\frac{c^2N^2}{g}\chi\right)\boldsymbol{r} - \frac{\partial}{\partial r}\nabla\left(\frac{c^2N^2}{g}\chi\right)\end{aligned} \tag{9.102}$$

これより

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\boldsymbol{g}\cdot\nabla\chi) + g\nabla_{\rm h}^2\left(\frac{c^2N^2}{g}\chi\right) \tag{9.103}$$

を得る。一方、式 (9.99) の divergence をとると、

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \nabla^2(c^2\chi + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c^2N^2}{g}\chi\right) \tag{9.104}$$

を得る。式 (9.103) と (9.104) より $\nabla^2(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v})$ を消去すると、

$$\frac{\partial^4\chi}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\nabla^2(c^2\chi) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c^2}{H_\rho}\chi\right)\right] - c^2N^2\nabla_{\rm h}^2\chi = 0 \tag{9.105}$$

を得る。ここで

$$\chi \equiv \rho^{-1/2}c^{-2}\Psi \tag{9.106}$$

で Ψ を定義すると、式 (9.105) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\rm c}^2\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\Psi - c^2N^2\nabla_{\rm h}^2\Psi = 0 \tag{9.107}$$

に帰する。ここで

$$\omega_{\rm c} \equiv \frac{c}{2H_\rho}\left(1 - 2\frac{dH_\rho}{dr}\right)^{-1} \tag{9.108}$$

これが星の振動を記述する波動方程式に他ならない。

波動関数の時間依存性を $\Psi \propto \exp(i\omega t)$ とする。また水平方向の空間依存性を球面調和関数を使って $\Psi \propto \Xi(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ とすると、式 (9.108) は

$$(\omega^4 - \omega_{\rm c}^2\omega^2)\Xi + c^2\omega^2\frac{d^2\Xi}{dr^2} - \frac{l(l+1)c^2}{r^2}\omega^2\Xi + \frac{l(l+1)c^2N^2}{r^2}\Xi = 0 \tag{9.109}$$

と帰す。これは $\Xi(r)$ に関する二階の微分方程式で、

$$\frac{d^2\Xi}{dr^2} + \frac{1}{c^2\omega^2}[\omega^2 - \omega_+^2(r)][\omega^2 - \omega_-^2(r)]\Xi = 0 \tag{9.110}$$

という形になっている。(9.110) 式は、中心と表面での適当な境界条件を科すことによって、固有値問題に帰す。境界条件は、中心と表面で $\Xi = 0$ である。

9.3.11 問題：関数 $\omega_\pm^2(r)$ の形

(9.110) 式を、Schrödinger 方程式に対応させると、$\omega_\pm^2 r$ はポテンシャルの役割を果たしている事になる。いままでに作った星のモデルを使って、関数 $\omega_\pm^2 r$ の具体的な形を数値的に調べよ。

9.3.12 固有モード

振動の復元力を考えよう。今考えている運動方程式では、重力とガス圧力しか入っていない。ガス圧力は、星が収縮しようとすると圧力が高くなって反発させる。これは振動としては音波に相当する。一方重力は、星のある水平面上でデコボコした波を考えると判るように、重力面から出っ張った部分とへっこんだ部分を引き戻そうとして振動になる。これが重力波である。

$\omega^2 \gg \omega_-$ の場合、波動方程式 (9.110) は、

$$\frac{d^2\Xi}{dr^2} + \frac{1}{c^2}\left[\omega^2 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2} - \omega_c^2\right]\Xi = 0 \tag{9.111}$$

という形に帰する。ここで密度一定の星の場合 ($\omega_c = 0$) を考えると判るように、これが音波モードを表わしている。実際、$l(l+1)/r^2 = k_{\rm h}^2$ を水平方向の波数の二乗、d^2/dr^2 を鉛直方向の波数の二乗 $k_{\rm r}^2$ と考えれば、(9.111) は、音波の分散関係式

$$c^2(k_{\rm r}^2 + k_{\rm h}^2) = \omega^2 \tag{9.112}$$

に帰する。

$\omega^2 \ll \omega_+$ の場合、波動方程式 (9.110) は、

$$\frac{d^2\Xi}{dr^2} + \frac{l(l+1)N^2}{r^2}\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{N^2}\right]\Xi = 0 \tag{9.113}$$

という形に帰する。これは重力波モードを表わしている。実際、(9.113) は、先程と同じ考えを使えば、重力波の分散関係式

$$\omega^2 = \frac{k_{\rm h}^2N^2}{k_{\rm r}^2 + k_{\rm h}^2} \tag{9.114}$$

に帰する。

適当な境界条件の下に、波動方程式 (9.110) 或いは (9.111) または (9.113) は、振動数の二乗 ω^2 を固有値とする固有値問題になる。Schrödinger 方程式に対応させて考えると、$\omega_+(r)$ と ω_- は、それぞれ音波モード、重力波モードの場合のポテンシャルに相当し、ω^2、ω^{-2} が固有値に相当する。従って、星全体としての固有関数は

$$\Psi(r,\theta,\phi,t) = \Xi_n(r) Y_l^m(\theta,\phi)\exp(i\omega t) \tag{9.115}$$

と表わせ、これを規定する量子数には球面調和関数の指数 l、m と (9.110) 或いは (9.111) または (9.113) の解 $\Xi(r)$ の節の数 n の 3 つがある。固有値 ω^2 は 3 つの量子数のうち l と n には依るが、m には依存せず、$(2l+1)$-重に縮退している。これは、方位量子数 m は特定の方向を決めてこそ意味がある量であるのに、球対称の星では、特別の方向というものがないからである。そこで、自転の影響を考慮したりすると、この縮退は解ける。この事情は Zeeman 効果と同じである。

9.3.13　問題：量子化条件

高調波モード $n \gg 1$ の場合を考える。波動方程式 (9.111) 及び (9.113) について、量子数 n に関する量子化条件を考察せよ。

9.3.14　問題：固有関数、固有振動数の計算

いままでに作った星のモデルを使って、波動方程式 (9.111) 及び (9.113) を $l = 1, 2, 3, 10, 20$ の場合について、それぞれ $n = 1, ..., 10$ まで数値的に解き、その固有値、固有関数を求めよ。上で考えた量子化条件はどれぐらい良く満たされているか検討せよ。

第 10 章　レポート問題

以下の問題 10.1–10.10 を数値的に解き、考察を加え、レポートとして提出せよ。レポートは LaTeX で作成せよ。締切は、9 月 24 日とする。問題 10.11–10.14 は必須ではない自由課題とする。

10.1　問題：黒体輻射

熱平衡にある完全黒体の物体から放射される光を黒体輻射と呼ぶ。単位面積から単位立体角に放射される黒体輻射のエネルギー $B(T)$ は、Planck の輻射式

$$B(T)d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1}d\lambda \qquad (\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{str}^{-1}) \tag{10.1}$$

に従う。但し、ここで、h は Planck 定数、k は Boltzman 定数、c は光速を表す。輻射エネルギー分布を $T = 3\mathrm{K}$、$300\mathrm{K}$、$3,000\mathrm{K}$、$30,000\mathrm{K}$ について、計算せよ。$hc/\lambda \gg kT$ の場合、輻射エネルギー分布は Wien の法則

$$B(T)d\lambda \simeq \frac{2hc^2}{\lambda^5}\exp(-hc/\lambda kT)d\lambda \tag{10.2}$$

で近似される事、逆に $hc/\lambda \ll kT$ の場合には、輻射エネルギー分布は Rayleigh-Jeans の法則

$$B(T)d\lambda \simeq \frac{2kTc}{\lambda^4}d\lambda \tag{10.3}$$

で近似される事を確かめよ。また、黒体輻射のエネルギー強度が最大になる波長 $\lambda_{\max}$ は、Wien の変位則

$$\lambda_{\max}T = 2.897\cdot 10^{-3} \quad \mathrm{m}\cdot\mathrm{K} \tag{10.4}$$

を満たす事を確かめよ。ただし、$h = 6.6260755\times 10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$, $k = 1.380658\times 10^{-23}\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, $c = 2.99792458\times 10^{8}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ とせよ。

10.2　問題：恒星の質量光度関係

実視連星の年周視差が測定できるために連星までの距離が判り、連星の公転周期が測られ、二つの星の共通重心との間の距離比が判ると、ケプラーの法則を使うことによって、連星を構成する恒星の質量が決定できる。距離がわかるので、実視光度から、絶対光度へも換算出来る。これにより、恒星

の質量と光度の関係を調べる事が出来る。こうして得られた恒星の絶対光度と質量のデータ[1] から、質量と光度の関係を図示せよ。

10.3　問題：HR 図を描く

BSC4 カタログ[2] を読んで、HR 図を描け。

10.4　問題：Runge-Kutta 法と Euler 法と修正 Euler 法

Runge-Kutta 法と Euler 法と修正 Euler 法を使って、次の連立一階常微分方程式を解き、誤差を評価せよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \tag{10.5}$$

但し、初期値は $x = 0$ で $y = 1$, $dy/dx = 0$ とし、区間 $x = [0, \pi/2]$ について解け。

10.5　問題：ポリトロープガス球

1. 指数 $N = 1.5$、$N = 3$、及び $N = 4$ の場合について、Lane-Emden equation を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解け。

2. 太陽が $N = 3$ のポリトロープで近似できるとして、その内部構造を求めよ。但し太陽半径 $R_\odot = 6.96 \times 10^5$ km、太陽質量 $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg とし、内部は完全気体の状態方程式

$$P_{\rm gas} = NkT \tag{10.6}$$

に従うものとする。ここで N は単位体積当たりの全粒子数、k はボルツマン定数。今、水素、ヘリウム、それ以外の元素が質量比 (X, Y, X_i) である完全電離理想気体を考える。水素原子の質量を $m_{\rm H}$ で表わすとすると、水素については核の数密度は $\rho X/m_{\rm H}$、電子の数密度は同じく $\rho X/m_{\rm H}$ 、ヘリウムについては核の数密度は $\rho Y/(4m_{\rm H})$、電子の数密度は $\rho Y/(2m_{\rm H})$、それら以外の元素については、それぞれの元素の atomic weight を A_i、atomic number を Z_i とすると、核の数密度は $\rho X_i/(A_i m_{\rm H})$、電子の数密度は $\rho X_i Z_i/(A_i m_{\rm H})$ だから、全粒子数 N は

$$N = \frac{\rho}{m_{\rm H}} \left(2X + \frac{3}{4}Y + \sum_i \frac{Z_i + 1}{A_i} X_i \right) \tag{10.7}$$

となる。重元素については $(Z_i + 1)/A_i \sim 1/2$ だから、水素とヘリウム以外の元素の質量比を Z $(Z = 1 - X - Y = \sum_i X_i)$ と表わす事にすれば、

$$N = \frac{\rho}{\mu m_{\rm H}} \tag{10.8}$$

[1] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/double-star.dat
[2] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/BSC4.dat

であり、ガス圧は

$$P_{\rm gas} = \frac{\rho}{\mu m_{\rm H}} kT \tag{10.9}$$

$$= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho T \tag{10.10}$$

ここに μ は

$$\mu^{-1} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \tag{10.11}$$

で、平均分子量と呼ぶ。また $\mathcal{R} \equiv k/m_{\rm H} = 8.314510\times10^3\ {\rm J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$。($k = 1.380658\times10^{-23}$ ${\rm J\cdot K^{-1}}$、$m_{\rm H} = 1.672623\times10^{-27}\ {\rm kg}$)。太陽の水素、ヘリウム、金属の質量比はそれぞれ $X = 0.75$、$Y = 0.23$、$Z = 0.02$ とする。

10.6 問題：境界値問題の例

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{10.12}$$

を、$x = 0$ で $y = 1$, $x = \pi/2$ で $y = 1/4$ という境界条件の境界値問題として、数値的に解け。

10.7 問題：境界値問題としての Lane-Emden 方程式

境界値問題として、Lane-Emden 方程式を解け。

10.8 問題：固有値問題の例

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \tag{10.13}$$

を、$x = 0$ で $y = 0$, $x = \pi$ で $y = 0$ という条件の下に数値的に解け。

10.9 問題：固有値問題としての Lane-Emden 方程式

固有値問題として、Lane-Emden 方程式を解け。

10.10 問題：ポリトロープ星の固有関数、固有振動数の計算

ポリトロープ星のモデルを使って、波動方程式 (9.46) を数値的に解き、その固有値、固有関数を求めよ。

10.11　問題：ハッブルの法則

CfA カタログ[3] を使って、距離と後退速度が独立に測られている銀河に対して、両者がどのような関係になっているかを距離-後退速度図を描いて示せ。

10.12　問題：宇宙地図

CfA カタログを使って、ある赤緯帯の銀河を赤経・距離の二次元マップ上にを描け。

10.13　問題：Mollwide 画法で天球図を描く

CfA カタログを使って、銀河の天球上の赤経・赤緯座標、銀経・銀緯座標、の二次元マップを、Mollwide 画法で描いて見よう。

10.14　問題：非動径振動の固有関数、固有振動数の計算

いままでに作った星のモデルを使って、波動方程式 (9.111) 及び (9.113) を $l = 1, 2, 3, 10, 20$ の場合について、それぞれ $n = 1, ..., 10$ まで数値的に解き、その固有値、固有関数を求めよ。上で考えた量子化条件はどれぐらい良く満たされているか検討せよ。

[3] http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/VELOCITY.DAT