自己重力系の構造形成と
その計算機シミュレーション

牧野淳一郎

東工大 地球生命研究所

講義概要

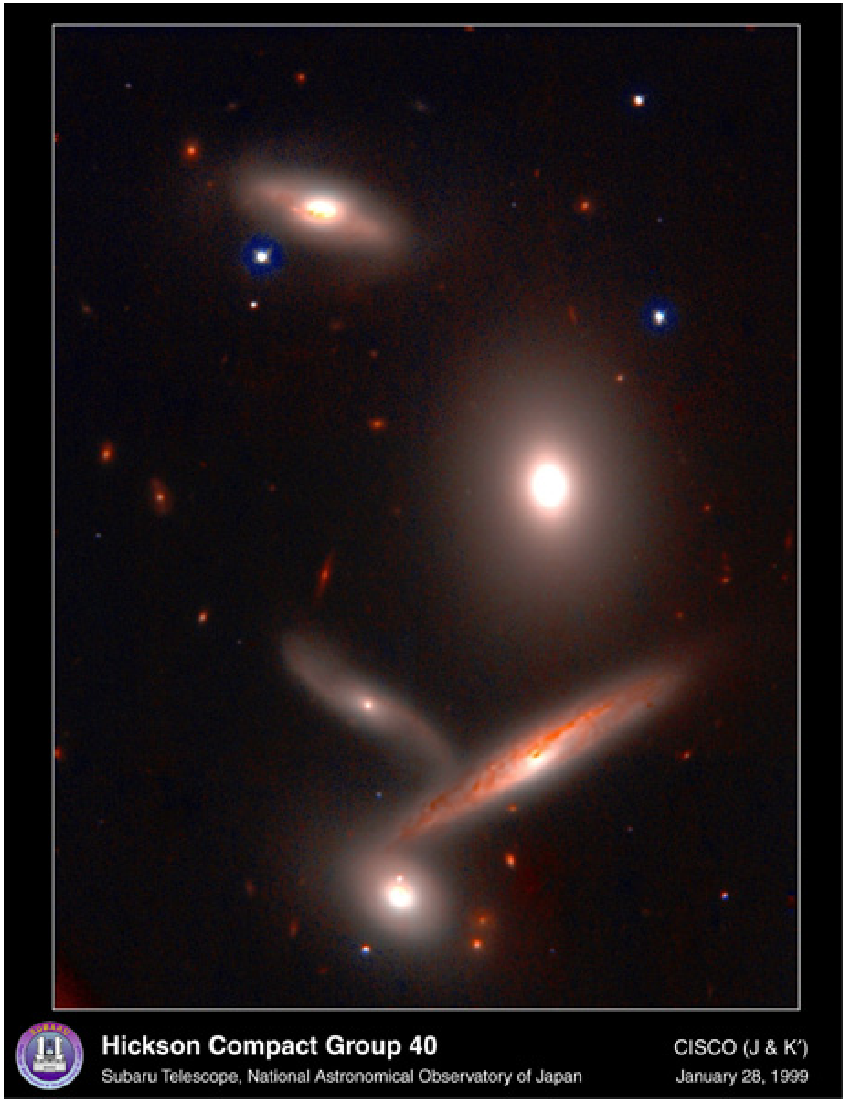
1. 自己重力多体系
    - 自己重力多体系とはどんなもの？
    - 太陽系とその安定性
    - 宇宙膨張と銀河形成
    - 重力熱力学的不安定
2. 最近の研究から
    - ブラックホールのある系について
    - 銀河形成・渦巻構造
3. 計算機の話

そもそもどんなもの？(観測)

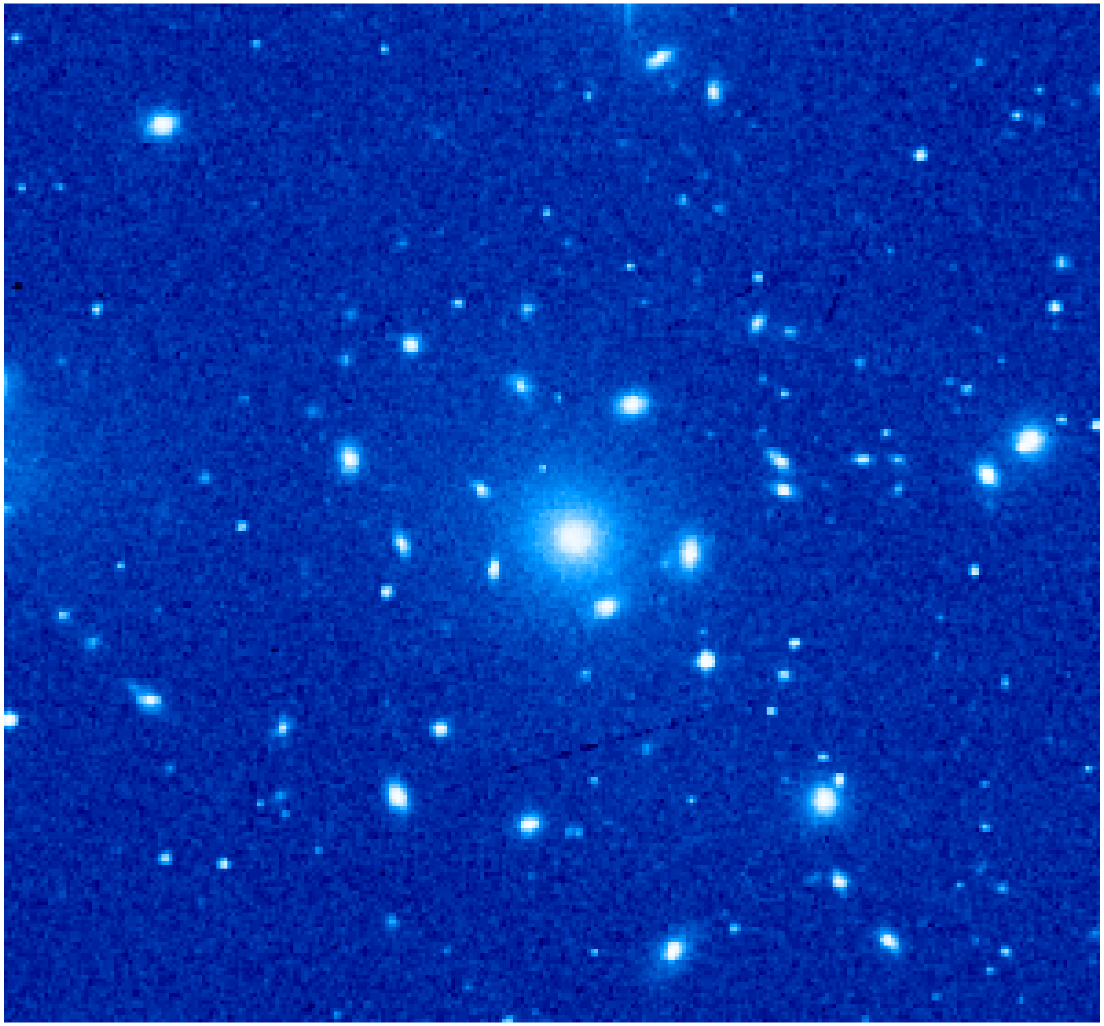
銀河

球状星団

銀河群

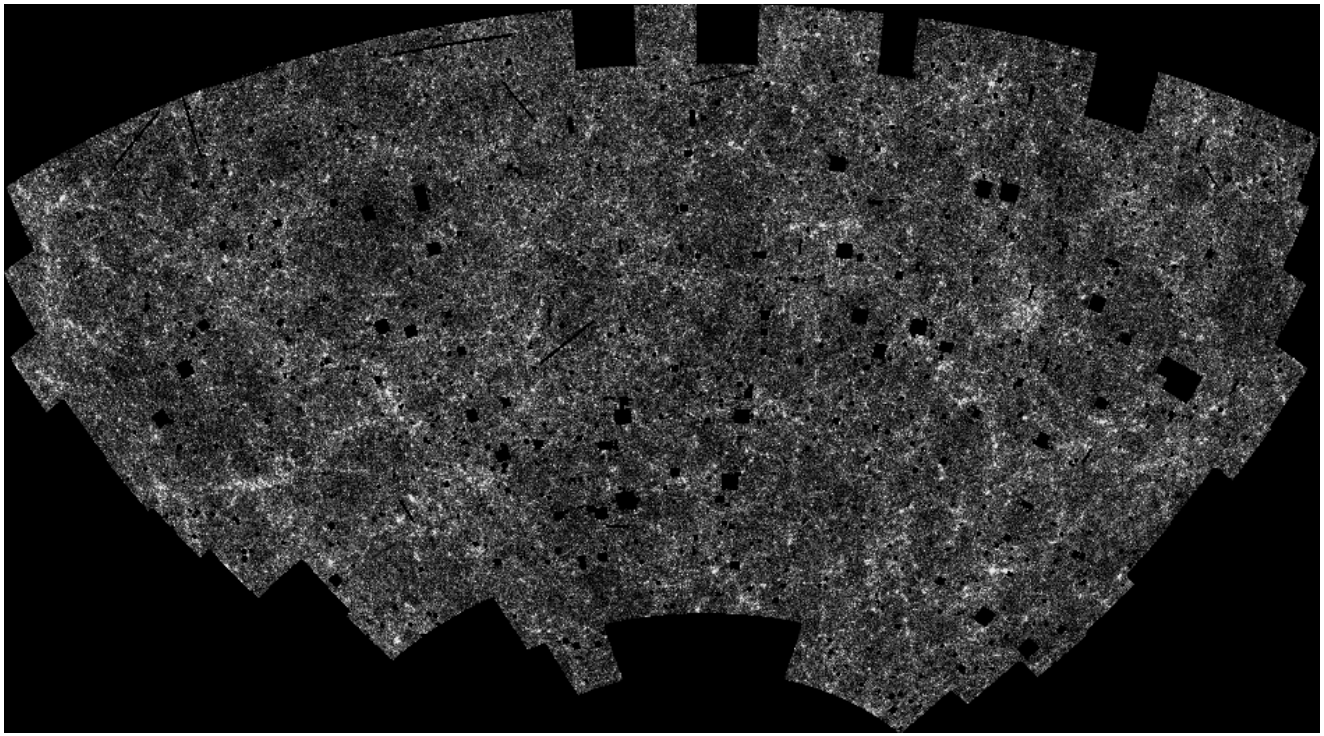

Hickson Compact Group 40
Subaru Telescope, National Astronomical Observatory of Japan
CISCO (J & K')
January 28, 1999

銀河団



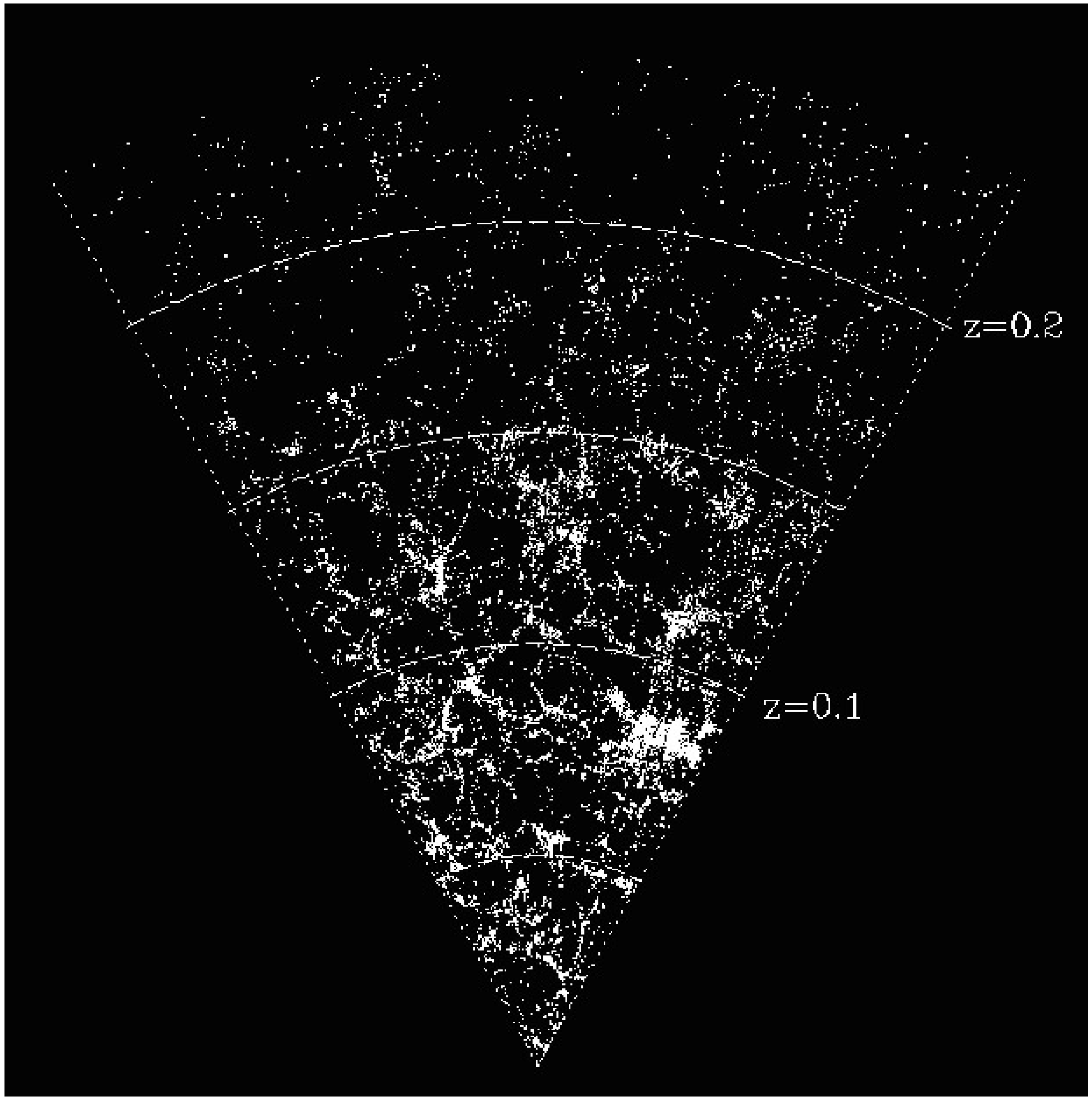
http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



支配方程式:

太陽系、星団、銀河、銀河団、宇宙の大規模構造などの基本方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- それぞれの星（あるいは惑星）を一つの「粒子」と思った時に、ある粒子は他のすべての粒子からの重力を受ける。
- 大抵の場合に相対論的効果は考えなくていい（速度が光速にくらべてずっと小さい）

計算機「実験」

実際に星や惑星をどこかにおいて実験するのは不可能

計算機で支配方程式を積分することで実験の代わりにする

＝「計算機実験」

実験そのものとはちょっと違う

- こちらが入れた物理法則以外は入ってこない（はず）
- 計算があっているとは限らない

重力多体系の基本的性質

惑星や星と、それ以上の大きさの構造の基本的な違い：

圧力が重力とつりあっているわけではない

では、どうして潰れてしまわないか？
— Newton 以来の疑問。

- 太陽系
- 銀河
- 宇宙全体

太陽系の場合

太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からのに比べて 3 桁程度小さい（木星の質量は太陽のほぼ 0.1%）。従って

ケプラー問題＋摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか？（惑星の軌道は本当に安定か？）というのは現在でもまだ完全に解決されていない大問題。

古典的な（19世紀くらいの）理解

「ラプラスが太陽系の安定性を証明した」

これは摂動展開したという話。

- ラプラスの頃にはまだ無限級数の収束条件はそもそも知られていなかった
- 摂動展開すればいいというものではないということをポアンカレが示した
- 冥王星、海王星などの新しい惑星がみつかった
- 単純な力学系でも「カオス」になるということがわかってきた

近代的な（20 世紀後半の）理解

20 世紀後半には太陽系が本当に安定かどうか？というのは、

「なんだかよくわからない問題」

に戻ってしまった。

用語の整理

安定 太陽系だと、要するに惑星がどっかにとんでいってしまうとか、2 つがぶつかるとか太陽に落ちるとかそういった大きな変化はないということを定義にする。

可積分 任意の初期条件で解析的な解が求まる。(多重)周期的なので、フーリエ級数で書ける

用語の整理(続き)

カオス的 これも定義はかならずしもはっきりしない。可積分なものはカオス的ではないが、一般には可積分かどうかわかるとは限らないし、可積分でなくてもある初期条件の範囲で安定な解が求まるような力学系もある。

ややこしい例

可積分ではないけれど安定な解がある古くて新しい問題：重力3体問題。

3個の質点がお互いの重力に引かれて運動する。

銀河、星団等のもっとも簡単なモデルともいえる。

(2体問題は可積分)

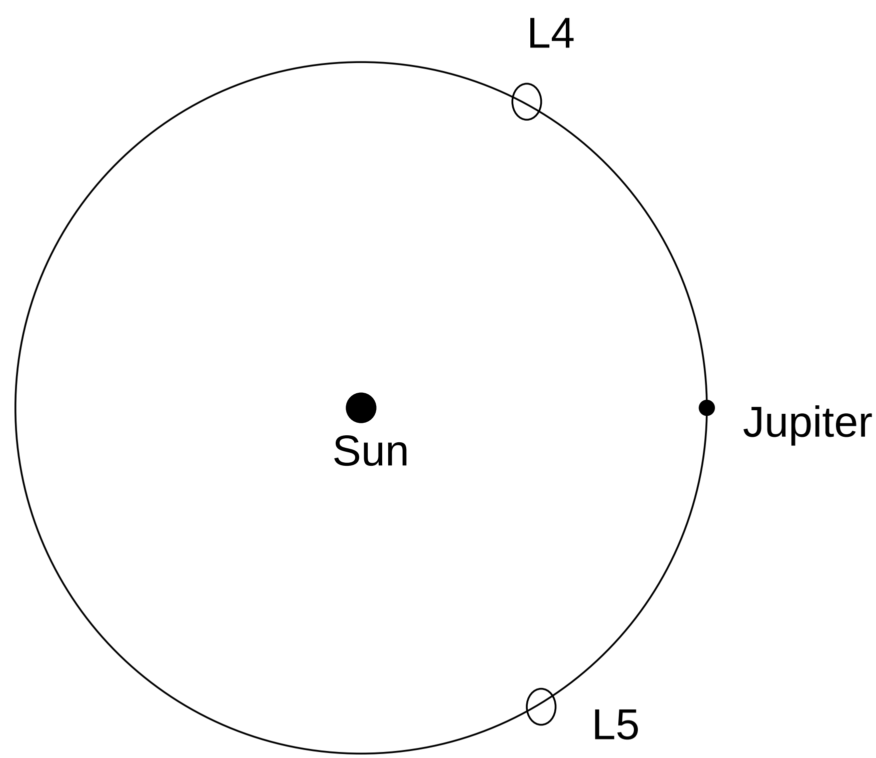
3体問題の性質

一般の3体問題は可積分ではない： ポアンカレによって「証明された」

が、これはどんな初期条件でも安定ではないというわけではない。

安定な解の例

ラグランジュ解（正 3 角形解）。
$2,3$ 個めの質量が十分小さければ安定。
太陽・木星・トロヤ群の小惑星は実際にこのラグランジュ解を作っている。
（ラグランジュではなくてオイラーによって発見されたとか、、、）



ちょっと余談

20年くらい前に発見された新しい安定軌道 — Figure-8 Solution

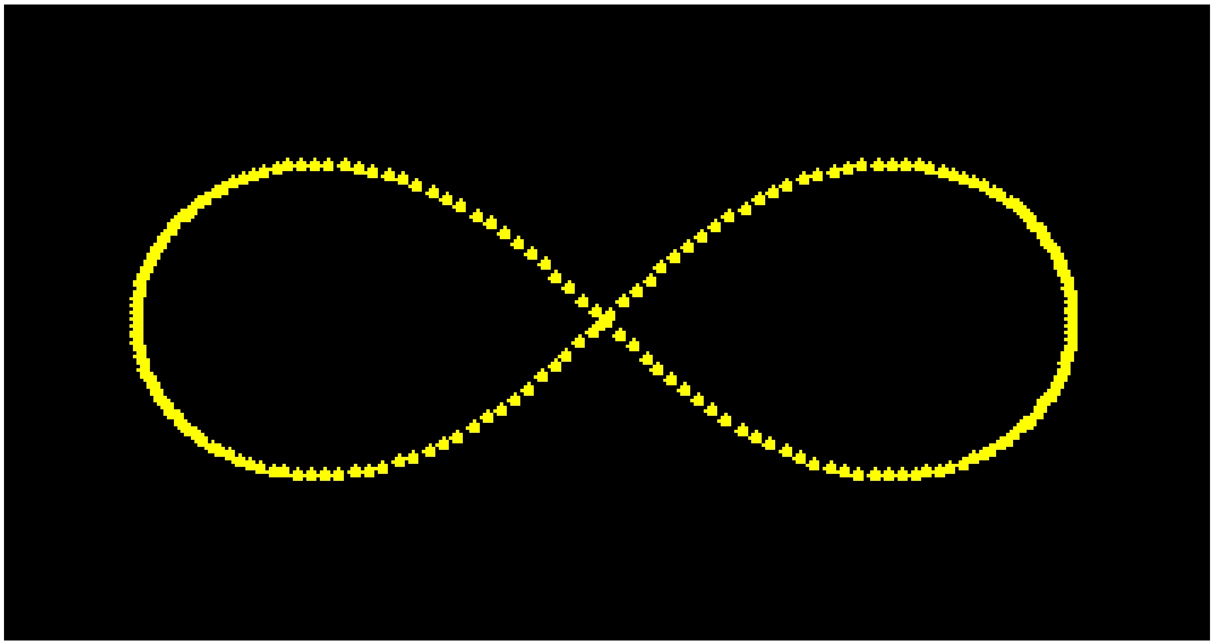


Figure-8 solution

- 3 個の質量がほぼ等しい (0.005% 程度) の時にだけ安定（らしい）
- 数値的に（計算機で）周期軌道を見つける新しい方法が開発されて求まってきたもの。

太陽系の安定性について

結局、「計算機で長い間惑星の軌道を追いかけていって、どうなるか見る」のが唯一信用できる方法（信用できないとわかっていない方法）ということになった。

「計算機で軌道を追いかける」とはどういうことか？

計算機による軌道計算

ある運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \tag{1}$$

と初期条件

$$x(0) = x_0, \frac{dx}{dt}_{t=0} = v(0) = v_0 \tag{2}$$

が与えられたとして、そのあとの時間発展を計算機で求めること。

具体的な方法

基本的には、最初の位置（と速度）からちょっと後の時刻の位置を求めるというのを繰り返す。

もっとも基本的な方法：オイラー法

1 変数で書くと

$dx/dt = f(x)$ に対して、

$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t))$ と近似するもの。

つまり、ある時刻での解のテイラー級数展開の 1 次の項までをとったもの

もっと効率の良い方法が一杯研究されている

で、安定性はどうなったかというと

と、こういうような、いろいろな方法が出てきたこと、計算機が速くなったこともあって、

太陽系の惑星の軌道は「安定ではない」

ということが 1987 年には示された

ここでの「安定ではない」の意味は：

「非常に近い初期条件の太陽系を 2 個つくってそれぞれ別に計算すると、それぞれでの惑星の位置の差がどんどん大きくなっていく」ということ

不安定のタイムスケール

大きくなるタイムスケール：リアプノフ時間といわれるもの。軌道間の距離が e 倍になる時間。

求まったリアプノフ時間： 2 千万年

これ自体は 8.5 億年の計算をして求まったもの。

太陽系はでは 45 億年間どうして存在を続けているのか？

さらに長い時間の計算（主に国立天文台の木下・中井・伊藤らによるもの）でわかったこと：

- リアプノフ時間は確かに 2千万年 程度と短い
- だからといって惑星がどこかに飛んでいってしまうというようなことはおこらない（らしい）

つまり、軌道の安定性ということからみるとカオス的だが、だからといって全くなんでも起こるというわけではなくてある狭い範囲（どういう範囲かはよくわからない）に軌道が収まっている（らしい）

冥王星は惑星じゃなくなったし

だからいうわけでもないが、2009年に Nature にでた論文:

Vol 459 | 11 June 2009 | doi:10.1038/nature08096 nature

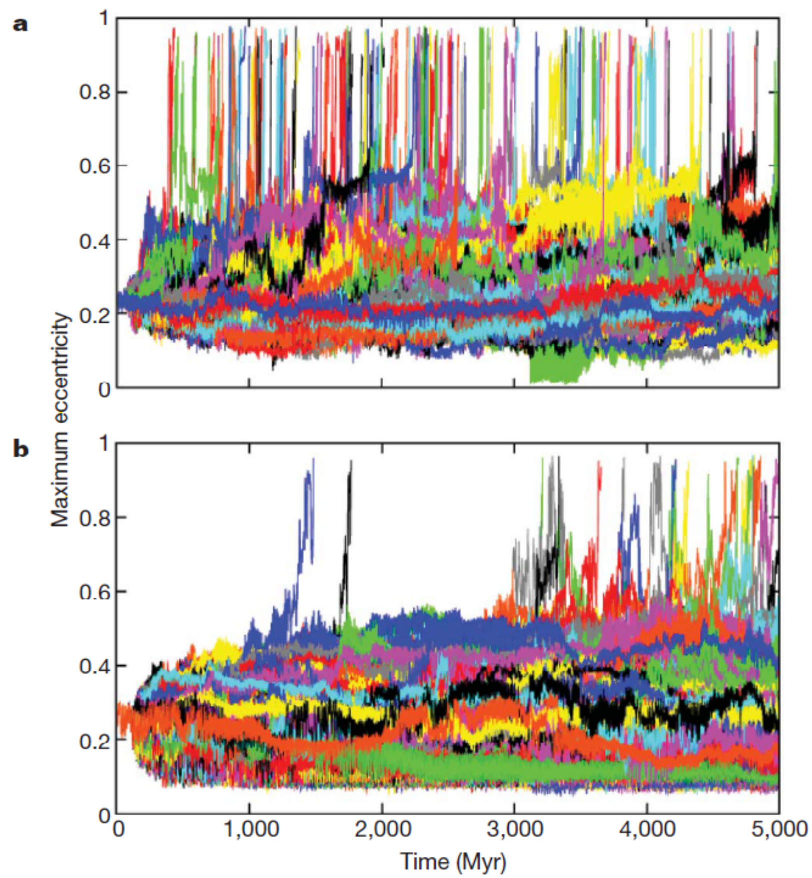
LETTERS

Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth

J. Laskar[1] & M. Gastineau[1]

地球が水星や金星とぶつかる ???

Laskar and Gastineau 2009



- 水星の初期の位置をほんのちょっとだけ (0.38mm) づつ変えて、沢山の「太陽系」の進化を計算した
- 結構な数の「太陽系」で、水星の離心率が大きく上がって金星や地球とぶつかった
- 但し、一般相対論的効果をいれると、いれない場合より安定になった

本当に計算あってるのかどうかは？

結局のところ

そういうわけで安定かどうかはまだよくわかって
いない。

色々な人が色々な方法で研究中。

以下、太陽系の話はおいて銀河とか星団の話に
移る。

なにが問題か？

銀河とか星団とかはそもそもどうしてそこにあるのか？

それらは安定なのか？

どうやってできたのか？

というようなことが問題。

ニュートンが考えたこと：

太陽と同じような星が宇宙全体に広がっているとすれば、それらはお互いの重力で集まったり落ちてきたりぶつかったりしないか？

本人が考えた解答：

落ちてくるのには１億年くらいかかるから大丈夫（というか、宇宙の年齢がこれで決まる？）

現代的な解答：

2 つの問題があることになる。

- 宇宙全体としてはなにがおきているのか
- 一つ一つの星、太陽系、銀河とかについてはどうか？

宇宙全体としてはなにがおきているのか？

「宇宙論」の基本的問題。

＝宇宙空間というものはどうやってそこに存在できているか？

一般相対性理論で初めて本当に扱えるようになった問題。

ものが落ちないようにする方法

- 「反重力」でささえる
- 宇宙は広がっているということにする。重力で減速はしている。
- 上の 2 つの組合わせ

「反重力」なんての超科学かトンデモかと思うかもしれないけど、これはそうでもなくてアインシュタイン自身のアイディア。そういうもの（宇宙項）があるということにすると空間が落ちてこないで済む。

宇宙膨張

宇宙が全体として膨張しているとすればアインシュタイン方程式に宇宙項をつけなくても解がある：ルメートルとかド・ジッターのアイディア。これは 1920 年ころ。

遠くの銀河を観測すると本当に距離に比例した速度で遠ざかっているらしいとわかってきたのが 1930 年頃。

最初は速度ー距離の比例係数の見積りがいまと 10 倍違ったのでいろいろ混乱があった。

宇宙膨張の問題点

当初の問題：

宇宙の年齢が今の $1/10$ になって、放射性元素で決めた地球の年齢よりずっと若くなった。

これを回避するために、「膨張するけれど定常で年齢は無限大」といったモデルも考えられた。

最近は大きな矛盾はなくなってきている（一応）。

宇宙膨張の数学

ニュートン力学で考えても振舞いは同じなので以下簡単に：

宇宙は一様でどこでもものの密度ρが同じであると考える

で、ある半径Rの球を考える。その表面での重力加速度は

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho R^3/R^2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (3)$$

ここで、加速度は半径に比例することに注意。

数学（続き）

宇宙全体が一様膨張または収縮するという状況を考えると、ある点（半径）の運動方程式は単に重力がその中にある質量に比例することになるので、ケプラー問題と同じ（だが、一次元）になる。

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi GM/r^2 \tag{4}$$

ここで M は時刻が同じなら ρr^3。 違う時刻では、「長さがどう変わったか」というものを $a(t)$ という関数であらわすことにすると

$$\rho(t) = \rho_0/a^3, \quad r = r_0 a \tag{5}$$

数学（続き 2）

a の従うべき方程式は結局

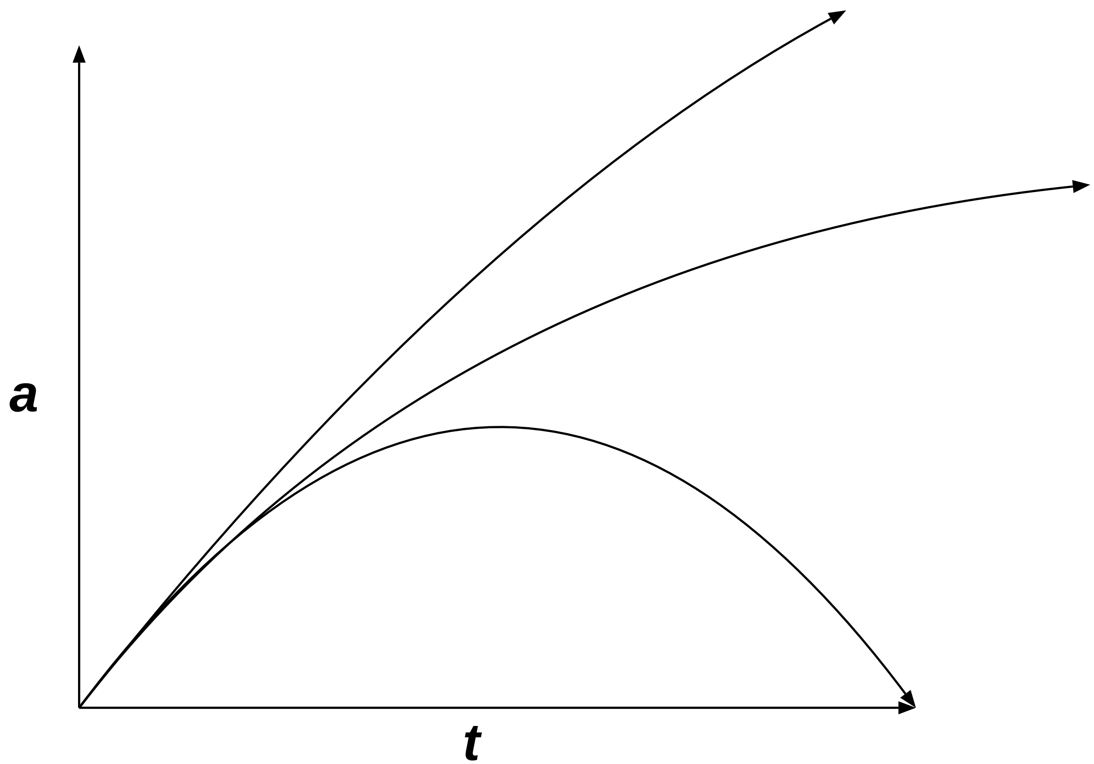
$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho_0/a^2 \tag{6}$$

この解は初期条件によって

- 無限に膨張する。無限の時間たっても有限の速度で膨張
- 無限に膨張する。無限の時間たつとちょうど速度が 0
- どこかで収縮を始めてまた一点に戻る

宇宙膨張の3通り

それぞれが2体問題の双曲線解、放物線解、楕円解に対応



現実の宇宙は？

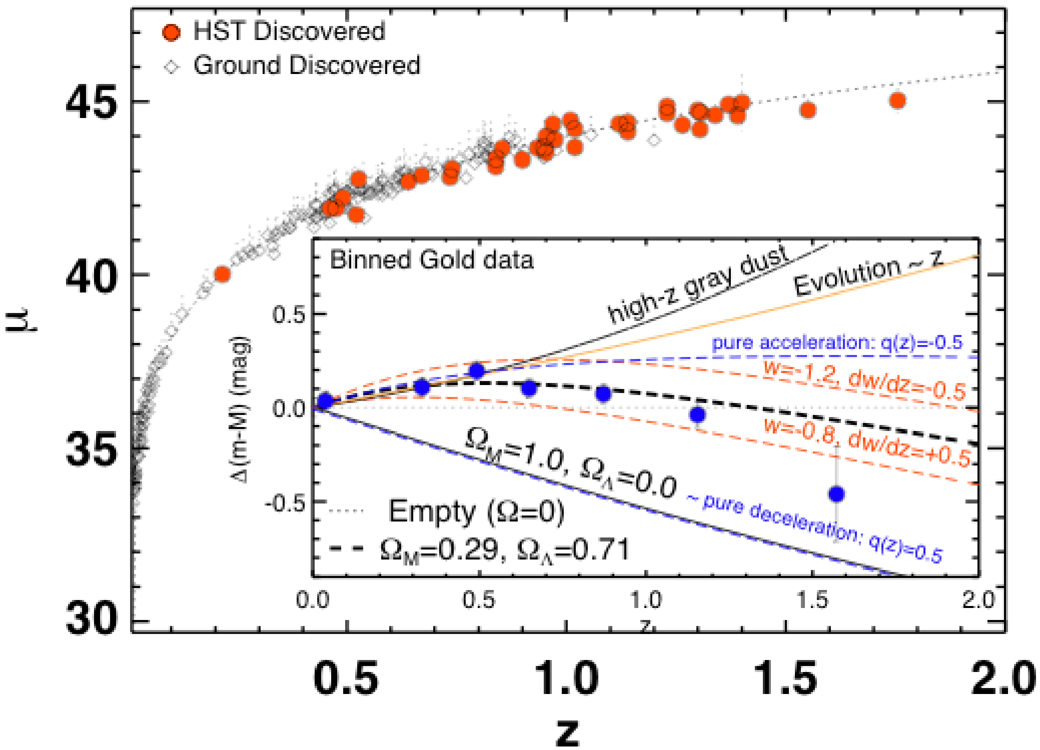
決定的な証拠があるとはいい難いが、いまのところいろいろな観測結果ともっとも矛盾しないのは、

- 無限に膨張する
- しかも、単純な双曲線解よりも最近膨張が速くなっている

というのが一番「本当らしい」

宇宙膨張の加速

遠方の超新星の明るさを観測する: 同じ「赤方変移」でも膨張のしかたで距離、従って明るさが違う



- 普通に平坦な宇宙: 明るい
- 物質が少ない宇宙: 暗い
- 膨張が加速している宇宙: もっと暗い これが我々の宇宙

2011 年ノーベル物理学賞
膨張を加速しているなにか=ダークエネルギー

現在の宇宙の理解

- 物質+ダークエネルギーで「平坦」
- ダークエネルギーは重力とは逆に働いて、空間を膨張させる。遠い未来には指数関数的に膨張
- つまり、宇宙初期のとは違うけれど、現在の宇宙も「インフレーション」的な膨張過程にある
- 「ダークエネルギー」は、全く正体不明。ほぼ名前つけただけ

では「物質」のほうは？

- 観測の示唆: ダークエネルギー$+$物質$=$「1」
- ダークエネルギー: 68.3%, 「ダークマター」:26.8%, 普通の物質: 4.9%
- 普通の物質: 陽子、電子、中性子からなる普通の元素。それぞれクォークからできている。
- ダークマター: 普通の物質「ではない」なにか。現在の宇宙ではほぼ重力しか働いていない

そんなものが本当にあるのか？

銀河等はどうやってできたか？

- 宇宙全体は一様に膨張しているとすると、惑星とか、太陽とか、銀河はどうやってできたのか？
- 銀河は重力で星が集まっているだけなのにどうして潰れてしまわないのか？

という問題は依然として残っている。

まず、どうしてそれら、とりあえず銀河とか、ができたのか？ということ。

重力不安定による揺らぎの成長

宇宙全体としては、(非常に大きなスケールでは)
一様で密度一定であるとしても、小さなスケール
になると揺らぎのために一様からずれている。

宇宙が熱い火の玉から現在まで膨張する過程で、
その揺らぎが自分自身の重力のために成長して、
ものが集まってできるのが銀河とか銀河団という
ことになる。つまりは、ニュートンが最初に心配し
た、「星が落ちてくるのではないか」という問題に
対する答は、「おちてきちゃってる」というもの。

では、銀河はどうやって形を保っているか？

宇宙はなにからできているか

そのへんにある普通の物質：バリオン（陽子、中性子）＋電子でできている。

宇宙のバリオンのほとんどは水素原子のまま（ビッグバンの最初にヘリウムやリチウムが少しできて、あとは星のなか、特に超新星爆発の時にもっと重い元素が核反応で作られる)

ダークマター

見えるバリオンの量（星と、あとは電波や X 線でみえる水素ガスの量)：例えば銀河系の質量や、銀河団の質量のほんの一部でしかない。

銀河：回転曲線

銀河団：X 線ガスの温度から質量を推定

- 重力の理論が間違っている？
- なんだかわからないものがある？

ダークマター

どちらが本当かというのは簡単にはいえないわけだが、今のところ「なんだかわからないものがある」というほうが主流。

これはいろいろな状況証拠があるが、（僕の意見としては）大きいのは重力理論が違うことにした時に、銀河毎に重力理論が違うというわけにはいかない（統一的な説明があるはず）とすると説明が難しいということ。

ダークマターは何か？

大きくわけて 2 つの理論：

- Hot dark matter 質量をもったニュートリノが大量にあって、それが宇宙の物質のほとんどを占めている。
- Cold dark matter 未知の素粒子があってそれが宇宙の物質のほとんどを占めている。

実はニュートリノではうまくいかないということがわかっている。（ことになっている）この場合銀河団とか大きいものはできていても銀河はまだできていないことになってしまうため。

ダークマターの正体???

- 現在のところダークマターの正体は「未知の素粒子」
- 有力な候補、と考えられているもの:「超対称性理論」で予言されている粒子 (どういう理論でどういう粒子かはあまり聞かないで)
- 名前: 「ニュートラリーノ」、質量: 陽子の100倍くらい?
- 普通の物質や他のダークマター粒子と、全く相互作用しないわけではない。
  - 1秒に1億個くらいのダークマター粒子が我々の体を通り抜けている
  - ダークマター粒子が私の体の原子とぶつかる: 1000年-1億年に1度くらい?
  - ダークマター粒子同士の衝突、というのもある。

ダークマター探査

2 つの方針:

- 直接検出: 検出器を通り抜けるダークマター粒子が普通の物質とぶつかり、はね飛ばすのを検出 (日本の XMASS、アメリカの CDMS-II など) CDMS-II は「発見したかも」と昨年 4 月に発表したが ???
- 間接検出: 宇宙の中でダークマター粒子が集まっているところでの対消滅からでてくるなにか (γ 線？電子？陽電子？) を人工衛星で観測 (Fermi 望遠鏡の天体の中にないか？ AMS 実験:ISS 上で反粒子を観測) AMS も「発見したかも」と昨年 4 月に発表したが ???

もちろんまだ見えてないので、どこにどれだけあるのかよくわからない

現在の宇宙に対する我々の基本的な理解

- 宇宙の物質のほとんどは、偉そうにいえば「未知の素粒子」、わかりやすくいえばなんだかわからないものである。
- 宇宙は全体としては一様だが、揺らぎがあって完全に一様なわけではない。宇宙膨張の間にその揺らぎが成長して銀河とか銀河団ができてきた。

こういった理解が正しいかどうか：本当にこういうやり方で現在の宇宙の構造ができるかどうかを計算機シミュレーションで調べることである程度はチェックできる。

宇宙の大規模構造形成のシミュレーション

計算の 1 例（国立天文台理論研究部・石山さん提供）

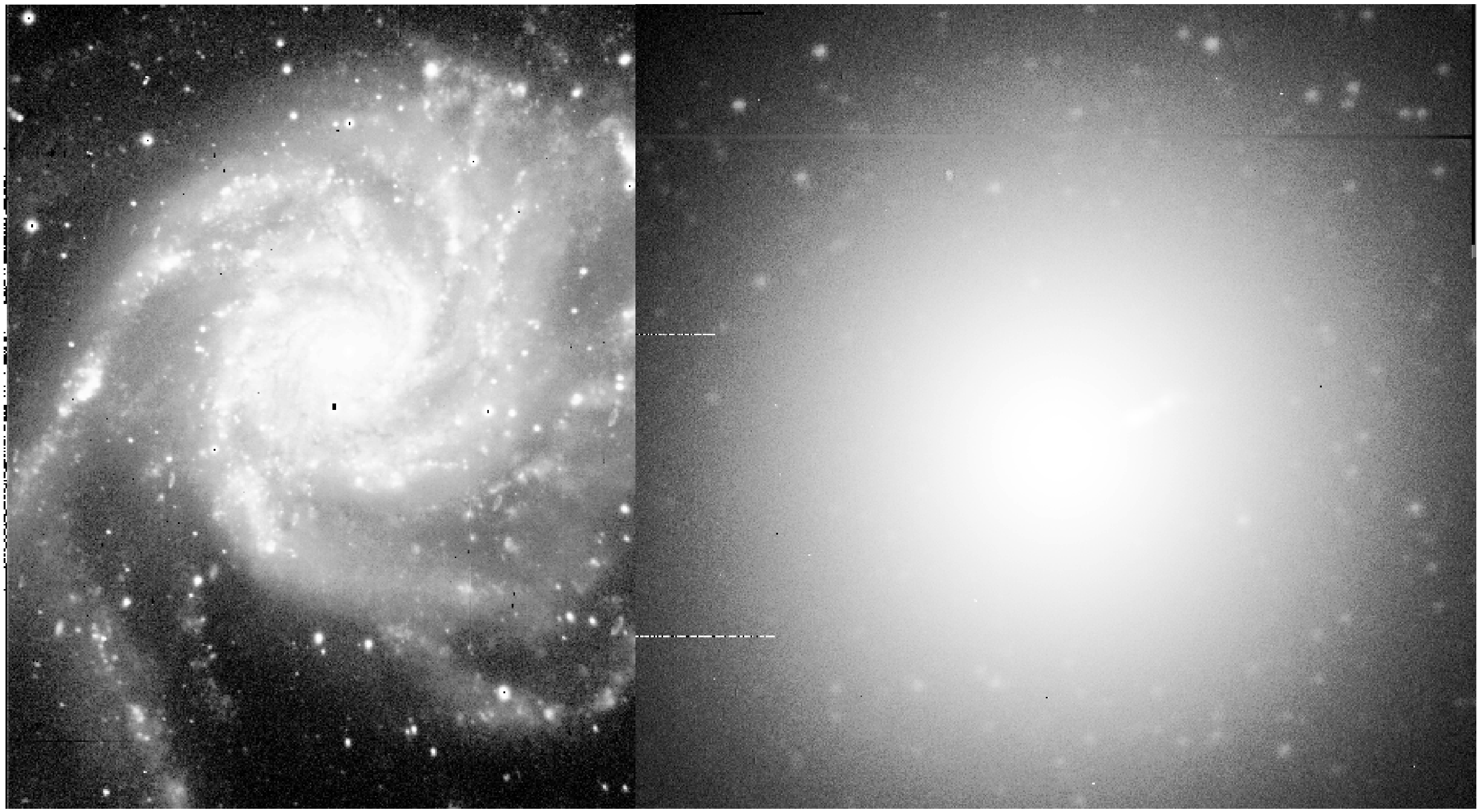
ここでやっていること：

- 基本的には「一様」な宇宙を、なるべく沢山の粒子で表現する
- 理論的に「こう」と思われる揺らぎを与える
- 理論的に「こう」と思われる初期の膨張速度を与える
- あとは各粒子の軌道を数値的に積分していく。基本的には太陽系の時と同じこと

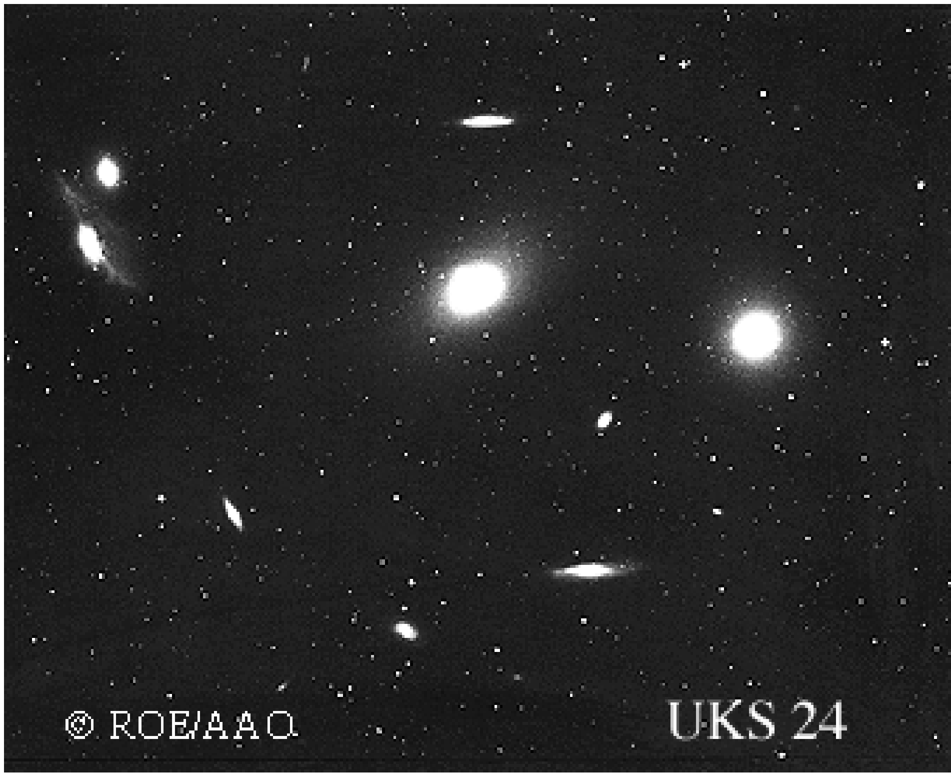
わかること

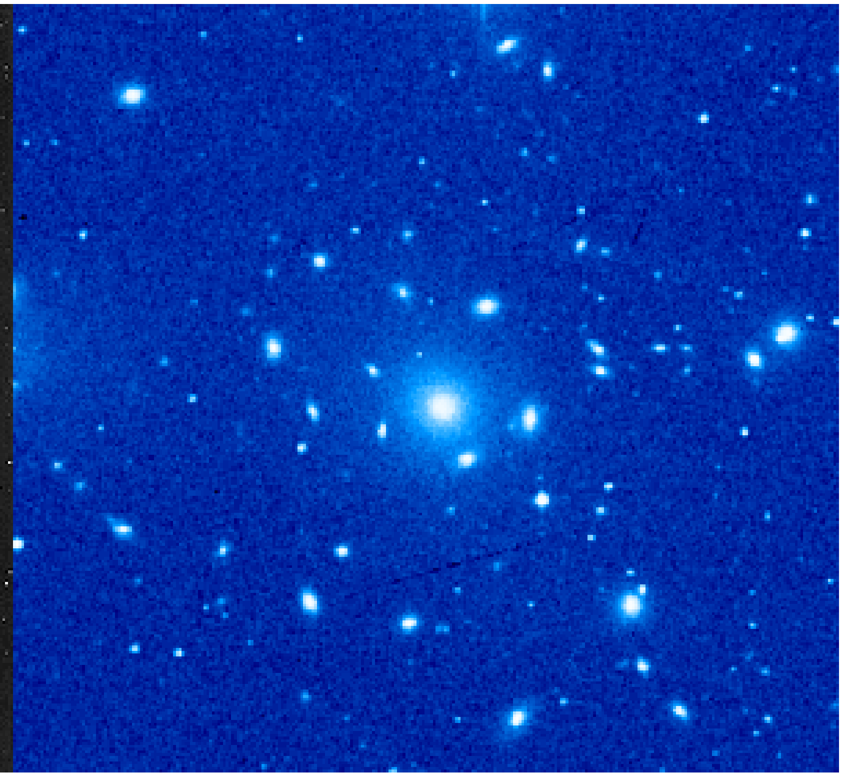
- 宇宙全体としては膨張していく
- 最初に密度が高いところは、他に比べて相対的に密度がどんどん大きくなっていく。
- 特に密度が高いところは、そのうちに膨張しきって潰れ出す。
- （このシミュレーションでは）最初に小さいものが沢山できて、それらがだんだん集まって大きなものになる
- 大雑把にいうと、銀河とか銀河団はこのようにして潰れたもの。

銀河



銀河団





宇宙論の問題としては：

- 観測される銀河や銀河団の性質、特に分布
- シミュレーションでできた銀河や銀河団の分布

を比べて、「どうすれば現在の宇宙ができるか」を決めることで、「宇宙の始まりはどうだったか」を逆に決めたい。

例えば宇宙の膨張速度、密度、宇宙項、 初めの揺らぎの性質、 ダークマターの性質

Ill-posed problem?

つまり、、、

- 宇宙初期の揺らぎ：(銀河や銀河団になる細かいところまでは）直接には見えない
- 昔の宇宙の膨張速度：直接には見えない
- ダークマター：見えるかどうか（あるかどうかも）わからない

これらを、全部同時に銀河の観測から決めたい。

そんなことは可能か? という問題。

問題点

シミュレーションで出来るのは、本来はダークマターの分布だけ。

銀河になるにはそのなかでガスが収縮して星にならないといけない。

つまり、どういう条件で星ができるかが決まらないと本当には比べられない

- 銀河の数が変わる（合体するとか）
- 銀河の明るさが変わる（若い星があると明るい。古くなると暗くなる）

原理的には

- こういった問題点の解決: 「ガスが収縮して星になる」ところも全部シミュレーションすればいい
- そういう方向の研究ももちろん進められている
- が、まだ、シミュレーションの信頼性その他に問題が、、、(時間があれば最終回くらいにこの話をします)

話を戻して、、、

なぜ銀河は潰れないか？

太陽系 太陽が圧倒的に重い — 2 体問題+摂動

一般の3体問題：不安定

安定（最終）状態：2体の連星 $+$ もう一つ（無限遠に飛ばされる）

銀河ではなにが起きるか？

銀河の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x,v)$: 6 次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x,v)dxdv$ がある「体積」 $dxdv$ の中の星の数を与えるとする。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

ここで Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{8}$$

ここで、 G は重力定数である。

分布関数の従う方程式（続き）

ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \tag{9}$$

である。

この書き換えは難しいことではないんだけど、「面倒臭い」ので導出はここでは省略。

力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがありえる（一般にいつでもそうというわけではもちろんない）

これを「力学平衡状態」という。

銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態にいくのか？

はよくわからない.

なぜ力学平衡にいくのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態にいく。

（但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、）

前に見せた銀河形成のシミュレーションはその一例。

ジーンズ不安定

良く考えると、宇宙膨張と構造形成の関係はあんまり簡単ではない。

- ビッグバン直後の宇宙は熱平衡、一様密度
- 今の宇宙は全く一様ではない (少なくとも「小さな」スケールでは。メガパーセクとか)
- 理論的にはどうやって一様でなくなったか？

理解する枠組み: 重力不安定 (ジーンズ不安定)

ジーンズ不安定 (続き)

- 「理論的」枠組み:大抵、摂動論 (解けるものからの無限小のずれを扱う)
- ここでもそういう話
- で、ダークマター (無衝突ボルツマン方程式に従う) だと面倒なので断熱のガスで考える (あとで述べるが、安定性条件は同じになる)

流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\rho v}) = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{t}} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\nabla p} - \boldsymbol{\nabla \Phi} \tag{11}$$

ポアソン方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\Phi} = 4\boldsymbol{\pi G \rho} \tag{12}$$

で記述される。

さらに状態方程式がいる。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいい)

記号のリスト

ρ: 密度

t: 時間

v: 速度

p: 圧力

Φ: 重力ポテンシャル

G: 重力定数

線型化

- 平衡状態からの無限小のずれの変化を見るため、ベースの解とずれの部分にわける。
- ρ, p, v, Φ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好
- 添字 0 がつくものはもとの方程式の平衡解であり、 1 がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）とする。

で、方程式を書き直す。

線型化した方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\rho}_0 \boldsymbol{v}_1) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 \boldsymbol{v}_0) = \mathbf{0} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{\rho}_1}{\boldsymbol{\rho}_0^2}\nabla \boldsymbol{p}_0 - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}_0}\nabla \boldsymbol{p}_1 - \nabla \boldsymbol{\Phi}_1 \tag{14}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Phi}_1 = 4\pi G \boldsymbol{\rho}_1 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{p}_1 = \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{d\boldsymbol{\rho}}\right)_0 \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{v}_s^2 \boldsymbol{\rho}_1 \tag{16}$$

ここで v_s は音速である。

ベースが無限一様の場合

ベースは無限一様でいたるところ密度、圧力が等しく、速度も 0 とすると、連続の式とオイラー方程式が

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 v_1) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{18}$$

となる。下 2 本は見かけはかわらない。

これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \tag{19}$$

この方程式の振舞いは？

- 最初の 2 項をみれば普通の波動方程式、
- 最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。
- 波長が短い極限では普通の波動方程式
- 波長が長い極限では空間２階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

分散関係(空間波長と時間振動数の関係)を求める

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\boldsymbol{\rho_1 = Ce^{i(\mathrm{k}\cdot \boldsymbol{x}-\omega t)}} \tag{20}$$

として代入すれば

$$\boldsymbol{\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0} \tag{21}$$

ということになる。したがって、

$$\boldsymbol{k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{v_s^2}} \tag{22}$$

と書くことにする。

分散関係

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

なお、一応念のために書いておくと、式 (20) の形の解だけを考えるのは任意の初期条件からの解が（連続性とかを仮定すれば）この形の解の線形結合で表現できるからである。解の線形結合が解であるのは方程式が線形だからであり、任意の解が表現できるのは要するにフーリエ変換が完全系をなすからである。

分散関係からいえること

- 波長が短ければ普通の音波
- 波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化
- つまり、長い波長のモードは密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）

いいかえると

- 十分に波長が長いと必ず不安定になる
- 重力があると無限に一様な状態というのは温度無限大でない限り必ず不安定

ジーンズ波長

k_J に対応する波長: ジーンズ波長 λ_J

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} v_s \tag{23}$$

ジーンズ波長くらいの半径の球を考えると、

- 運動エネルギー: $M_J v_s^2$ の程度
- 重力エネルギーは GM_J/λ_J の程度、
- M_J はジーンズ質量で (半径 λ_J の球の質量)

計算すると、運動エネルギーと重力エネルギーが大体等しい。
ジーンズ波長はそういう長さ。

ここまでの解析でごまかしたところ

- 一様密度の物質があれば、ポアソン方程式の右辺が 0 じゃないから重力ポテンシャルは一様な値というのは何かおかしい
- が、一様で無限にひろがっているなら、重力ポテンシャルが場所によって違うのも何か変

宇宙全体の場合: 宇宙膨張に対して不変な座標系 (共動座標という) で方程式を書き換えるとこの問題は解消。但し、時間変換がはいるので、時間の指数関数的にはならない。

初期条件と力学平衡の状態の関係

あまり役に立つことはわかっていない。初期条件と最終状態の間の関係をいろいろ調べている段階。

このへんは、基本的には前にいった数値計算でやられる。

- 1996 年頃に、宇宙論で考えるような初期条件の範囲内ではいろいろパラメータを変えてもできるものはみんな同じであるというシミュレーション結果が出た。
- が、この結果は実は間違い であったことが、より大規模なシミュレーションからわかった。

というわけで、わかっていない問題は非常に多い。

もう一つ大きな問題

星の数は実際には無限大というわけではない。

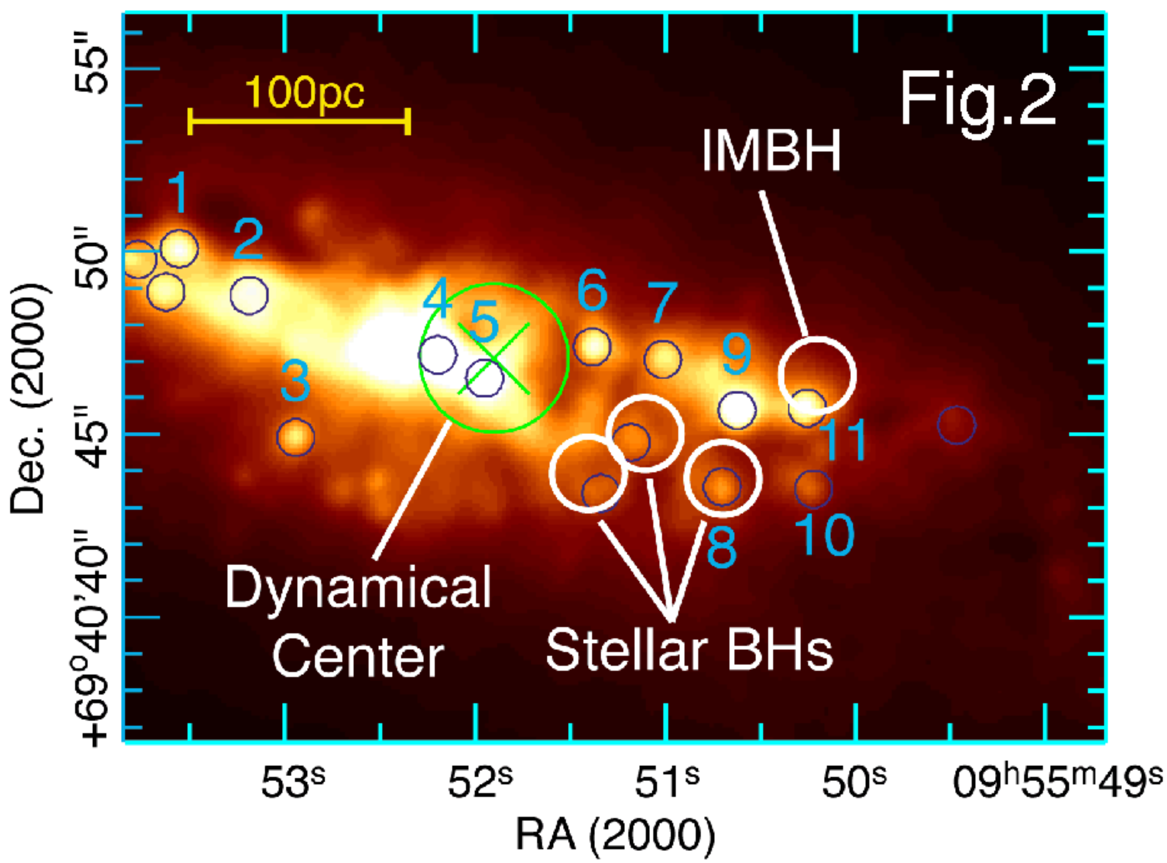
銀河： 10^{10} かなり多い、

散開星団、球状星団 $10^{4\sim6}$

銀河中心 巨大ブラックホール$+10^7$個程度の星

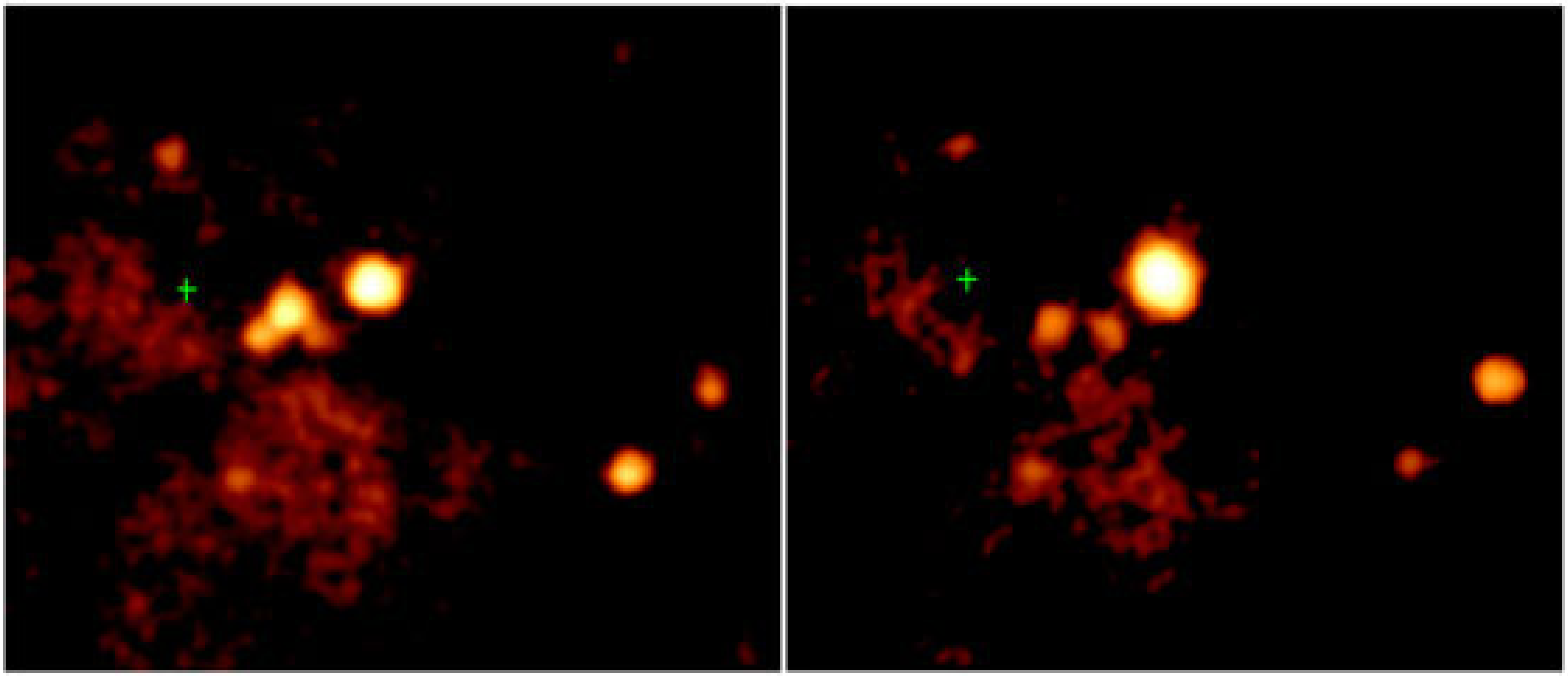
こういったところではどういうことが起きるか

銀河中心



近傍の銀河 M82 の中心部の「すばる」望遠鏡による写真

X線では



NASA Chandra X線衛星による写真

こういったところではいったい何がおきているか？

無限には星が多くない時

厳密には力学平衡にない

$\rightarrow$ それぞれの星の軌道はだんだん変わっていく

物理的には大自由度のハミルトン力学系

$\rightarrow$ 統計力学的（熱力学的）に振舞うはず

つまり：熱平衡状態（エントロピー最大）にむかって進化するはず。

（普通の気体なんかと同じ）

普通の気体との違い

- 重力のエネルギーは質量の 2 乗に比例
- 粒子を閉じ込めておく箱（境界）があるわけではない

2 つ違うとよくわからないので、違いを一つにしてみる。

具体的には：仮想的に球形の断熱壁でかこんだなかの理想気体を考える。

重力の効果があるくらい大きいもの。

断熱壁の中の理想気体

温度（熱エネルギー）が重力エネルギーよりもずっと大きい状態

これはもちろん重力がない時と変わらない

温度を段々下げていく（エネルギーを抜いていく）

↓

重力の効果が出てくる。

具体的には、中心の密度が上がって、壁のところが下がる。これは、重力と圧力勾配を釣り合わせるため。地球の大気が上にいくほど薄くなるのと同じ。

方程式と解析解

球対称な壁の中の、等温熱平衡なガスの方程式はこんなふう。

$$\frac{dp}{dM} = -\frac{M}{4\pi r^4}, \tag{24}$$

$$\frac{dr}{dM} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \tag{25}$$

$M(r)$ は半径 r の中の質量、p と ρ は圧力と密度、ここでは重力定数が 1 になるような単位系だとする。

方程式と解析解(続き)

座標系のとりかたが普通ではないが、恒星内部構造論では質量を座標にとる慣習がある。下の式は逆数とれば普通の式、上の式は

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho M}{r^2} \tag{26}$$

で、圧力変化が重力と釣り合う、という式である。温度は、状態方程式

$$p = \rho T \tag{27}$$

方程式と解析解 (3)

- 一般の境界条件で解析解があるわけではないが、$\rho \propto r^{-2}$ の形の解はある。(代入すれば解であることがわかる)
- 壁をつけた人工的な条件ではこの解は存在できるが、「自己重力系」としては存在できない (質量が無限大になる)
- 中心で有限密度の解も、$r \to \infty$ の極限では解析解に漸近する
- そういう、解の系列を考える。

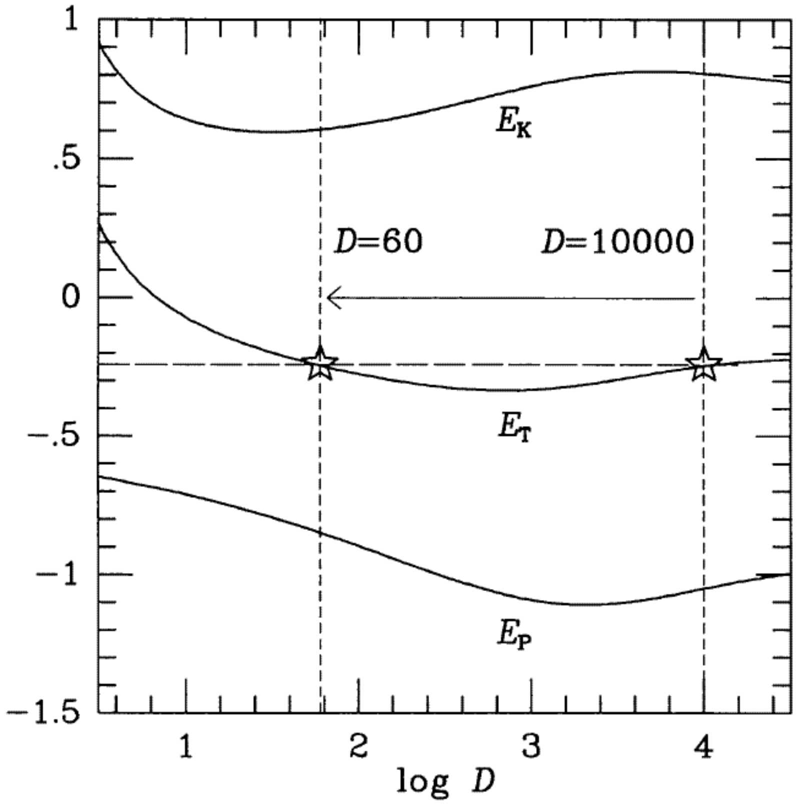
解の系列

- 物理的にしたいこと:ある質量のガスをある半径の球系の壁にいれて、段々温度を下げていく。そうすると、重力の効果が大きくなってきて中心と壁の密度比 (D とする) が大きくなる
- 計算機でこの解を求めるには:中心で適当な密度から始めて、外側にむかって積分していく。任意のとこである D の解が求まる。これを、質量、半径を (例えば) 1 になるようにスケール変換して、温度もあわせる。

スケール変換

- 半径 r, 質量 m, 温度 t の解があったとする。$G=1$ で考える。スケール変換では半径を $1/r$ 倍、質量を $1/m$ 倍するるので、重力エネルギーは r/m^2 倍になる。
- 熱エネルギーを同じ比率でスケールすれば、圧力と重力がちゃんと釣り合う解になっているはずである (ビリアル定理からくる要請) ので、温度は t/m 倍すればいい (はず)
- 始めからエネルギーだけ与えて、壁の中にある、という境界条件を満たす解を求めようとするとどうすればいいかわからないが、スケール変換すれば求められる。

エネルギーの下限



計算してみるとどこまでも温度を下げられるわけではない。
図に結果を示す。これは横軸に中心と壁の密度の比、縦軸にエネルギーをとったもの

熱平衡状態

$D = 709$ でエネルギーが最小になり、それ以上エネルギーが低い平衡状態はない。

さらに、エネルギーのほうから考えてみると、あるエネルギーに対してそれに対応する平衡状態が 2 つ以上あるところがある。

- もっとエネルギーが低い状態は？
- D が大きいところはいったいなにか？

密度比が限界より大きい状態

これは「熱力学的に不安定な平衡状態」になっている。

安定／不安定：ここでは「熱力学的」

温度が一様な平衡状態に、すこし温度差をつけてやる（熱エネルギーを移動してやる）

- もとに戻る：安定
- 戻らない：不安定

熱力学的安定性

普通の世の中のもの：戻るに決まっている。

熱をもらった方は温度が上がる。

とられたほうは温度が下がる。

熱い方から冷たい方に熱がながれるので、元に戻る。

ところが､､､重力が効いているとそうなるとは限らない。

熱力学的不安定性

条件によっては以下のようなことが起こる

中心部から熱を奪う → 温度／圧力が下がる → 圧力を釣り合わせるために収縮 → 重力が強くなる → もっと収縮 → 結果として温度が上がる。

これが起きると、熱を奪われた方が温度が上がるので、ますます熱が流れだし、いっそう温度が上がるという循環にはいる。

これを、「重力熱力学的不安定性」という。

どうやって安定性を調べるか

「重力熱力学的不安定性」:

計算機によって安定性を調べることで初めて発見されたもの。

「計算機で安定性を調べる」というのはそもそもどういうことかという原理的な話をすこしだけしておく。

安定性解析の原理

ここで問題なのは適当な偏微分方程式（系）

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A(f(x)) \tag{28}$$

ここで、 A は「汎関数」。具体的には、例えば普通の熱伝導なら f の空間2階微分。f は例えば温度。

の定常解 $f_0(x)$ があったとする。

定義により $A(f_0(x)) = 0$

少しずれた $f = f_0 + df$ 、df の方程式を作る。

線形化 (1)

df に何か入れればそれがどうなるかが計算できる

あらゆる可能な df について調べる？

そんなことがどうやってできるか？

これを可能にする方法が線形化して固有値問題にするということ。

線形化 (2)

仮定: df が f_0 よりもずっと小さい

df について線形な式にできる。

線形:

$$\frac{\partial df}{\partial t} = B(df(x)) \tag{29}$$

という形だったとして、

$$B(\alpha df_1(x)+\beta df_2(x)) = \alpha B(df_1(x))+\beta B(df_2(x)) \tag{30}$$

という性質を満たすということ。

線形化 (3)

もうちょっとわかりやすくいうと、

df_1 が解なら df_1 の定数倍も解

df_1, df_2 が解なら $df_1 + df_2$ も解

ということ。

固有関数

このように線形な方程式には、固有値、固有関数というものがある。

固有関数は、

$$\lambda df = B(df) \tag{31}$$

の解。λ が固有値。

この時、時間発展が $df = e^{\lambda t} df_0$ の形に書ける。

一般には任意の関数が固有関数の重ね合わせで書けるので、これら固有関数だけを調べればいいことになる。

固有値と安定性

これの解（固有関数）は一般には無限個ある。

対応する固有値λ も無限個ある。

「もっとも大きい固有値」から順に求めるような計算方法があるので、求まった最大の固有値が負（実数部分が）であれば安定ということになる。

もうちょっと具体的な計算法

まず f_0 自体が必要。

空間も細かい刻みにわけて、その各点での値を近似的に計算する。

出てくるのは連立方程式になる。これを計算機を使って解く。

f_0 が求まると、それを使って df についての方程式を具体的に書ける。

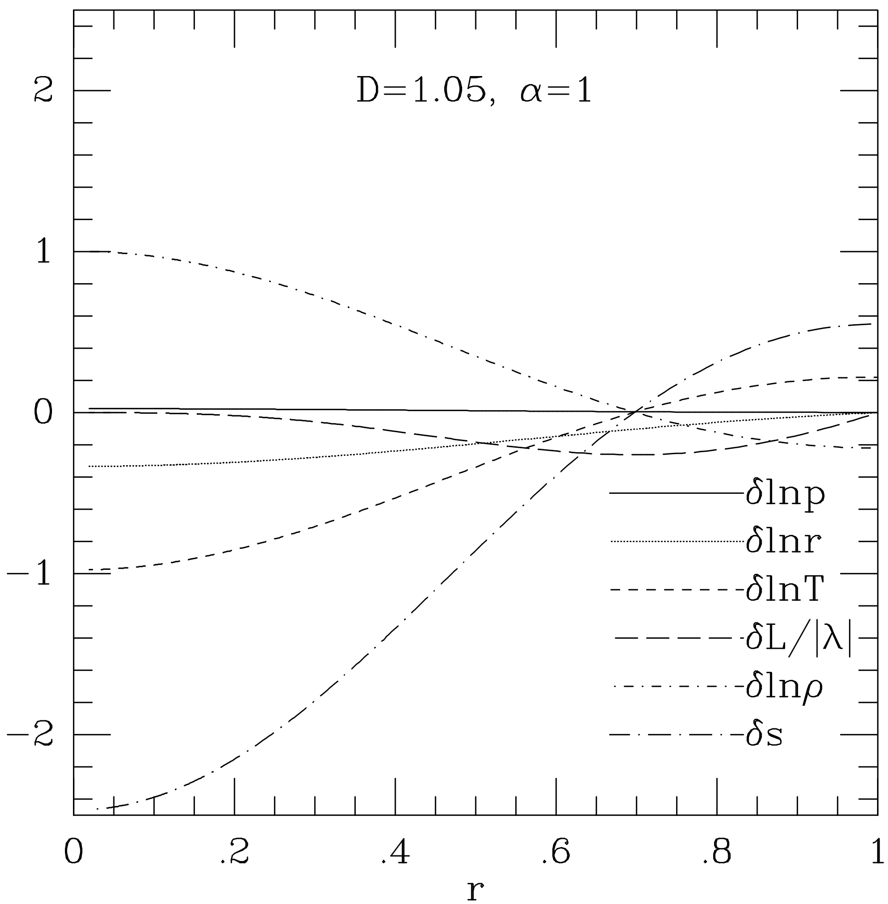
df についての方程式

これもやっぱり連立方程式になるが、線形であることから連立一次方程式になる。つまり行列でかける。

この行列の固有値、固有ベクトルを求めると、元の問題の固有値、固有関数の近似値になっている。

と、なんかややこしいが、計算機で安定性を調べるという時ににはだいたいどんな分野でも同じようなことが出てくるので、ちょっと詳しく書いてみた。

安定な場合, $D = 1.05$

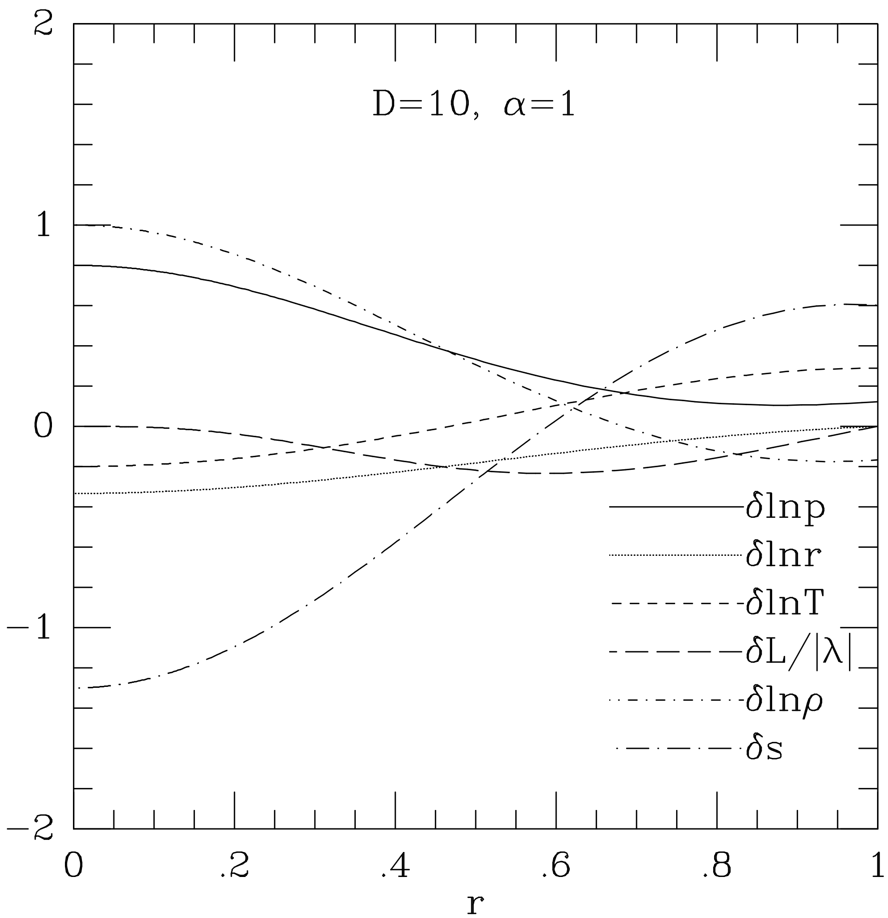


λ: 固有値

- 圧力は変化しない
- エントロピーと温度が比例

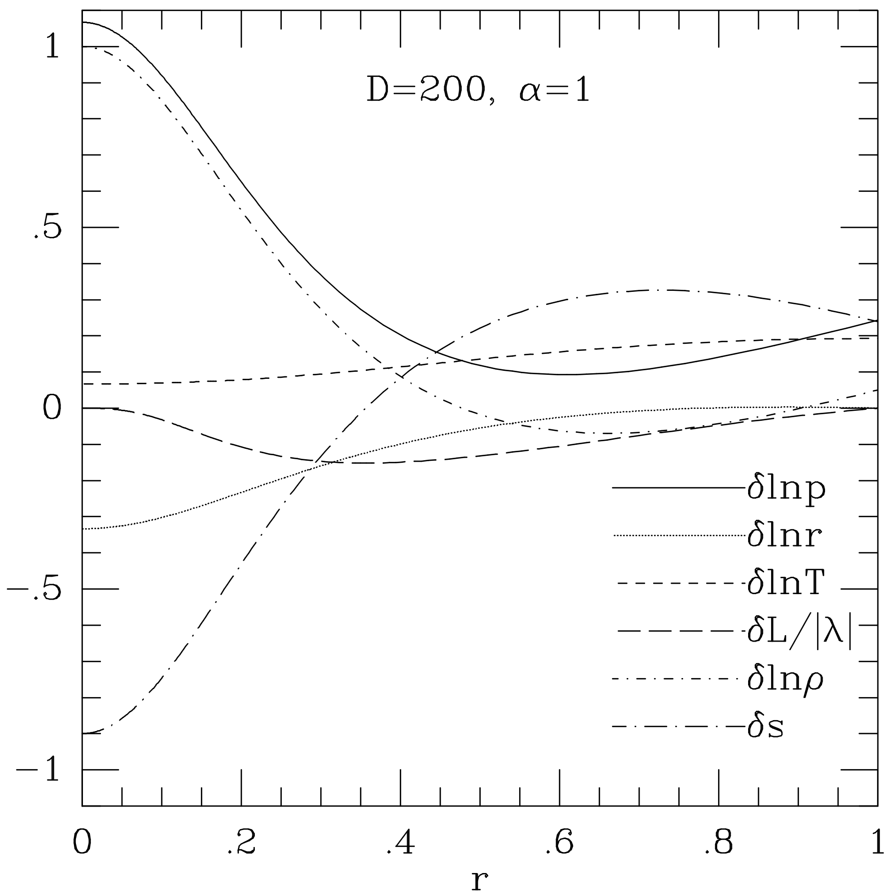
要するに、普通の断熱容器のなかのガス。

安定な場合(2), $D = 10$



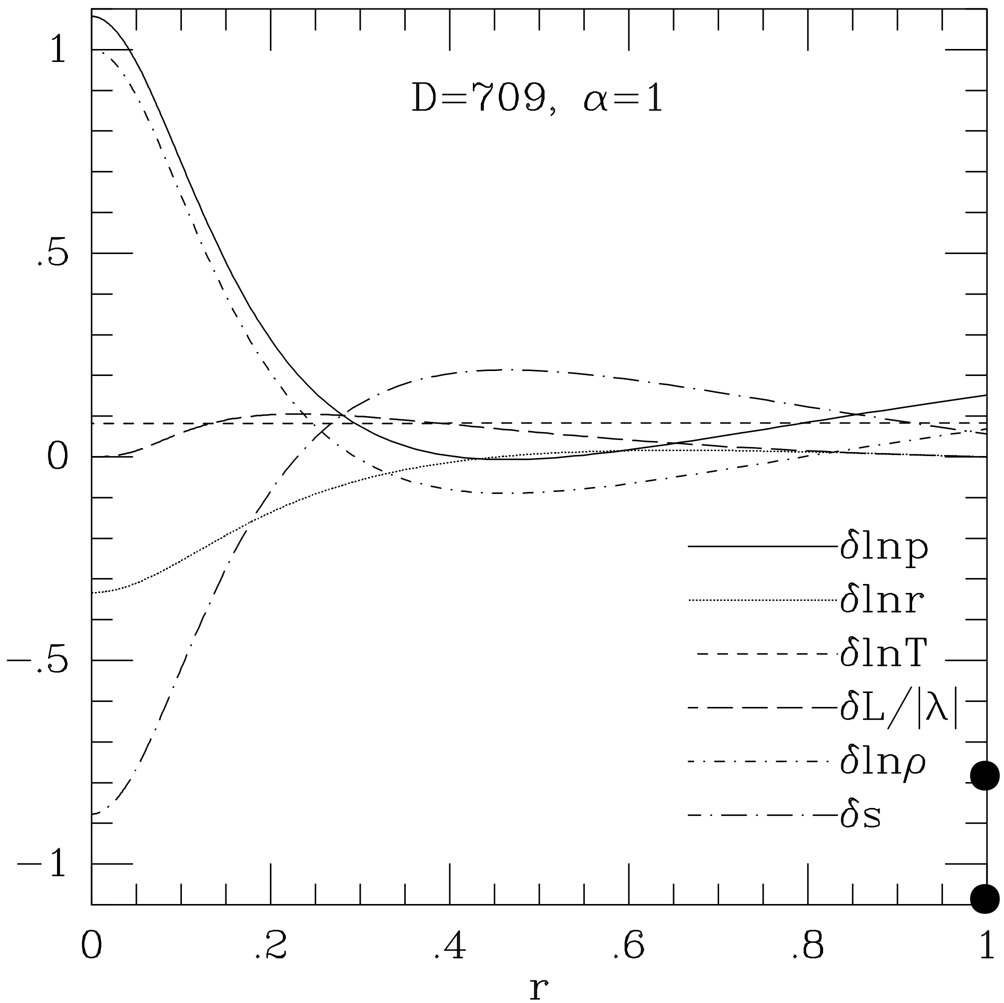
- 中心で圧力が上がる
- 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

安定な場合 (3), $D = 100$



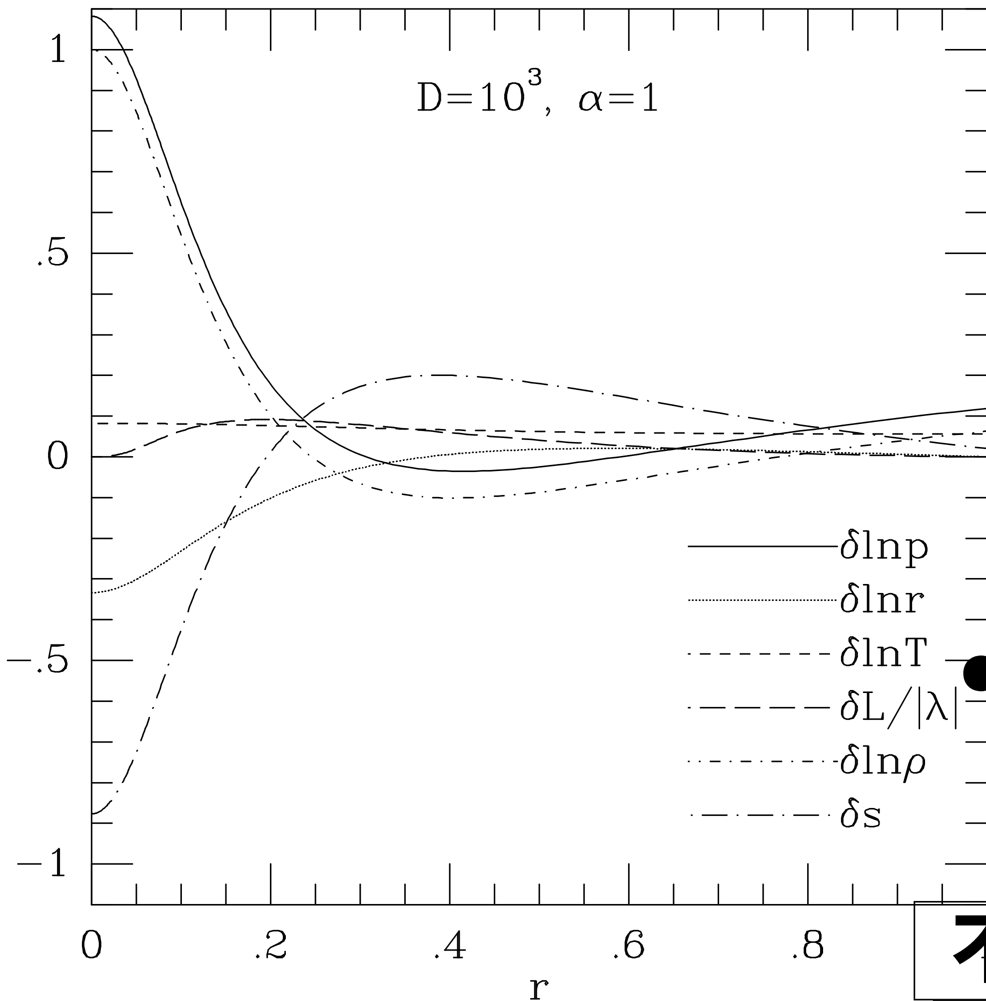
- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き（この場合中心の方が低温）
- 熱力学的には安定

中立安定, $D = 709$



- 温度勾配ができない
- したがって、摂動がもとに戻らない

不安定, $D = 1000$



- 中心のほうが温度上昇が大きい

不安定になっている

重力熱力学的不安定性

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

一応、「重力熱力学的不安定性」 gravothermal instavility という名前がついている。

発見： V. Antnov (1961)

上のような安定性の明確な定式化: Hachisu & Sugimoto (1978)

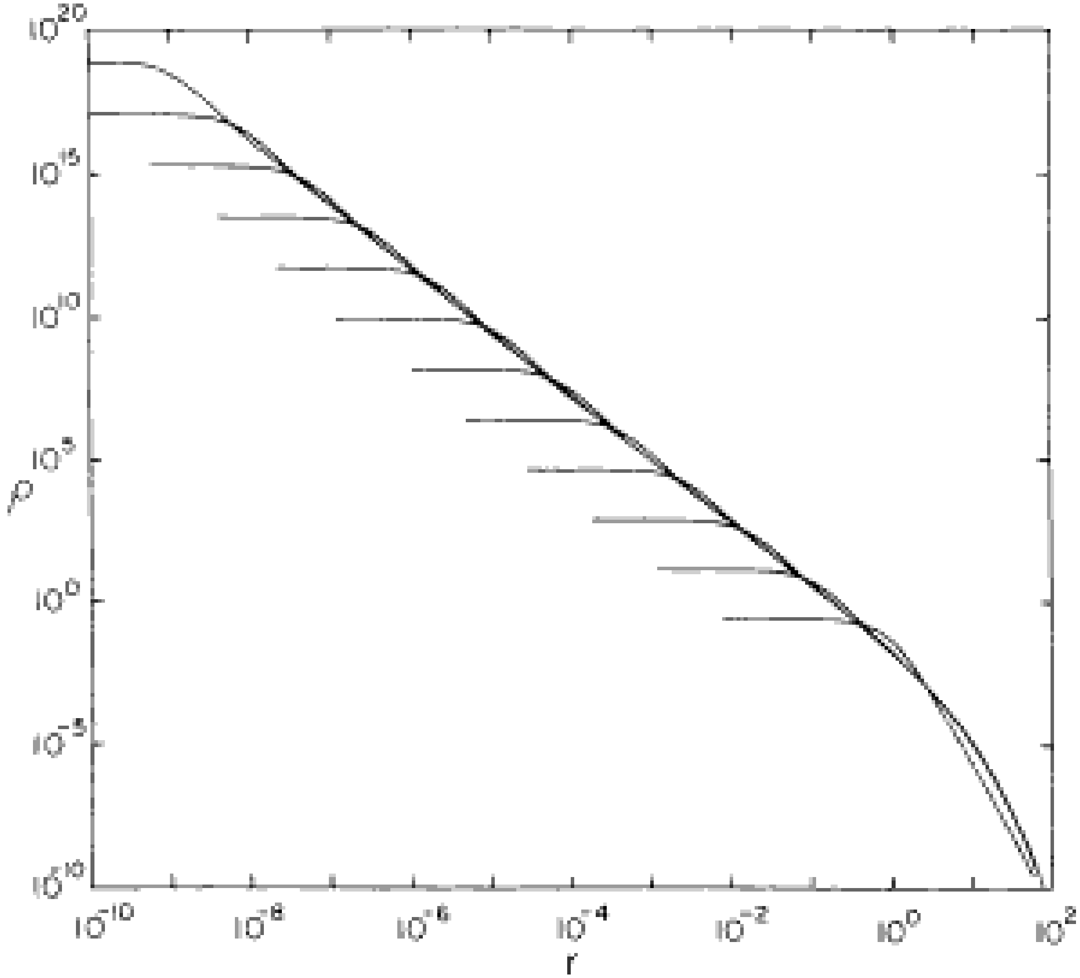
もっと先の進化

摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

Hachisu *et al.* (1978)：自己重力流体について数値計算した。

Cohn (1980): 流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。

自己相似解



10^{20}
10^{15}
10^{10}
10^{5}
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
ρ
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
r

最終状態？

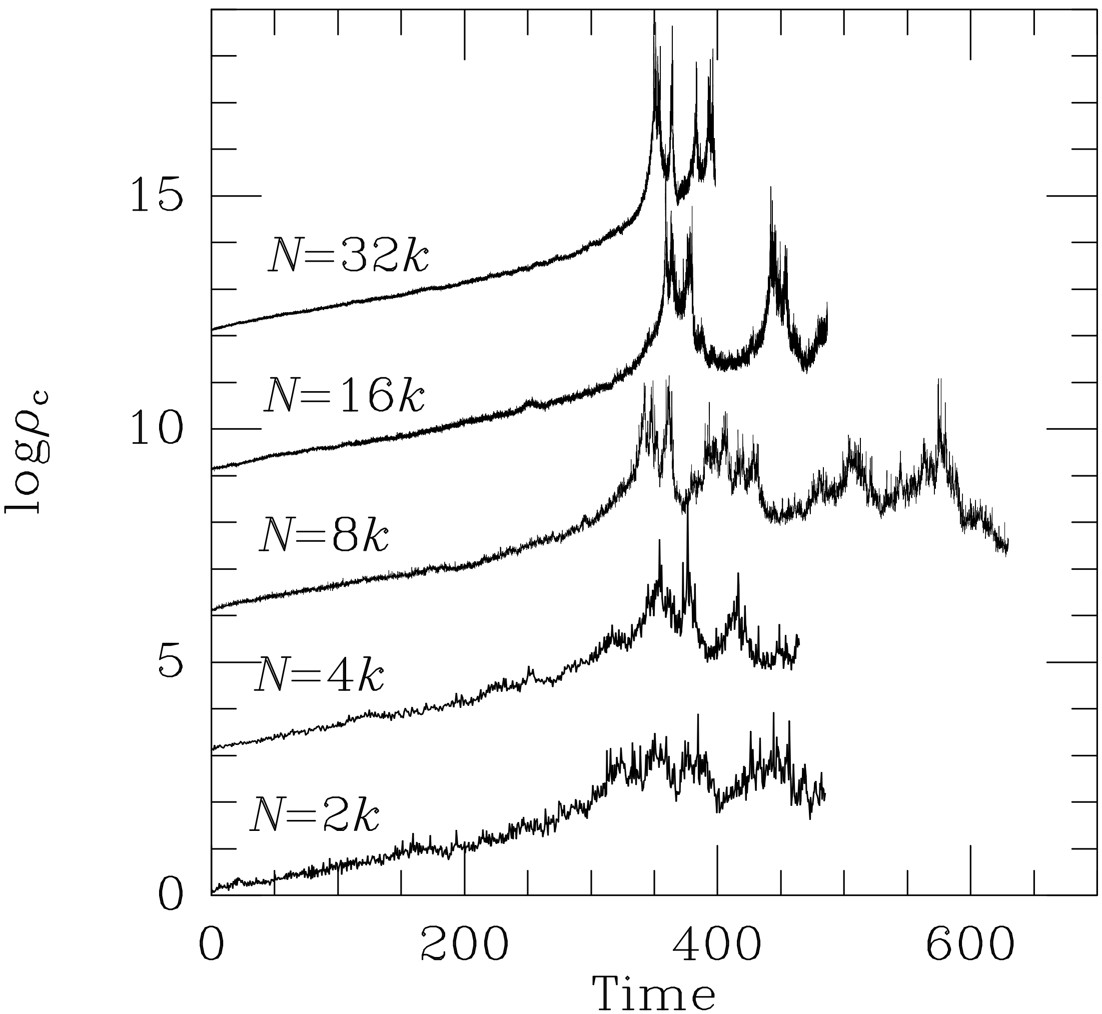
中心部の密度が非常に上がってくると、、

- 星同士の近接遭遇
- 3 星が同時に近付く

連星ができる。これは「エネルギー放出反応」（核融合と同じ）

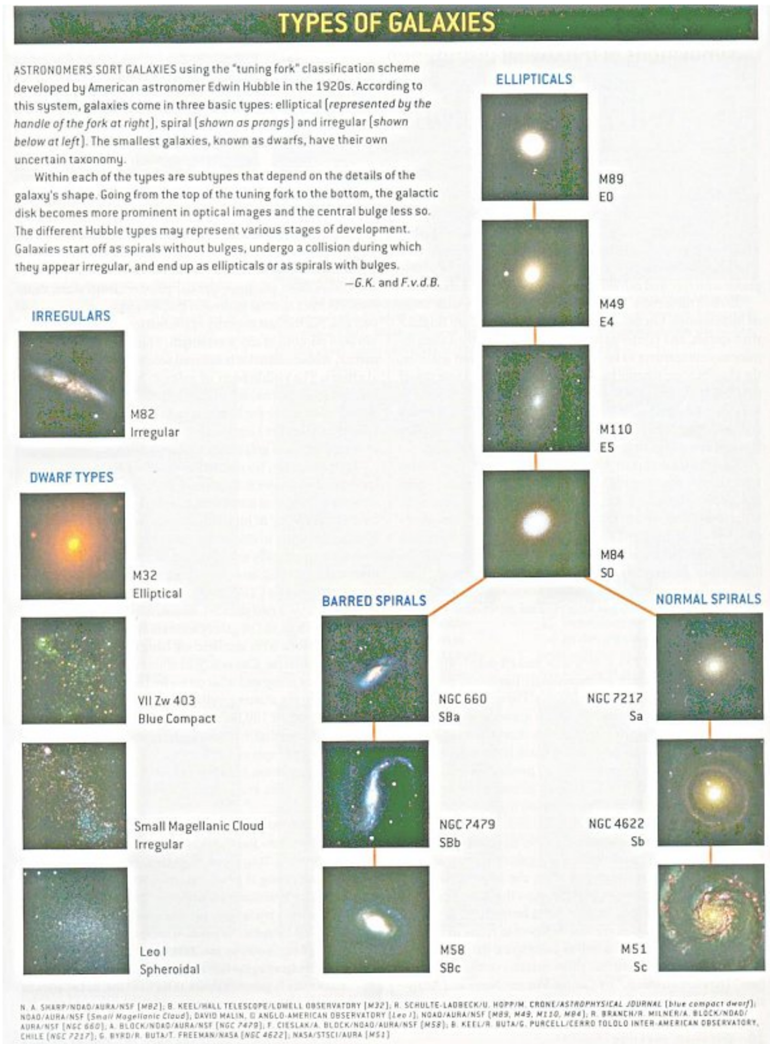
これにより、今度は中心部が膨張を始めると理論的には予測されている（重力熱力学的振動）

重力熱力学的振動



球状星団の中心部ではこのようなことが起こっている可能性が高い。

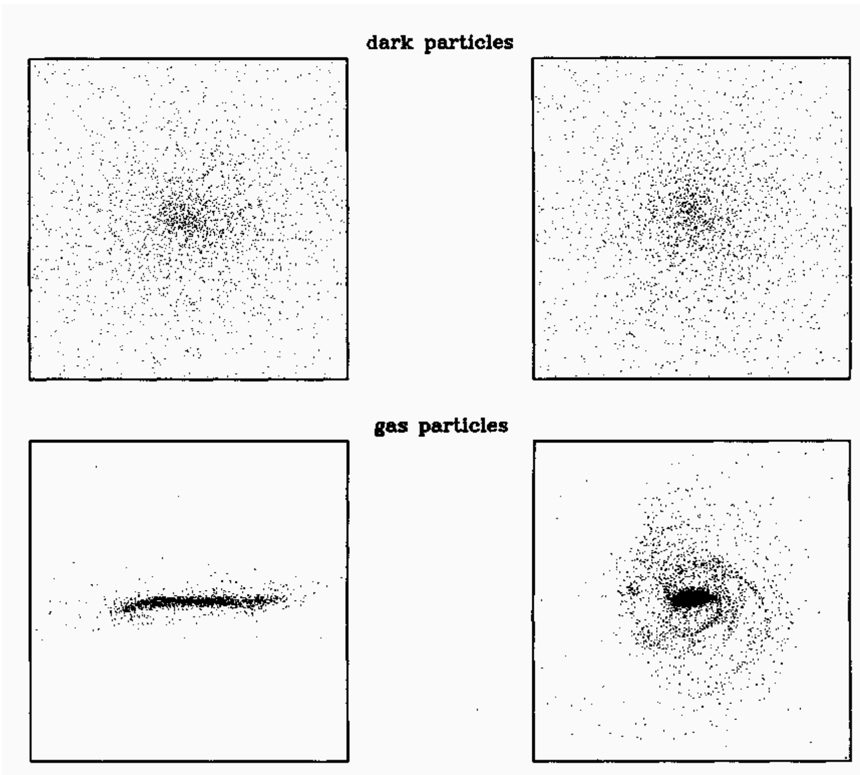
銀河形成シミュレーション



基本的な考え方:

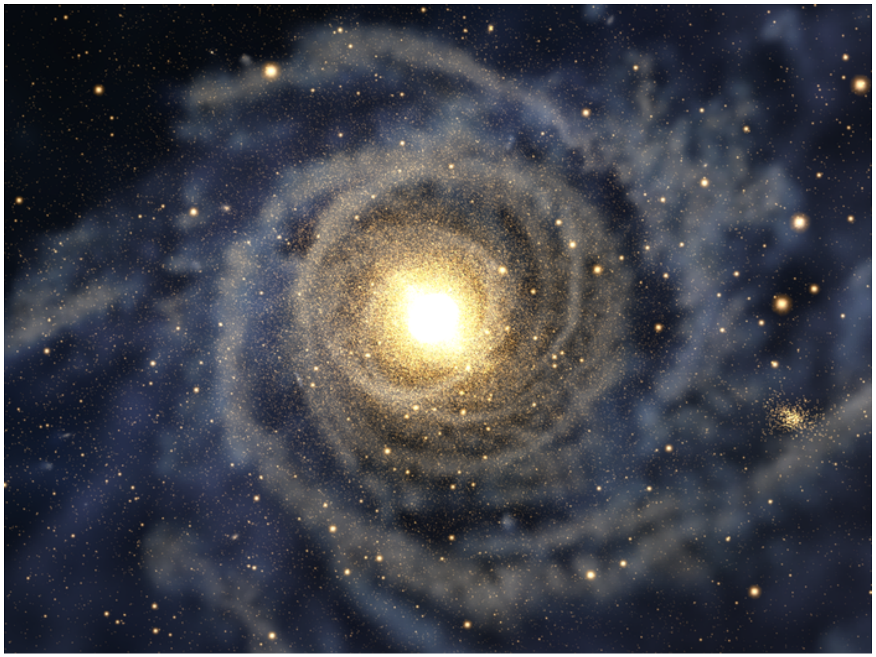
- 初期条件からの、銀河の「まるごと」シミュレーション
- 銀河の多様性の起源を理解したい

Katz and Gunn 1992



- ダークマター+ガス+星
- 1 万粒子くらい、 Cray YMP で1000時間くらいの計算
- 1 粒子の質量: 1000 万 太陽質量くらい

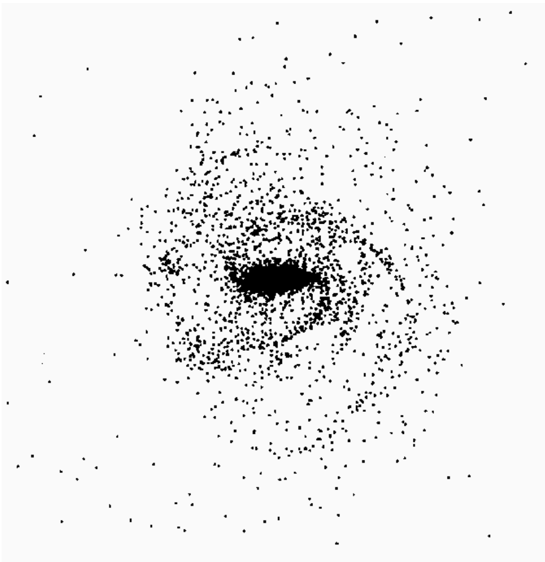
Saitoh et al. 2005

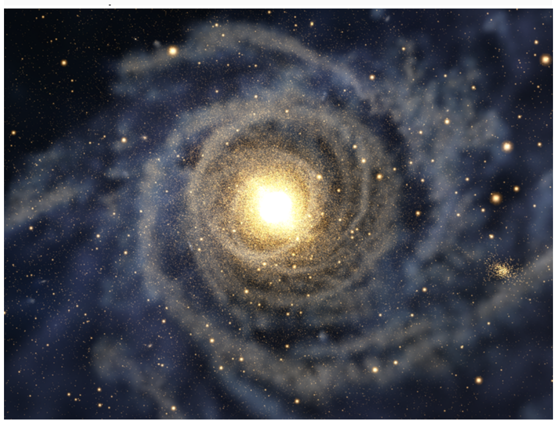


animation

- ダークマター+ガス+星
- 200万粒子、GRAPE-5 で1年(!)くらいの計算
- 1粒子の質量: 1万 太陽質量くらい

分解能を上げるといいことがあるか？





- そうでもない？
- 大事なこと:物理過程のより適切な扱い
  - 星形成
  - 超新星爆発からのエネルギーインプット

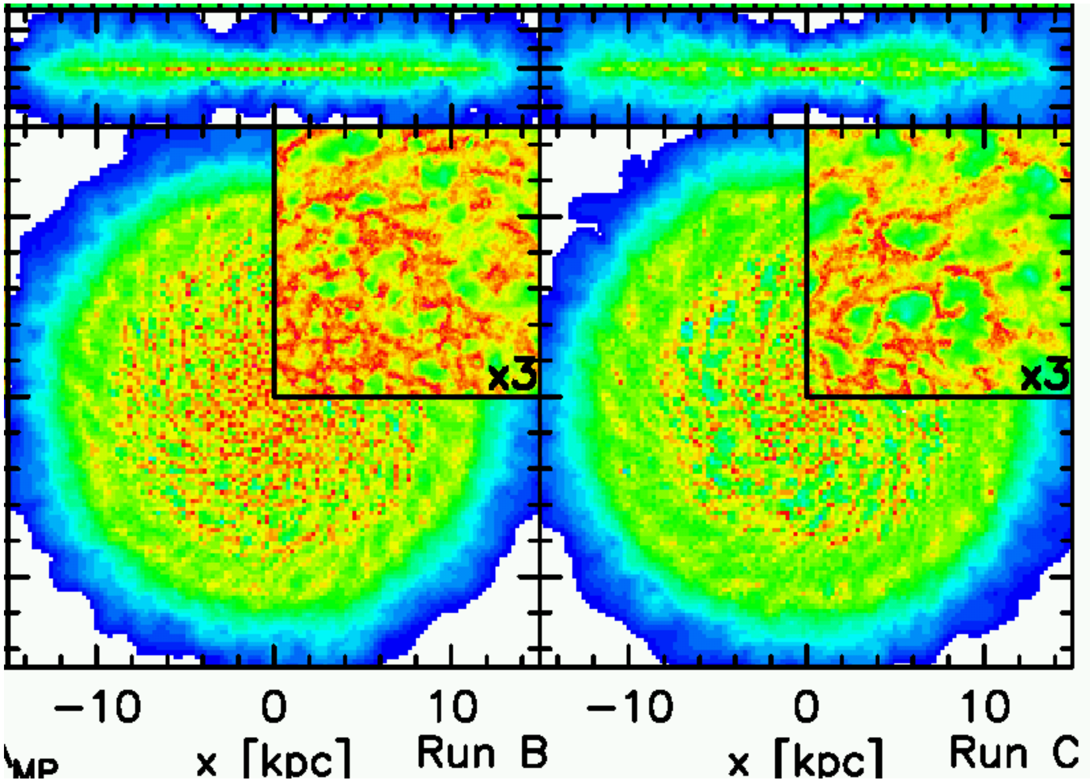
星形成過程のモデル

- 本当に星 1 つを作るシミュレーション:分解能が太陽質量より 4-5 桁高い必要あり
- 現在できる限界: 粒子の質量が太陽の 1000 倍。8 桁くらい足りない
- 星ができる過程のモデルが必要
  - ガスが十分に低温・高密度になったら、星に変わる、とする
  - いくつかフリーパラメータがある
  - できる銀河の構造がパラメータのとりかたによってしまう、、、、
- 超新星の扱いにも同様な問題

どれくらいの分解能でどうすればいいか？

- 答があうようになったらわかる？
- ガス粒子が星形成領域や分子雲より大きいようでは多分駄目
- 理論的には、十分な分解能があれば単純にガスを星に変えるだけでよくなるはず。
- そこに近付いている？
- あと 1-2 桁？

Saitoh et al. 2007



星形成のタイムスケールを 15 倍くらい変えてみた

あんまり大きくは結果が変わらなかった

分解能が低い計算では、星形成のタイムスケールを 15 倍小さくしたら銀河が爆発してしまう。

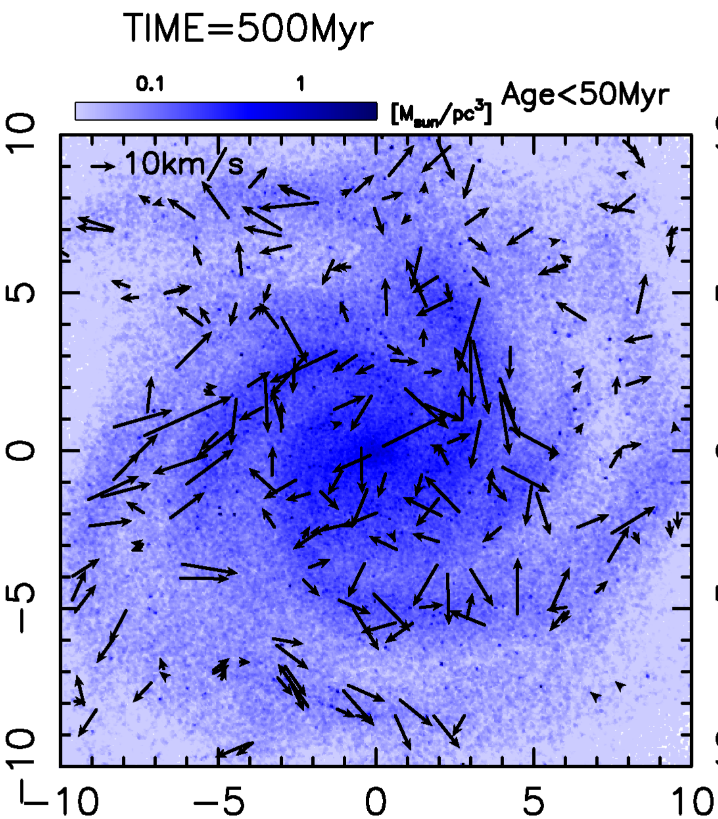
アニメーション

Star formation with SPH

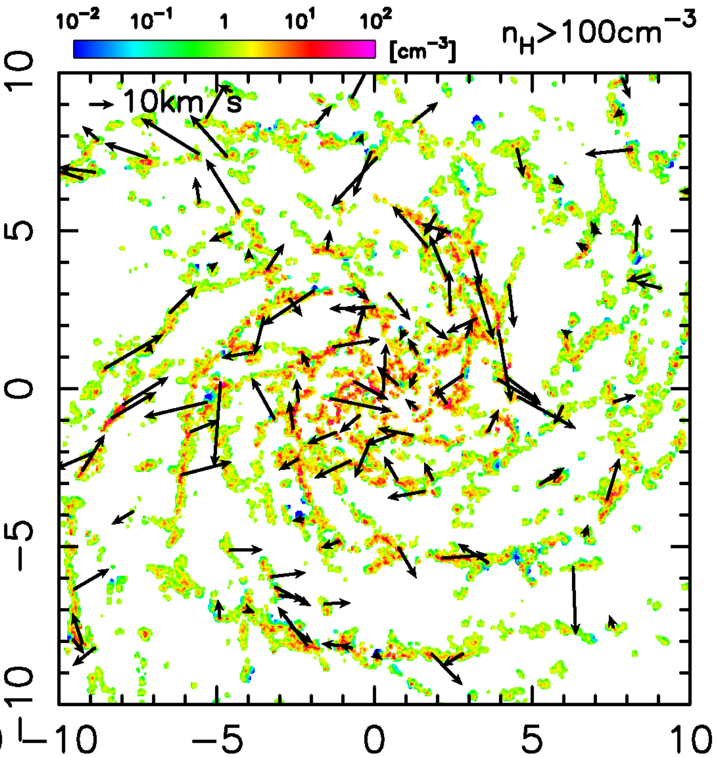
Large scale structure formation with AMR

銀河円盤

渦巻構造と、円運動からのずれ animation (Baba et al 2009) 1 2



星の分布



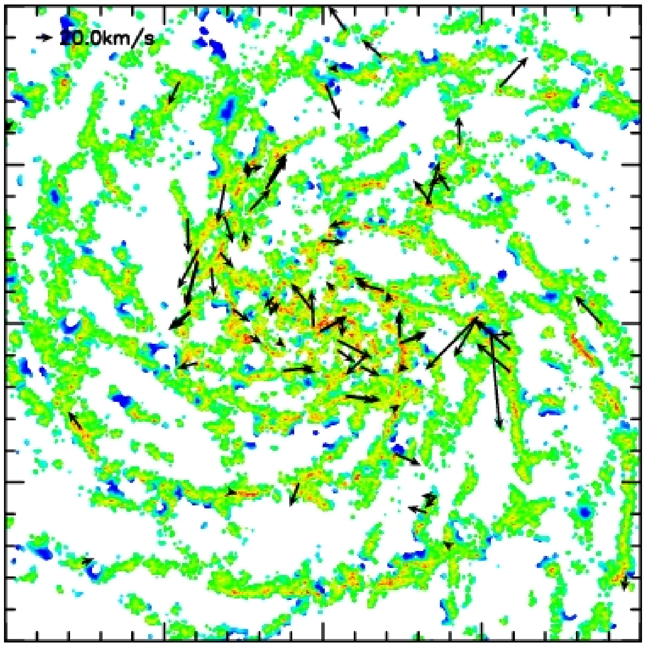
冷たいガスの分布

シミュレーションの詳細

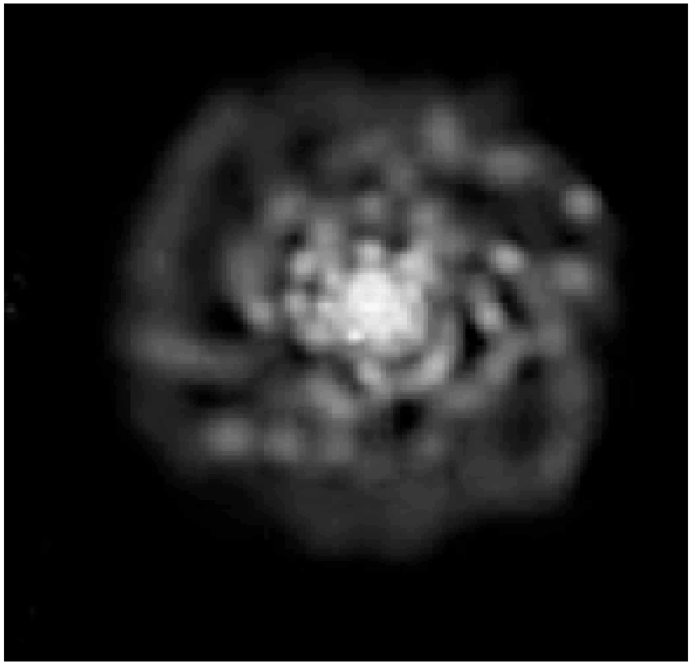
- ガスが低温・高密度になるところまで解く
- 多数の SPH 粒子で高分解能シミュレーション
- 計算機には国立天文台の Cray XT4、斎藤貴之さん開発の ASURA コード

- 10pc ソフトニング ($\leftarrow$ 500pc)
- ガスは温度 10K まで解く ($\leftarrow$ 10^4K)
- 粒子質量 $3000M_\odot$ ($\leftarrow$ $10^5 M_\odot$)

高分解能モデルと観測



低分解能モデルと観測



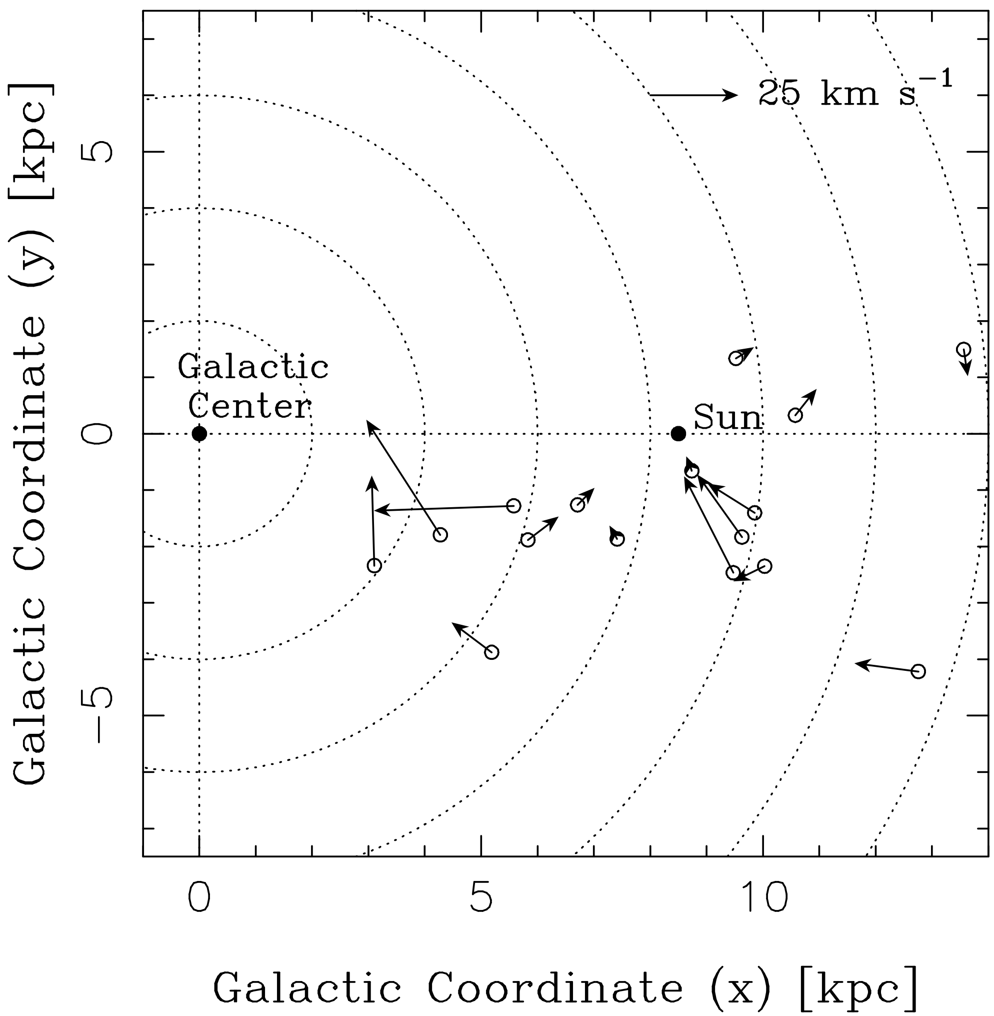
高分解能シミュレーションでわかってきたこと

- 星形成は大きなスケールの渦巻構造と関係
- 観測で見える複数アームがある渦巻は、定常ではなく形成・消滅を繰り返している
- この結果は、星形成のモデルの詳細にほとんど依然しない

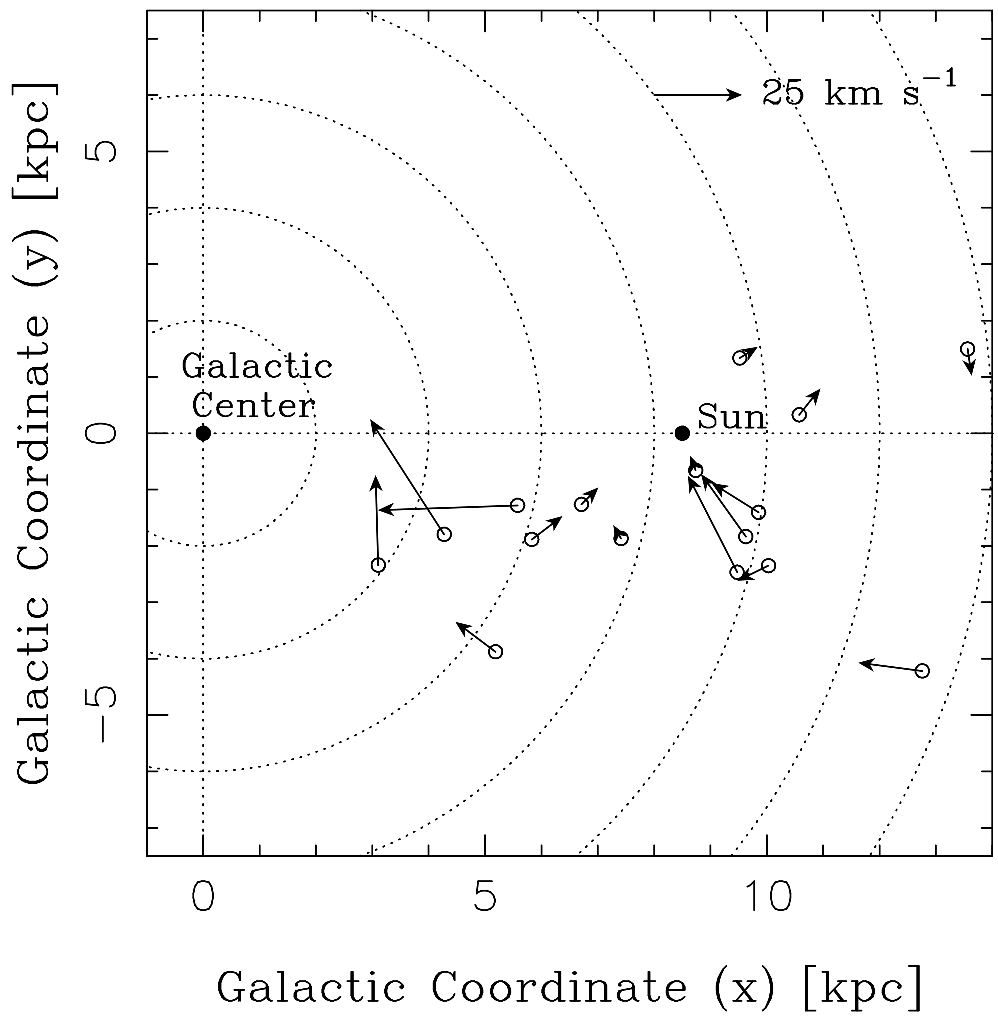
電波干渉計による観測

- **2006: Xu et al, Science 311, 54**
- **Nov 2008: Burst of results from VLBA**
- **Several data from VERA**

(Compiled by Dr. Asaki)



電波干渉計による観測

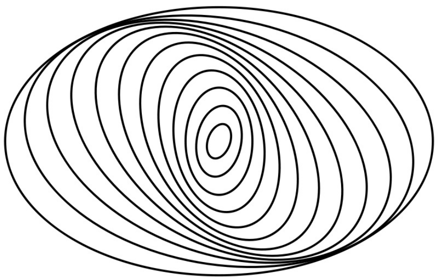


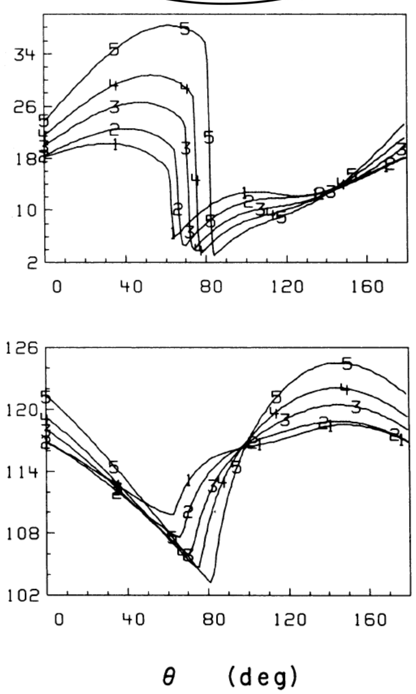
- 円運動からの大きなずれ ($\sim$ 30km/s)
- 空間相関もあり？

このような大きな運動の起源は？

教科書に書いてあること

定常密度波



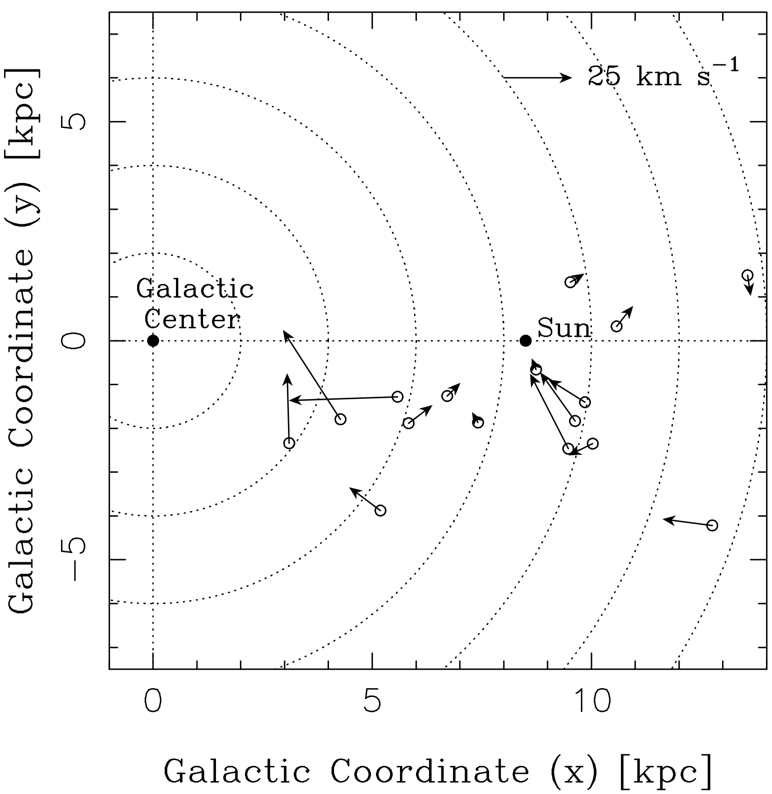


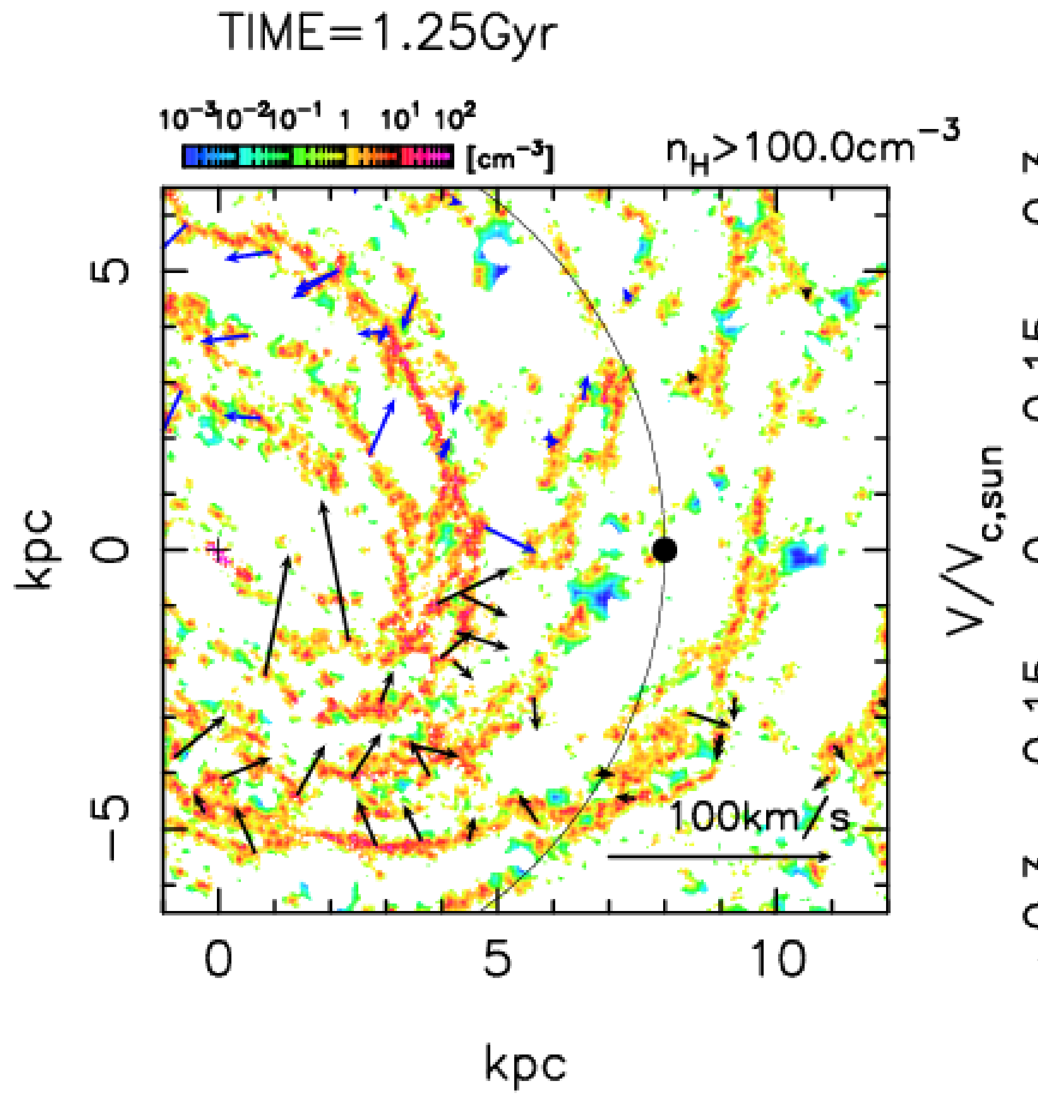
- 渦巻構造は実体ではなく、密度波
- ガスは、渦巻が作るポテンシャルの底を通る時に圧縮されて、そこで星を作る
- 星やガスの円運動からのずれはごく小さい

観測ともシミュレーション結果とも全然あってない､､､

比較

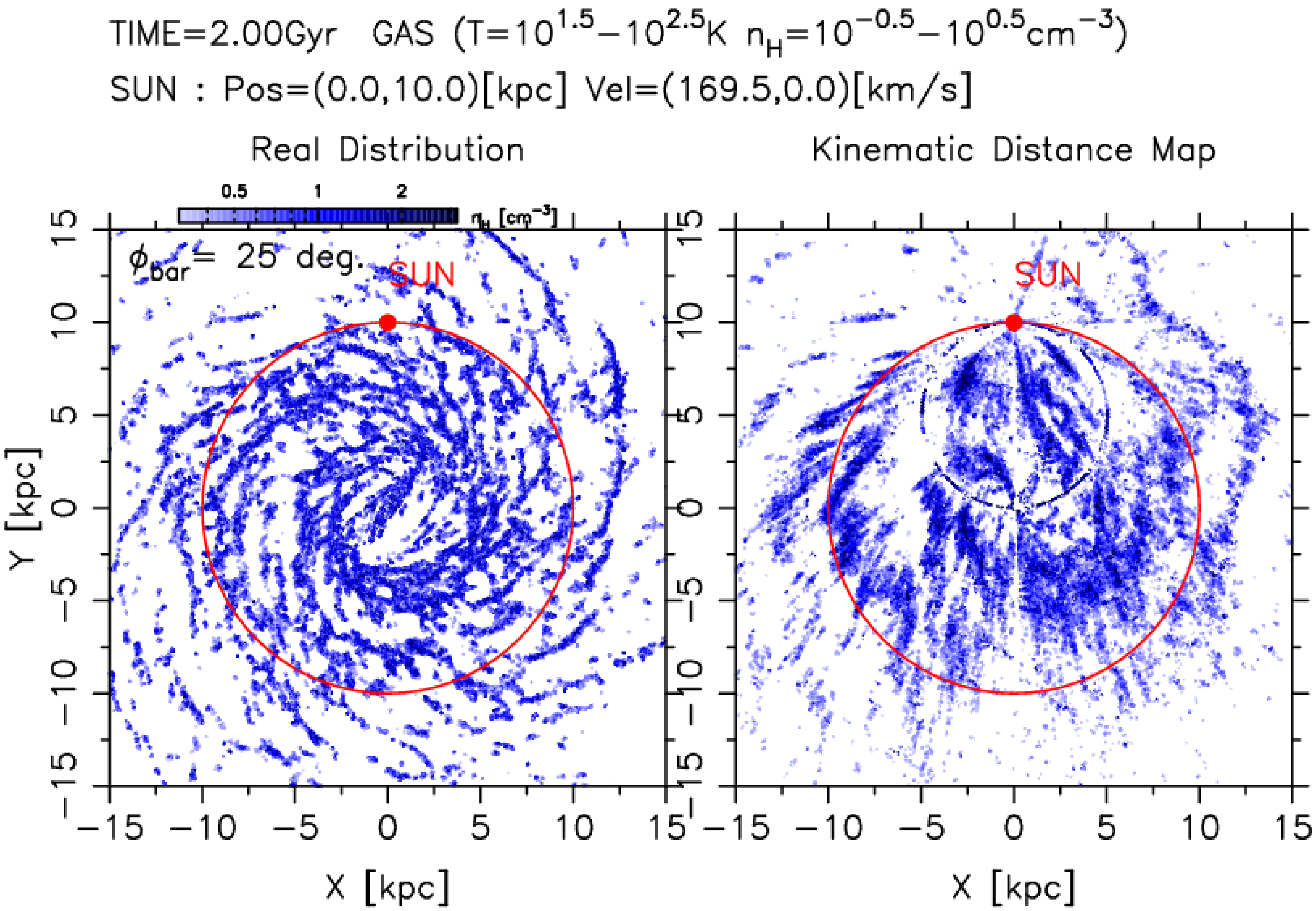
観測とシミュレーション





似ているような気が？

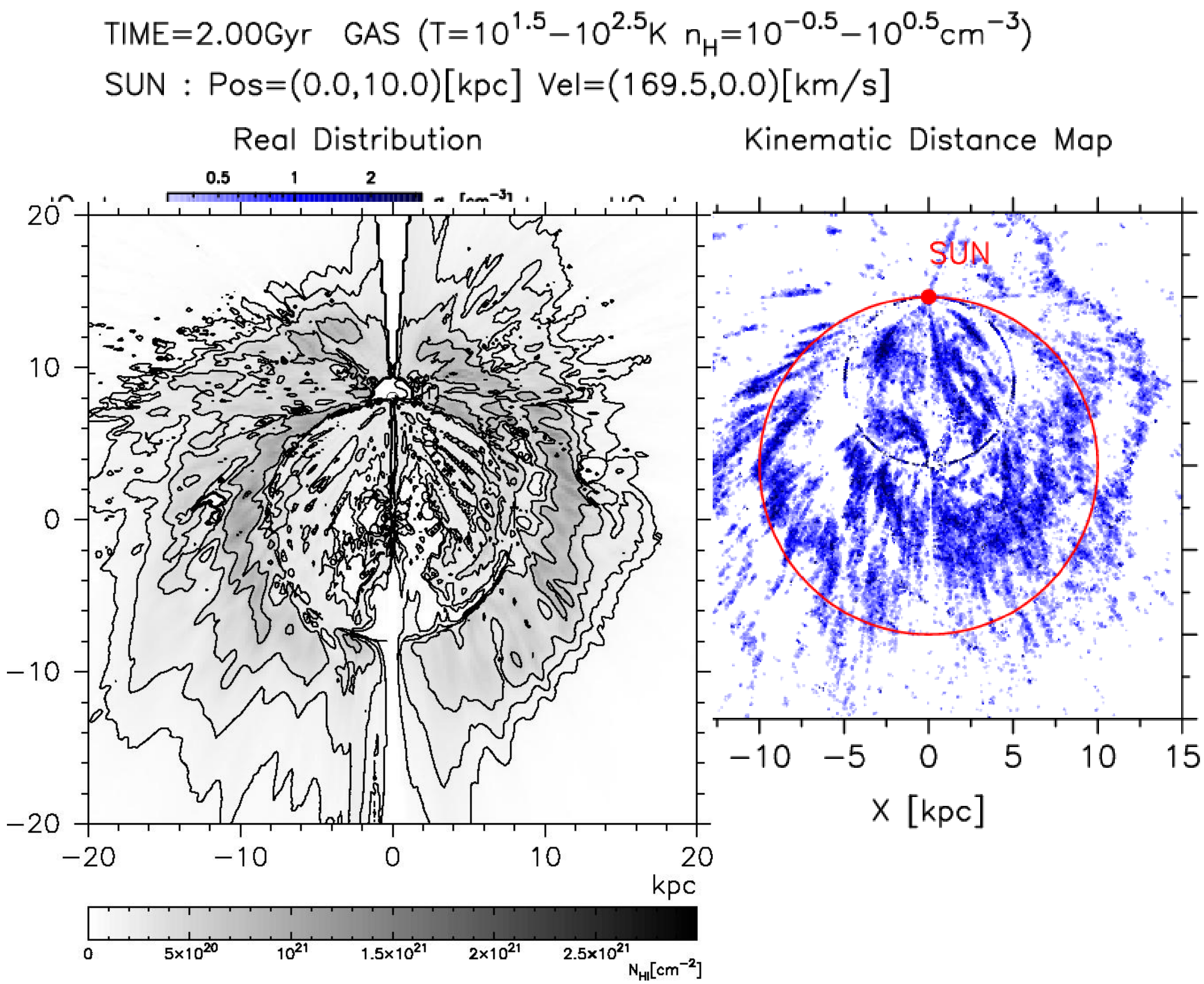
運動学的距離



「円運動をしている」と仮定すると、速度の観測から距離が求まる

シミュレーション結果を観測すると、、、、、

運動学的距離

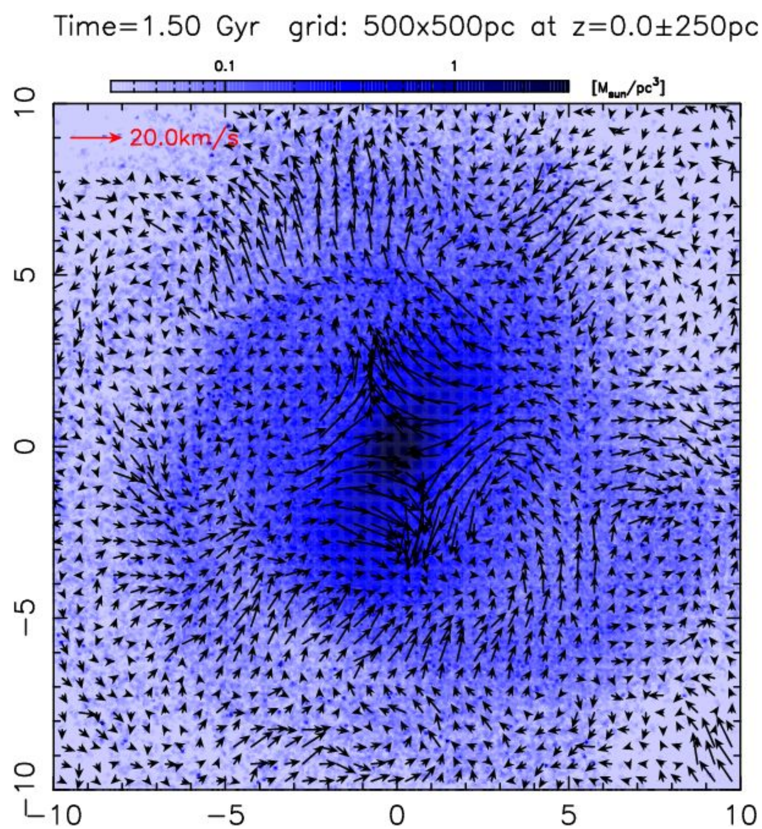


観測 (左) とシミュレーション (右) を比較すると、同じような構造

星のスパイラルの運動

星の運動の円運動からのずれ

- スパイラルアームは実体、密度波ではない
  - 古い星の平均の円運動からのずれも結構大きい
  - キロパーセクスケールの構造がある



ガス＋星の銀河円盤シミュレーションのまとめ

- 高分解能計算ではスパイラルアームは自然にできる
- アームは定常ではなく、常に生成消滅している
- シミュレーション結果を「観測」すると、我々の銀河系の観測の色々な特徴を再現できる

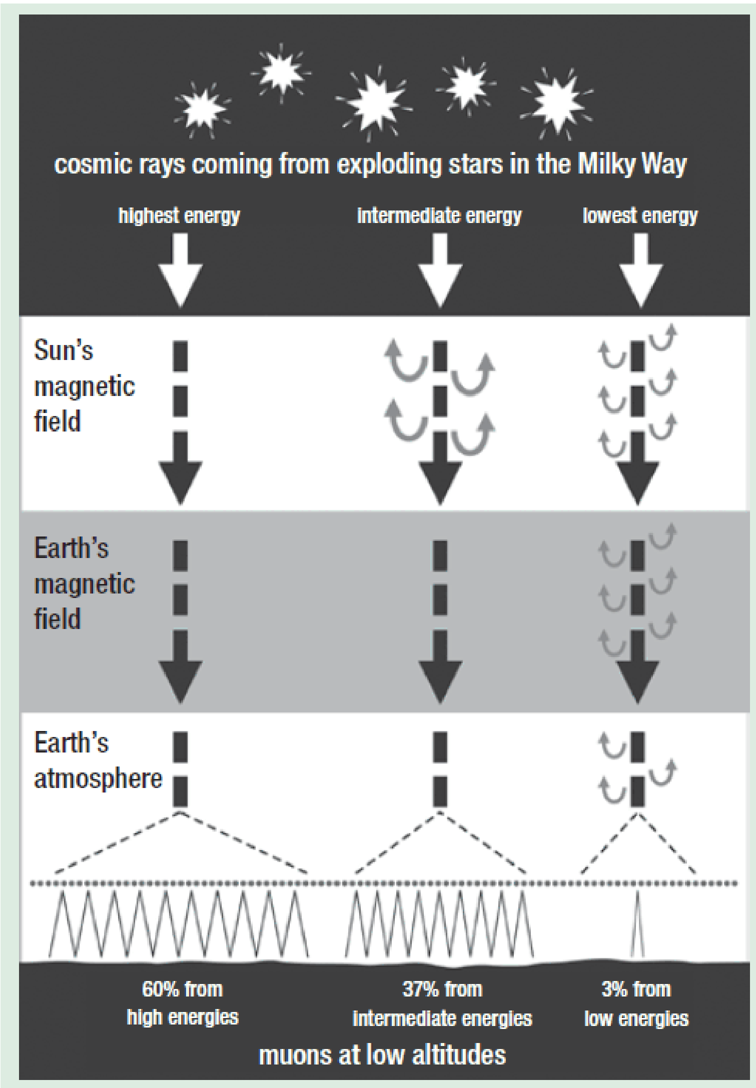
銀河力学と気候変動

- 導入: スベンスマーク仮説と銀河-太陽相互作用
- 太陽の銀河内運動を遡る
- まとめ

導入: スベンスマーク仮説と
銀河- 太陽相互作用

- スベンスマーク仮説
- 銀河渦状肢と太陽

スベンスマーク仮説

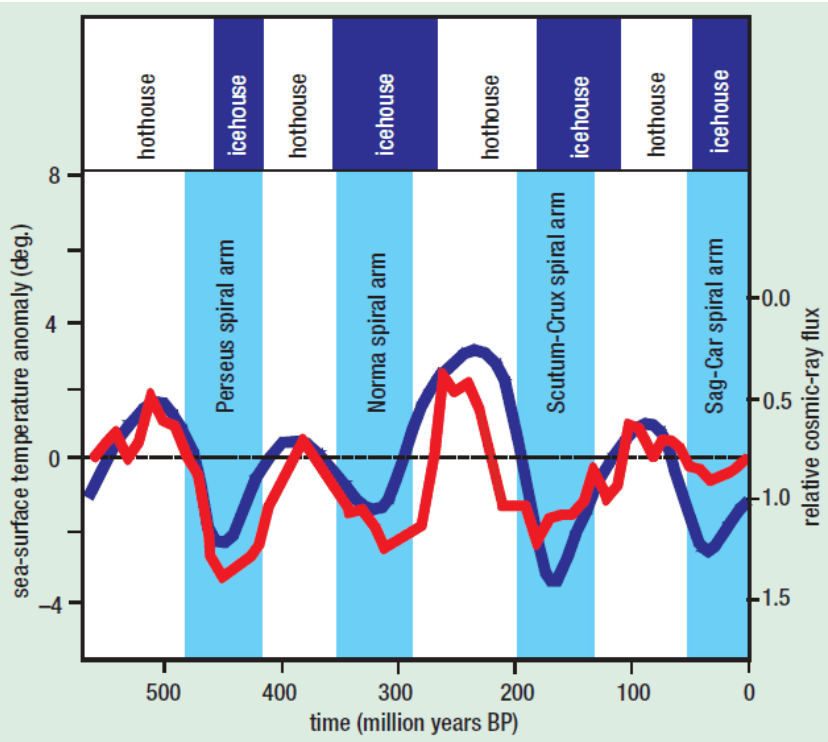


Svensmark 2007 から
基本的には、銀河宇宙線の地球までふってくる量が増えると雲が増えて寒くなる、という話

宇宙線が増えるメカニズム

- 地球磁場の変化
- 太陽風の変化
- 銀河宇宙線自体の変化：近傍での超新星爆発の増加とか

長周期の気候変動



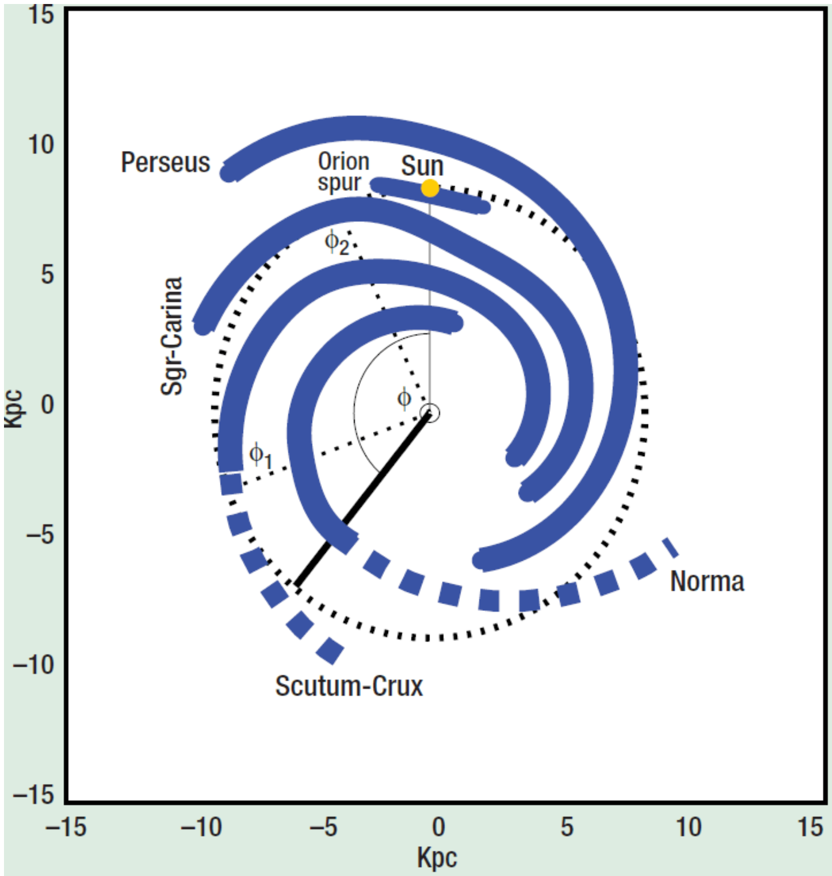
- 1.4 億年くらいの周期の気候変動がある

  (牧野はよく知らないので詳しくは知っている人に聞いて下さい)

- 長周期の起源: 地球の内部や軌道運動ではなさそう (???)

- 銀河の渦状肢を通過すると宇宙線は増えるのでは？

銀河系と太陽



- 渦状肢は定常密度波で、太陽の位置の円運動とは違う角速度で動いている
- なので、太陽がほぼ周期的に渦状肢を横切る
- 渦状肢のところでは、星間ガスが圧縮されて活発な星形成が起きている
- 宇宙線が多くなっていて寒冷化

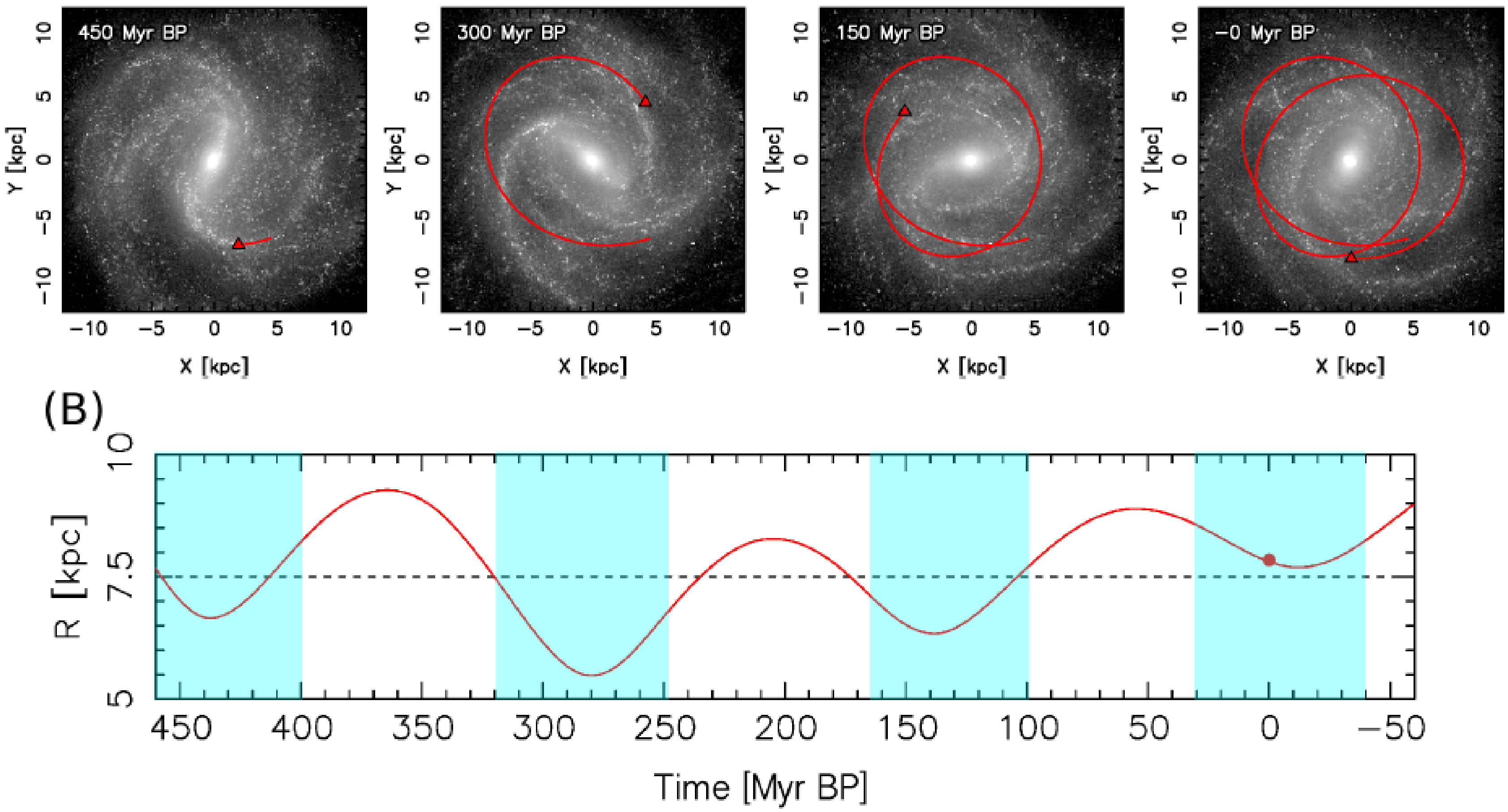
いくつもの疑問

- そもそも星形成が高いくらいで本当に寒冷化なんかするのか？(今日はこの話はしません。すみません)
- 渦状肢って一定のパターンじゃないし
- 太陽の運動はどんなふうなのか？

「スベンスマーク仮説」は？

- 渦状肢は定常ではないし、ケプラー速度と違う「パターン速度」があるわけではない
- なので、「太陽と渦状肢の周期的遭遇」はない
- 本当のところはどうか、我々の銀河系に近い (「太陽」から観測すると大域構造が非常に近い) シミュレーションモデルで太陽に近い速度の星の運動を過去にさかのぼってみた。

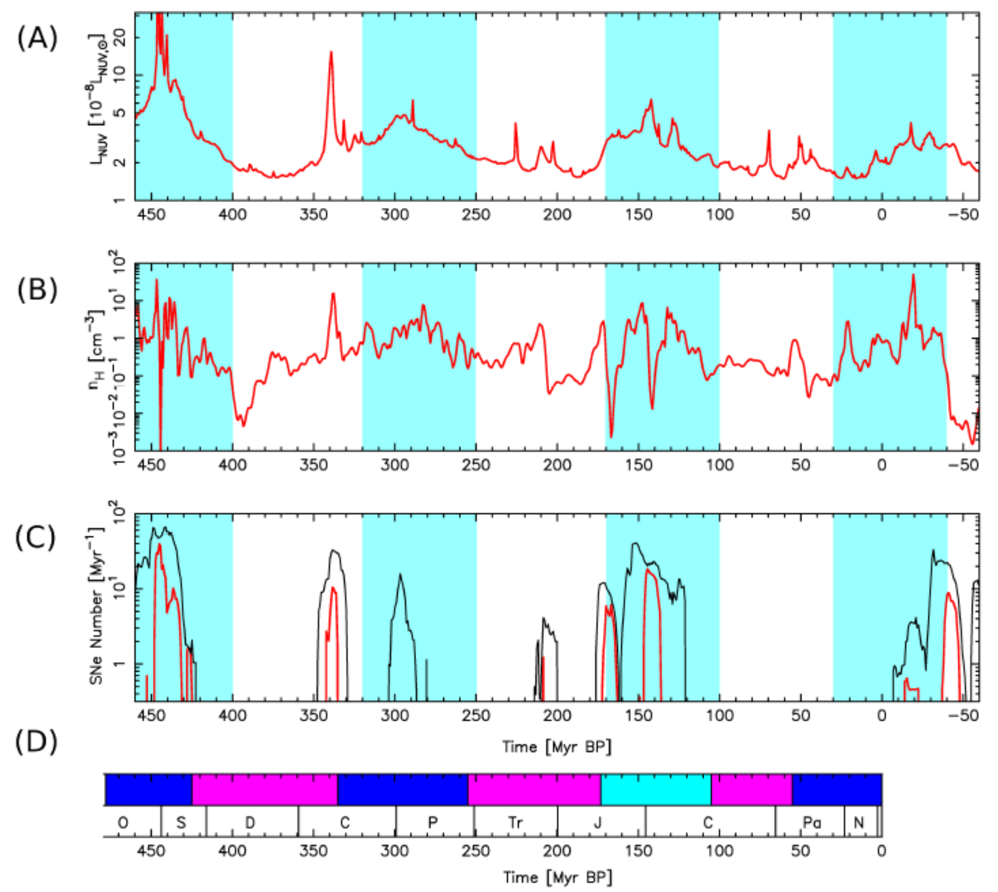
結果:銀河系と太陽



青:寒冷期

寒冷期には銀河中心に近い？これはフリーパラメータなしで
位相まで一致。

太陽周りの環境変化



- 上: 紫外線での明るさ (星形成率を表す)
- 中: 星間ガスの密度
- 下: 超新星発生率
- これらが高いと寒冷期になる？

まとめ

- スベンスマーク仮説: 銀河渦状肢との周期的遭遇で気候変動
- 現代的な銀河円盤シミュレーションではこういうことはおこらない
- が、太陽のエピサイクル運動による銀河中心からの距離変化が周期的環境変化を起こしている
- この周期は気候変動の周期と実際に一致していて、関係している可能性はある。
- バーとの相互作用も考えると 6-10 億年スケールでの変動もありえる
- 「銀河古気候学」みたいな感じのことができるかも。

星だけの円盤

(Fujii et al. 2010)

animation a1

animation a2

animation b1

- Stable against radial mode (a1, a2)
- Spiral arms form
- They seem to be maintained for very long time

計算機の話

このような研究：

- できるだけ沢山の粒子を使って
- できるだけ長い時間
- できるだけ正確に

計算するのが大事。というわけで、

- 速く、正確に計算できるような方法を考える
- 新しい、速い計算機に合わせた方法を考える
- それでも足りなければ計算機を作る

重力多体系の場合

もとの方程式自体はもちろん、各粒子の運動方程式

$$\frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}, \tag{32}$$

数値計算は基本的にはこれを使う

数値計算の方法等

この種の問題：基本的に

- より大粒子数で
- より正確な

計算をすることで、「新しいことがわかる」（こともある）。

↓

どうやって今までより「良い（大きく、正確な）」計算ができるようにするかが問題

「良い」計算をする方法

基本的な事実: 速く計算できればそれだけ良い計算が可能になる。(例は時間に余裕があればいくつかあげたい)

それしか方法がないわけではないが、「速く計算できるようにする」のは極めて重要な方法。

- 計算法を改良する (今日の本題)
- 速い計算機を買う
- 速い計算機を作る

計算法

原理的には、多体シミュレーションはとっても単純：
運動方程式

$$\frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} Gm_j \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}, \tag{33}$$

を数値積分するだけ。

右辺を計算するプログラム： 2 重ループで 10 行くらい

時間積分： なにかルンゲクッタとか適当なものを使えばいい

というだけで話が済めばいいけれど、もちろん世の中はそんなに簡単ではない。

何が問題か？

- 計算精度の問題： 2 粒子の近接散乱、自己重力による構造形成 — 時間刻みをどんどん短くしないとちゃんと計算できなくなる。
  積分時間が長いので高精度の公式を使いたい。
- 計算量の問題： 右辺の計算量が $O(N^2)$ — N が少し大きくなるとすぐに計算時間が現実的ではなくなる

というわけで、どんな方法を使っているかという話を簡単に。

計算法 — 時間領域

算数としては、単に常微分方程式の初期値問題の数値解。

ナイーブに考えると、いろんな公式がライブラリであるので、
それを使えば済みそうな気がする。

それだけでは済まないのが問題。

済まない理由:

- 粒子によって非常に大きく軌道のタイムスケールが違うことがある
- 連星とかそういったものができる

常微分方程式の数値解法の概要

算数としては、単に常微分方程式の初期値問題の数値解。まず、数値解法にはどういうものがあるかというのを概観しておく。

- ルンゲ・クッタ法
- 予測子・修正子法
- (外挿法)

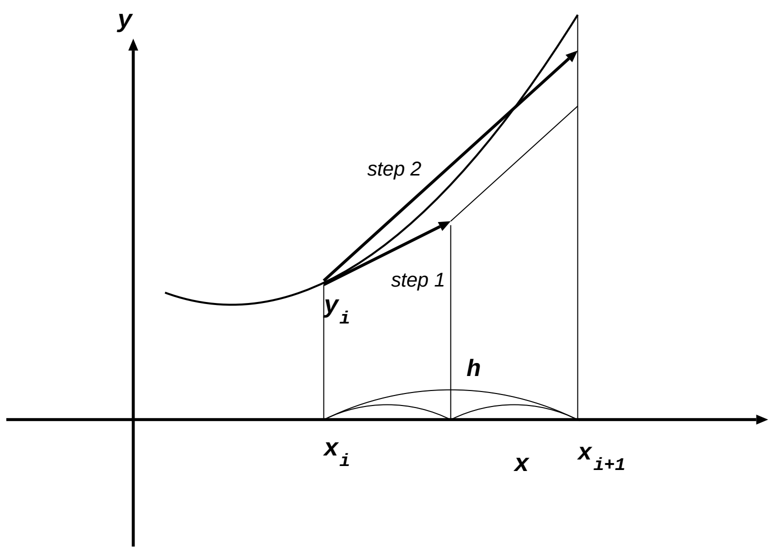
ルンゲ・クッタ

ルンゲ・クッタ法というのは、ある一般的な形に書ける公式のクラスであるが、ちょっとわかりにくいのでまず例から。

二次のルンゲ・クッタ法

以下のような計算法を考える

$$
\begin{aligned}
k_1 &= x_i + \frac{h}{2} f(x_i, t_i) \\
x_{i+1} &= x_i + h f(k_1, t_i + h/2)
\end{aligned}
\tag{34}
$$



これは 2 次精度 (他にも 2 次精度の公式はある)。

ルンゲ・クッタの一般形

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{n+1} &= \boldsymbol{x}_n + h \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{k}_i \\
\boldsymbol{k}_i &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + h \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{k}_j, \boldsymbol{t}_n + \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{h})
\end{aligned}
\tag{35}
$$

s :段数（number of stages）という。

a_{ij}, b_i, c_i はパラメータ

a と c は普通

$$
\boldsymbol{c}_i = \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{a}_{ij} \tag{36}
$$

となるようにとる。

2段の公式

$s = 2$ の場合に書き下してみると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{n+1} &= \boldsymbol{x}_n + h(\boldsymbol{k}_1 b_1 + \boldsymbol{k}_2 b_2) \\ \boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + h(a_{11}\boldsymbol{k}_1 + a_{12}\boldsymbol{k}_2), t_n + c_1 h) \\ \boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + h(a_{21}\boldsymbol{k}_1 + a_{22}\boldsymbol{k}_2), t_n + c_2 h) \end{aligned} \quad (37)$$

と、まあ、こんな感じ。

- $a_{ij} \quad (j \geq i)$ がすべて 0 ならば、k_1 から順に計算していくことができる。つまり、「陽的」公式になっている。
- $a_{ij} \quad (j > i)$ が 0 のときは、各 k_i についての式に k_i だけが入ってくる。これを半陰的 (semi-implicit) 公式という。この場合には、まず k_1 についての方程式をといて、次に k_2 についてのを解いて、、、と順番に計算出来る。

陰公式

- 制約が全くない時は、「陰的」公式ということになる。このときは、すべての k_i に対する（一般には非線形な）方程式を一度に解く必要がある。

なぜ陰的公式といった面倒なものをつくるかというのはよくわからないかもしれない。これについてはあとで説明するとして、まず、陽的公式の例について述べる。

古典的 Runge-Kutta法

陽的ルンゲ・クッタ法のなかでもっとも広く使われているのが「古典的」といわれる公式である。書き下すと、

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h(k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6) \\
k_1 &= f(x_n, t_n) \\
k_2 &= f(x_n + hk_1/2, t_n + h/2) \\
k_3 &= f(x_n + hk_2/2, t_n + h/2) \\
k_4 &= f(x_n + hk_3, t_n + h)
\end{aligned} \tag{38}
$$

というものである。これは、いろいろ良い性質をもつ。

古典的 Runge-Kutta 法の特長

1. a_{ij} が $i - j = 1$ 以外すべて 0 なので、右辺の計算が楽である。
2. 次数が 4 次であり、4 段陽的公式で到達可能な最高次数を達成している
3. 係数が簡単な有理数なので、プログラムしやすい。また丸め誤差を小さくできる。

この公式が 4 次であることを示すのは、それほど簡単ではない。腕力に自信があるひとは挑戦してみて欲しい。

陽公式の到達可能次数

理論的、あるいは実用上重要なのは、段数を決めた時に、次数がいくつまで可能かということである。が、これは一般の場合には未解決であり、以下の結果しかわかっていない

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$s \geq 10$
p	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7	$p \leq s-2$

ある段数で、到達可能な最高次数を達成する公式というのは一通りではない。2段2次の場合でも、自由パラメータが一つあって「無限個」の公式があり得るわけである。段数が増えれば自由パラメータの数も増える。

刻み幅調節

ある精度で計算したい: 要求精度に応じて刻み幅を変える必要あり

計算時間の無駄を減らす: 局所誤差が小さい（解が滑らかな）ところは刻みを大きく、逆に解が急にかわるところでは刻みを小さくする。

可変刻み (variable step) / **適応刻み** (adaptive step)

どうやって刻み h **を変えるか** $=$ **どうやって誤差を推定するか**

埋め込み型公式

RK 型の公式

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{39}$$

k_i は全部そのまま使って、 b_i を別の b'_i に置き換える

$$x' = x_n + \sum_{i=1}^{s} b'_i k_i \tag{40}$$

x' が局所離散化誤差が元の公式よりも大きいが、むやみと大きくはない（例えば、一次次数が低い）なら、元の公式との差を誤差の推定に使うことができる。

この形の公式のことを埋め込み型 embedded 公式という。最初に提案した人の名前をとって Runge-Kutta-Fehlberg 公式ということも多い。Dormand-Prince はこの形である。

陰的ルンゲクッタ公式

陰的公式は、(理論的には) 素晴らしい性質をもつ。

「s 段陰的公式の到達可能次数は $2s$ である。」

これのため、いくらでも次数の高い公式をつくることができる。陽的な場合には 8 次よりも高次のものはほとんど知られていないのとは対照的である。

これは単なる存在証明ではなく、実際に $2s$ 次の公式が構築されている。これは実はユニークに決まり、「陰的ガウス公式」と呼ばれるものがそれ。

ガウス型以外の陰的公式

陰的ガウス公式は、実用上はいろいろ不便な点もある。例えば、

- 最小の段数で最高の次数（精度）を達成しているので、係数に自由度がなくいわゆる「埋め込み型」の公式が構成できない。
- 端の点を使わないので、前のステップでの計算結果の再利用が出来ない。
- 完全陰的法なので、計算が大変である

などの問題がある。それぞれの点について改良された沢山の方法が知られている。

線形多段階法

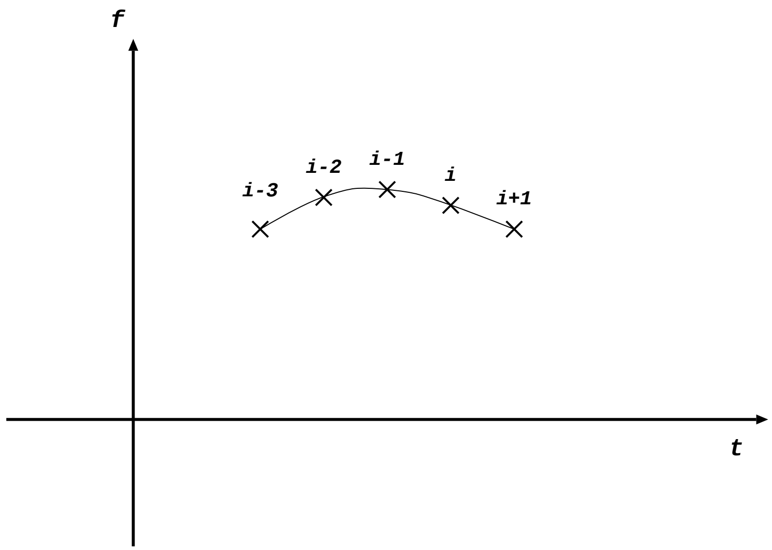
ルンゲ・クッタ法:「一段階法」t_i における解 x_i がわかっていれば、それだけから次の時刻 t_{i+1} での解 x_{i+1} が求まる。

多段法: t_i での情報だけでなく、その前のステップでの情報（導関数の値や解そのものの値）を記憶しておいて、それを使う。

これにより、余計な計算をしないで計算精度をあげたい。

アダムス法

原理: いくつかのステップでの導関数（微分方程式の右辺）f の値を憶えておいて、それを通る補間多項式を作り、それを積分して解を求める。



左の図に概念を示す。ここでは、積分公式の時と同様にラグランジュ補間（ニュートン補間）をして多項式を作る。で、その作った多項式を積分する。

アダムス法の実際

例えば、点 i から $i+1$ まで積分するのに、点 $i-p$ から i までの関数値を使うとすれば、p 次の多項式で

$$P(t_j) = f_j = f(x_j, t_j) \quad (i-p \le j \le i) \tag{41}$$

を満たすものを作る。で、$i+1$ での解 x_{i+1} は

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(t)dt \tag{42}$$

で与えられる。刻み h が定数であるとすれば、p を決めれば上の式を

$$x_{i+1} = x_i + h \sum_{l=0}^{p} a_{pj} f_{i-l} \tag{43}$$

の形に書き直せる。

陰的アダムス法

陰的な補間多項式、つまり t_{i+1} での関数の値を使った公式を考える。

刻み h が定数であるとすれば、p を決めれば前と同様に

$$x_{i+1} = x_i + h \sum_{l=-1}^{p-1} b_{pj} f_{i-l} \tag{44}$$

の形に書けることになる。また手をぬいて $p = 1$ の場合を考えれば、これは単に台形公式

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) \tag{45}$$

となる。

代数方程式の解きかた

通常の方法

- 初期値として同じ次数の陽的アダムス法の解を持ちいる。
- そのあとは直接代入法で反復する。

というものである。

なお、このやり方を、予測子・修正子法と呼ぶ。線形多段階法はほとんどこの形で使われるため、線形多段階法のことをさして予測子・修正子法と呼ぶ人もいる。

ルンゲ・クッタとの比較

必要な精度を決めた時、ほとんどどんな場合でも、線形多段階法のほうがルンゲ・クッタ法よりも少ない計算量で答を得ることが出来る

(実験的にも、また誤差の係数をつかった理論的な解析からも)

ルンゲ・クッタ公式が優れているのは、基本的にはその使いやすさにおいてのみ

使いやすさというのは実際的にはなかなか重要

2 階の方程式向けの方法

ハミルトン系のような 2 階の方程式の場合:

アダムス型公式をそのまま使うのは賢くない

アダムス法の場合、加速度に対する補間多項式を 2 回積分すれば位置の変化が求まる。

速度についての補間多項式を構成したり、速度の昔の情報をとっておく必要はない。

必要なメモリ、計算量の両方が減る。

ハミルトン系に適した公式はないか？

連星、階層 3 重星のような長時間積分が必要な系: 特殊な公式を使ってでも計算時間を短くしたい。そういうものはないか?

- **シンプレクティック型公式**
- **対称型公式**

ハミルトン系/周期軌道に対して特別に良い性質をもつ

「良い」公式の古典: 2 次 leap frog

昔からいろんな業界で使われていて、名前が違う、、、

- leapfrog
- Verlet
- 2nd order ABM
- 2nd order Stömer-Cowell

他にも 4 個くらい名前があったような。

leap frog 公式

$$
\begin{aligned}
v_{i+1/2} &= v_{i-1/2} + \Delta t a(x_i) & (46) \\
x_{i+1} &= x_i + \Delta t v_{i+1/2} & (47)
\end{aligned}
$$

ここで、添字はステップである。 $\pm 1/2$ は中間点での値ということになる。

出発用公式として

$$
v_{1/2} = v + \Delta t a(x_0)/2 \tag{48}
$$

を使い、さらに終了用公式として

$$
v_i = v_{i-1/2} + \Delta t a(x_i)/2 \tag{49}
$$

を使う

leap frog の性質

普通にいう 2 次精度である。

局所誤差という観点からはこれは決して良い公式というわけではないが、現実にはこの公式は非常に広く使われている。

理由:非常に「良い」性質を持つ。例えばエネルギーや角運動量のような保存量が非常によく保存するということである。これらの保存量については多くの場合に誤差がある程度以上増えない。

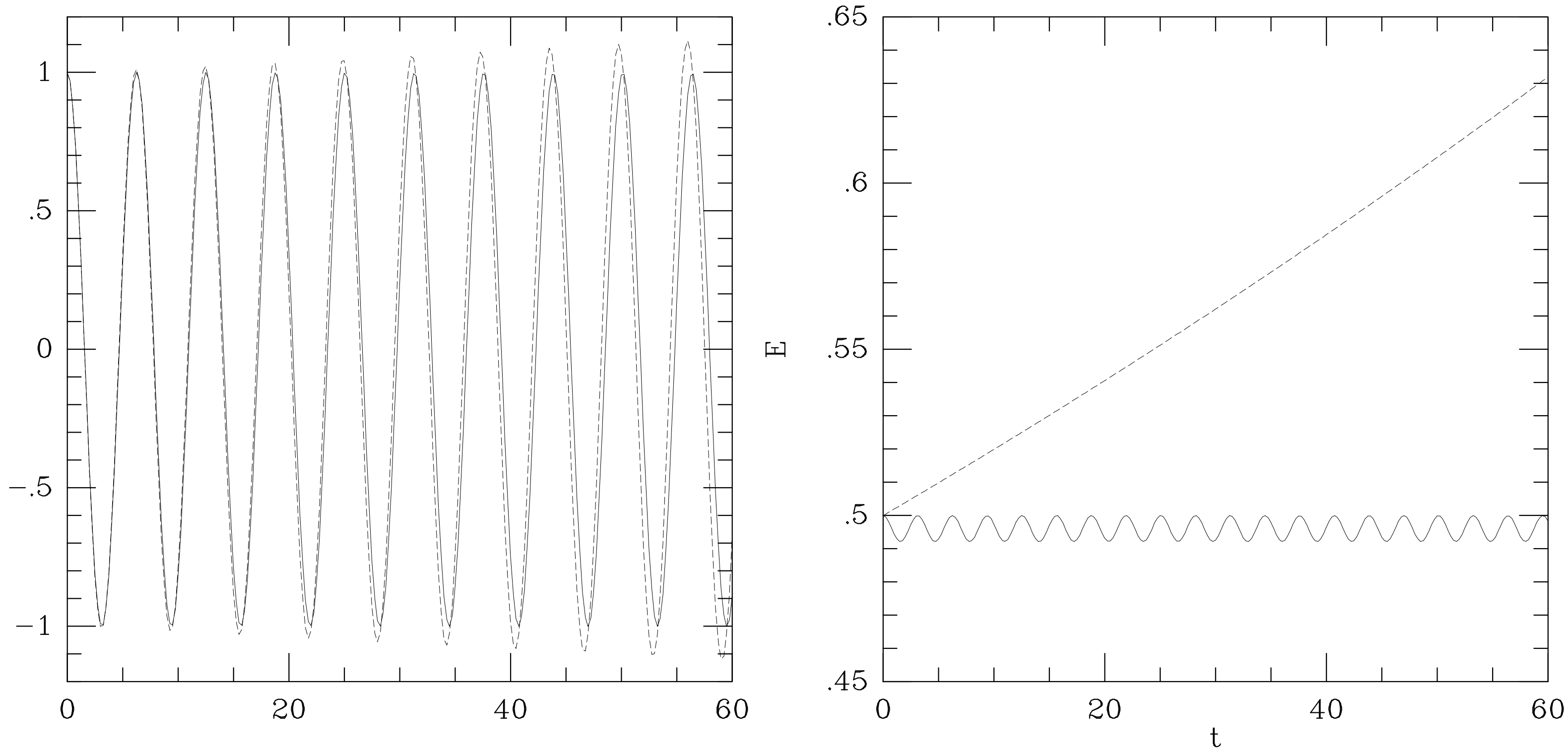
数値例

調和振動子

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \tag{50}$$

を リープフロッグ と 2 階のルンゲクッタで解いてみる。初期条件は $(x, v) = (1, 0)$ で、時間刻みは $1/4$ である。

軌道とエネルギー



保存量

この調和振動子の場合には、リープフロッグ公式は以下の量

$$H' = \frac{1}{2}(x^2 + v^2) - \frac{h^2}{4}x^2 \tag{51}$$

を保存する。

つまり、微妙に浅いポテンシャルでの調和振動子になっている。

$h \geq 2$ になるとポテンシャルが下に凸でなくなる。

これは、安定でなくなる (差分方程式の固有の絶対値が 1 でなくなる) のと一致している。

何故良いか？

1. リープフロッグはシンプレクティック公式 のもっとも簡単なものの一つである。
2. リープフロッグは対称型公式 のもっとも簡単なものの一つである。

シンプレクティック公式の性質

1. シンプレクティック公式は、すくなくともある種のハミルトニアンに対して使った場合に、それに近い別のハミルトン系に対する厳密解を与えることがある。
2. 周期解を持つハミルトン系に対して使った場合に、どんな量でも誤差が最悪で時間に比例してしか増えない。
3. 時間刻を変えると上のようなことは成り立たなくなる

対称型公式の性質

1. 周期解を持つ時間対称な系に対して使った場合に、どんな量でも誤差が最悪で時間に比例してしか増えない。
2. 時間刻を変えてもうまくいくようにすることも出来る。

シンプレクティック公式

リープフロッグ 公式は、良いけど低次。

もっと高次の方法は?

そういうのを作る一つのアプローチ:シンプレクティック公式

シンプレクティック写像:要するに正準変換

リープフロッグ公式はシンプレクティック性を満たしている

これを時間刻みを変えて組合せたものもシンプレクティック性を満たしている

陽解法

吉田や鈴木による作用素分解に基づく公式が良く知られていて、広く使われている。

これらの方法の原理:

- リープフロッグをタイムステップを変えていくつか組合わせる。
- うまくタイムステップを組み合わせると誤差の高次の項を消すことができる

7 段 6 次や 15 段 8 次の公式等が吉田によって導かれている。

陽解法はハミルトニアンが $T(p)+V(q)$ の形の場合にしか使えない

シンプレクティック公式の意味

シンプレクティックであるということと、「良い」ということの間の関係はなにか?

あるハミルトニアン H で表される系をシンプレクティックな p 次の公式を使って積分した解は、別のハミルトニアン H' で与えられるシステムの厳密解になっていて、H と H' の間に

$$H = H' + h^{p+1}H_p + O(h^{p+2}) \tag{52}$$

という関係がある（H' を求める数列が収束すれば）ということがわかっている。(吉田さんの研究)

(収束するかどうかは一般には明らかではない)

対称型公式

(ここでの) 時間反転に対する対称性とは、常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{53}$$

に対する一段法

$$y_{i+1} = F(x_i, y_i, f, \Delta x) \tag{54}$$

が、

$$y_i = F(x_{i+1}, y_{i+1}, -f, \Delta x) \tag{55}$$

を満たすこと、つまり、直観的には、ある微分方程式系があって、それを 1 ステップ分数値的に軌道を進めたとする。で、そこから逆に戻ると厳密に元の値に戻るということ。

対称形公式の利点

- ハミルトン系に対して対称型公式を使った場合、エネルギーや角運動量などの保存量の誤差がある範囲内にとどまる
- 時間刻みを変えても上の性質を保つことが出来る

前のほうの性質はシンプレクティック公式と同じであるが、後の方の性質はシンプレクティック公式よりもある意味でよいものである。

エルミート型公式

高次の公式を作るのに、高階の導関数を直接計算してそれを使う。

最も簡単な例: 4 次公式

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0) - \frac{\Delta t^2}{12}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0), \tag{56}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_0) - \frac{\Delta t^2}{12}(\dot{\mathbf{a}}_1 - \dot{\mathbf{a}}_0). \tag{57}$$

これは陰的公式。対称化には反復かなにかで方程式を解く必要がある。(収束は割合速い)

まとめ — どういう場合にどういう公式を使うべきか、ということ

一杯方法があるけど、なんだかわからない、と思うかもしれない。

まず、計算時間がたいしてかからないなら、何を使っても答がでるので簡単にプログラムできる、ということが最も優先である。例えば 2 次や 4 次のルンゲ・クッタは良い候補。
(オイラー法では丸め誤差が大きくなりすぎるといった問題がでることがある)

まとめ — 続き

計算に何時間、何日もかかる、という時には、プログラムや積分公式を変える意味がでてくる。

非常に長時間 (システムの時間の意味で、つまり、沢山の軌道周期にわたって) 積分する、といった場合には、シンプレクティックや対称型のような、長時間積分の誤差が累積しないものが望ましい。

例えば、N 体シミュレーション等では、2 次リープフロッグを使うことが多く、もっと高次の方法を使うことはあまりない。これは、高次にするより粒子数を増やすほうが全体としての精度向上には有効だから。

独立時間刻みの原理

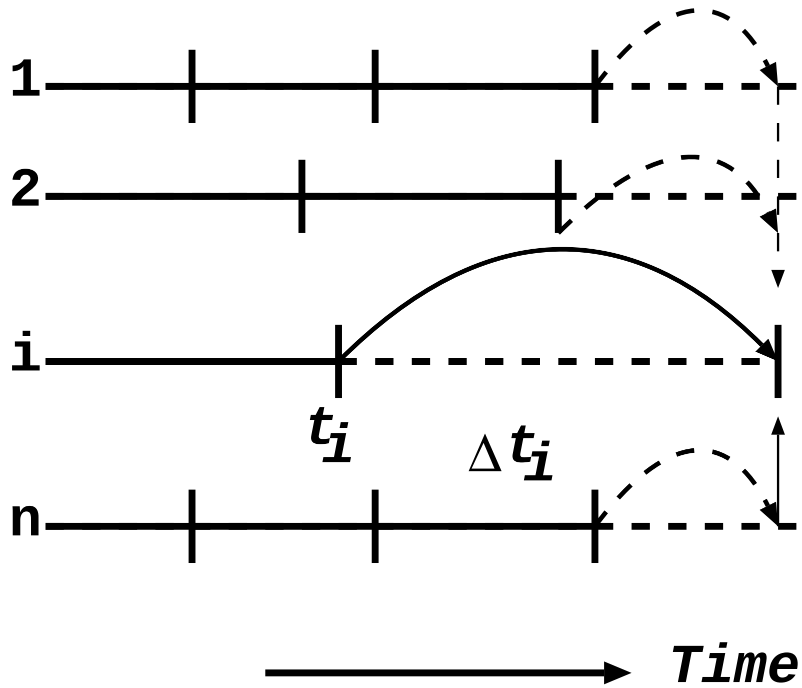
粒子毎にばらばらの時刻 t_i と時間ステップ Δt_i を与える

1. $t_i + \Delta t_i$ が最小の粒子を選ぶ。
2. その粒子の軌道を新しい時刻まで積分する。
3. その粒子の新しい時間刻みを決める。
4. ステップ 1 に戻る。

ある粒子の時刻 $t_i + \Delta t_i$ で他の粒子の位置が高精度で必要:

予測子・修正子型の公式を使う。

独立時間刻み



(Aarseth 1963)

- 各粒子にそれぞれ時刻と時間刻みを与える
- 「イベント駆動」時間積分 — $t_i + \Delta t_i$ がもっとも小さい粒子が積分される

時間積分公式に対する要請

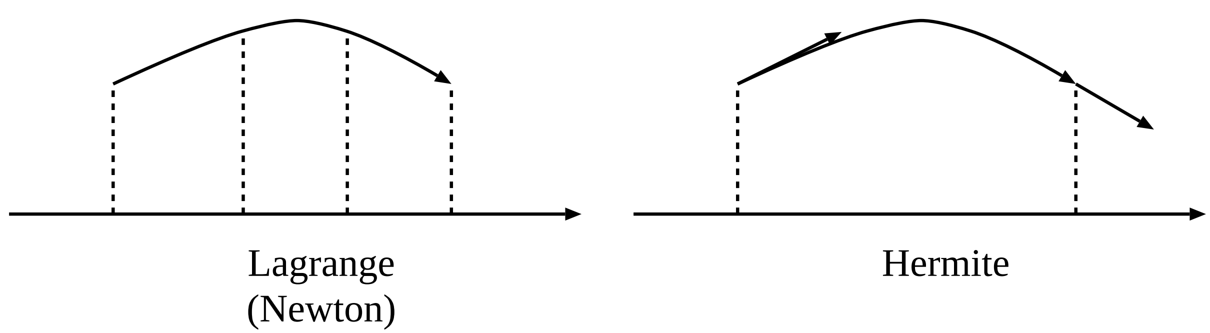
- 高次の予測子が必要 (他の粒子の位置が必要)
- 可変時間刻みが必要
- 積分区間の途中で加速度を計算するような方法は使えない。
  - 線形多段階法は使える
  - ルンゲ・クッタは使えない
  - シンプレクティック法は単純には使えない

時間積分公式

次数：「4 次くらいが適当」(JM 1990)。

もっと高いほうが良い: (Nitadori and JM 2007)

- Aarseth scheme (Aarseth 1963): 可変刻みのアダムス法、 PEC モード、4 次、2 階の方程式用。
- Hermite scheme (JM 1990): ラグランジュ補間（ニュートン補間）の代わりに、加速度の一階時間導関数も使ってエルミート補間を構成。



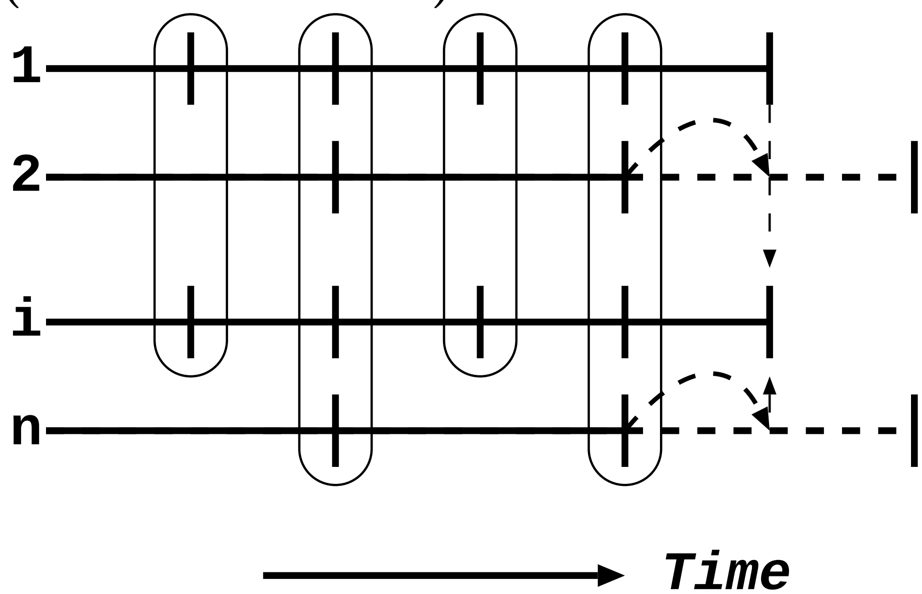
高次エルミート

Nitadori and JM 2007

- 2 階導関数まで直接計算してエルミート補間: 6 次公式
- 3 階導関数まで直接計算してエルミート補間: 8 次公式
- 予測子は前のステップの値を使って構成

ブロック時間刻み法

(McMillan 1986) ベクター／パラレル計算機のための改良



- 時間刻みを 2^{-k} に制限する。
- $t_i + \Delta t_i$ が同じ（Δt_i は違ってもよい）粒子は同時に積分される。

$O(N_c^{2/3})$ 個の粒子（N_c は高密度コアのなかの粒子数）を並列計算
— そんなに大きな数ではない。

計算法 — 空間領域

運動方程式の右辺をどうやって評価するか？という問題。

以下、独立時間刻みのことはとりあえず棚上げにして話をすすめる。

広く使われている方法： Barnes-Hut treecode

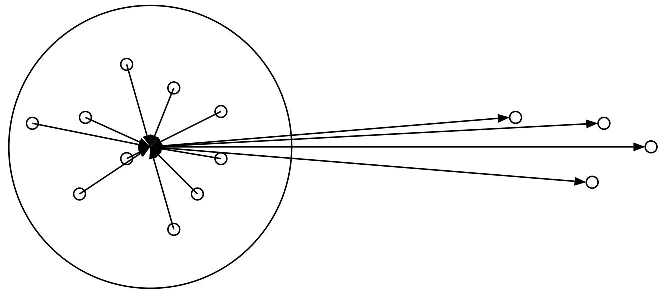
有名な方法： 高速多重極法

ツリー法、FMMの基本的発想

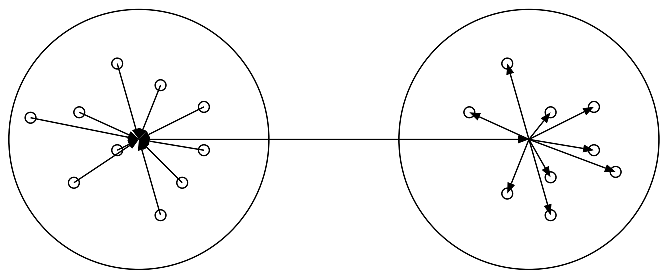
遠くの粒子からの力は弱い

↓

まとめて計算できないか？



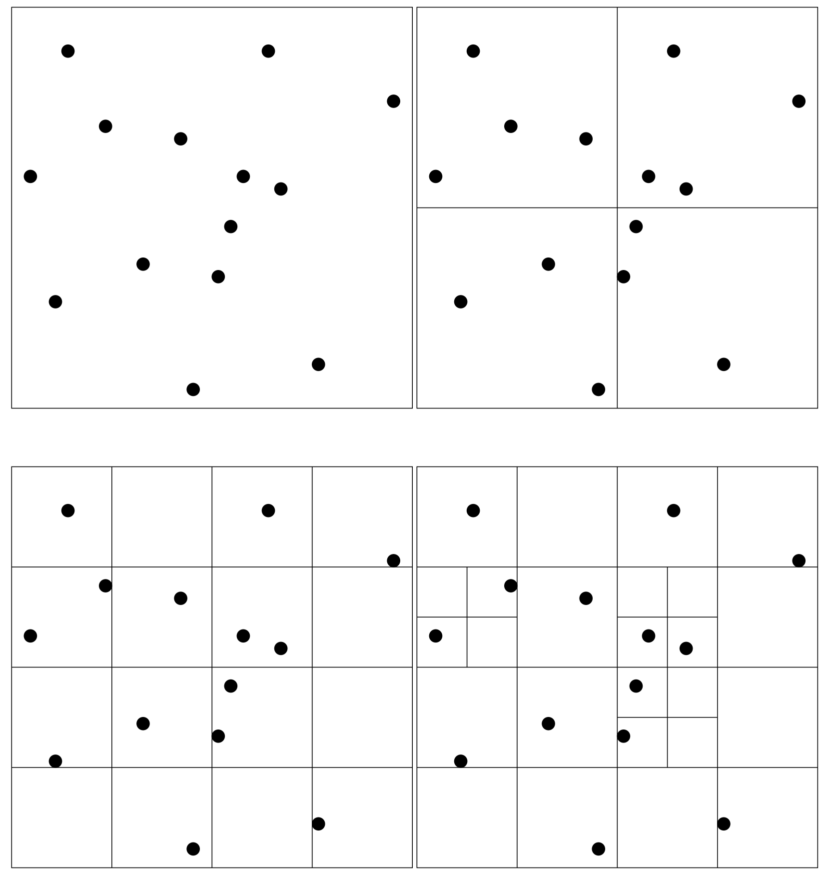
Tree



FMM

- ツリー：力を及ぼすほうだけをまとめて評価
- FMM：力を受けるほうもまとめて評価

どうやってまとめるか？ — ツリー法の場合

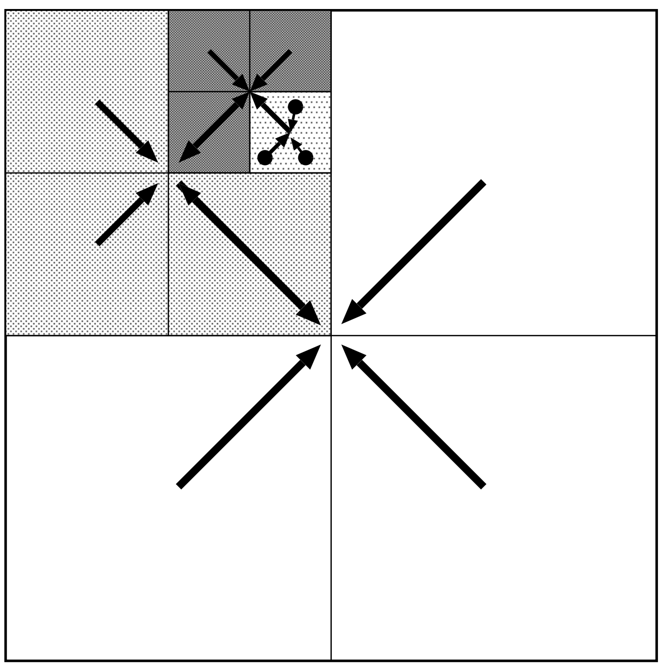


階層的なツリー構造を使う。

- まず、全体が入るセルを作る
- それを再帰的に 8 (2 次元なら 4) 分割する
- 中の粒子がある数以下になったら止める（上の例では 1 個）

多重極展開の構成

まず、ツリーの各セルのなかの粒子がつくるポテンシャルの多重極展開を計算する。

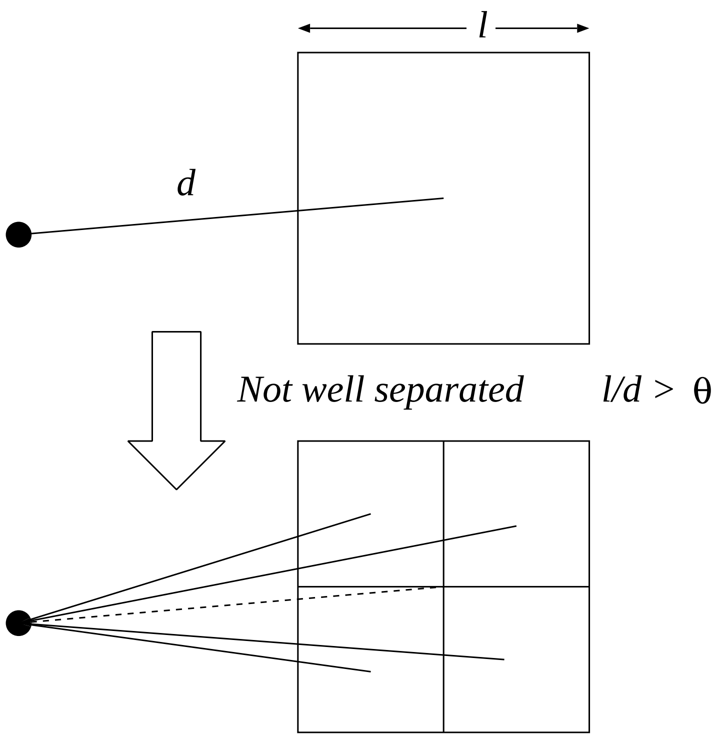


- 最下層のセル:そのなかの粒子が作るポテンシャルを多重極展
- それ以外：子セルの多重極展開の展開中心をシフトして加算

下から順に計算していけばよい。
計算量は $O(N)$。展開をシフトする式はかなり複雑。

ツリー法での力の計算

再帰的な形に表現すると格好がいい。



- 十分に離れている:重心（あるいは多重極展開）からの力
- そうでない：子ノードからの力の合計

系全体からの力 ＝ ルートからの力

ツリー法の効果

- 計算量のオーダーが $O(N^2)$ から $O(N \log N)$ に減る。
- 現状では、例えば天文台の Cray 1024 コアを使って 2048^3 粒子が 1 ステップ数分とか。
- もしも直接計算したら 1 ステップ数十年かかる。

独立時間刻みとツリー法の組合せ

- 原理的にはこれが望ましいに決まっている
- 研究も昔からある。McMillan and Aarseth 1993 とか
- 最近いくつか、ハミルトニアン分割に基づいたアプローチあり

速い計算機を使う

計算法の話は少ししたので、これははしょって後の 2 つ。

速い計算機とはどんなものか？

普通のパソコンと スーパーコンピューター

なにが違うか？

昔は随分違った。

昔の「速い計算機」

30 年前

- パソコンはなかった。
- 同じプログラムでも高い計算機のほうが速かった

20 年前

- パソコンはあったけど、同じプログラムで高い計算機の 1000 倍とかそれ以上時間が掛かった（値段もそれくらいではあった）
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」というものに変わってきて、特別な工夫をしてプログラムをかかないと性能がでなくなった。

今の「速い計算機」

10年前

- パソコンが非常に速くなってきた
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」がさらに沢山並んだ並列計算機になってきた。

今

- パソコンはもっと速くなった。
- ベクトルプロセッサを並列に使うより、パソコンを並列に使う方がずっと安くて速くなってきた。

例：

「京」スーパーコンピュータ 128Gflops $\times$ 8万台

値段は1000億円=1台120万円

普通のパソコン 1 台 100 Gflops 10 万円

値段あたりの性能を計算してみると、、、

プログラムにはいろいろ難しいことを考えないといけない。

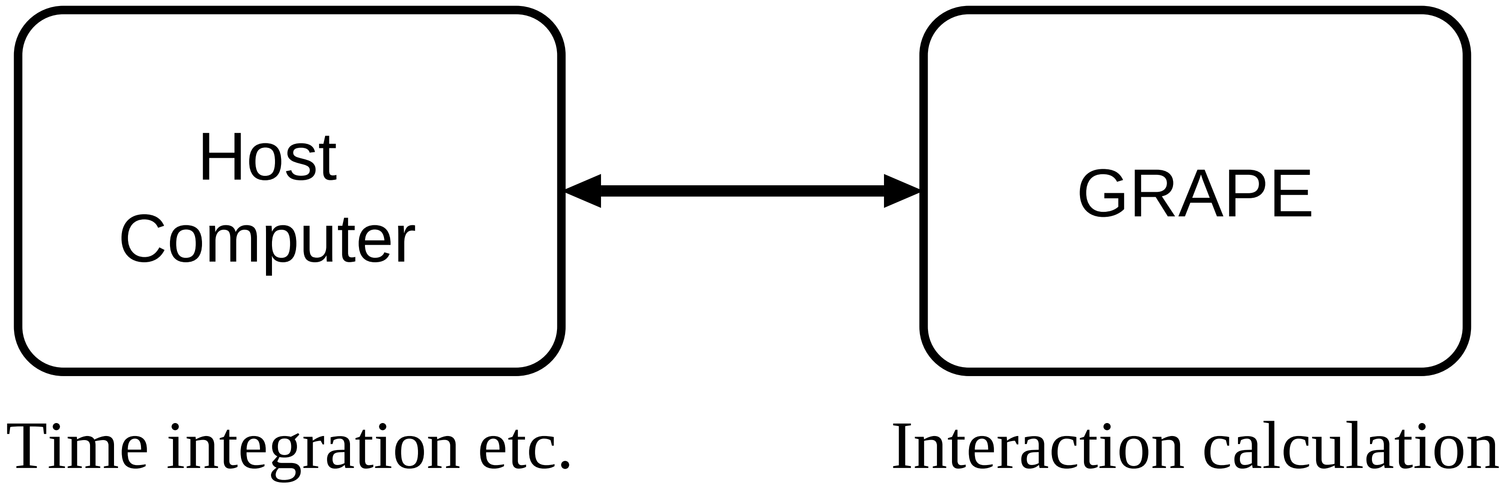
- 計算機どうしが通信すると時間が掛かる。
- もっと細かい話いろいろ。

計算機を作る？

- 計算機のなにもかもを全部作るのは大変
- 計算時間のほとんどは粒子間の重力の計算（計算法によってはちょっと違うけど、、、）

重力の計算だけ速くする計算機を考える
(GRAVITY PIPE, GRAPE)

GRAPE の基本的考え



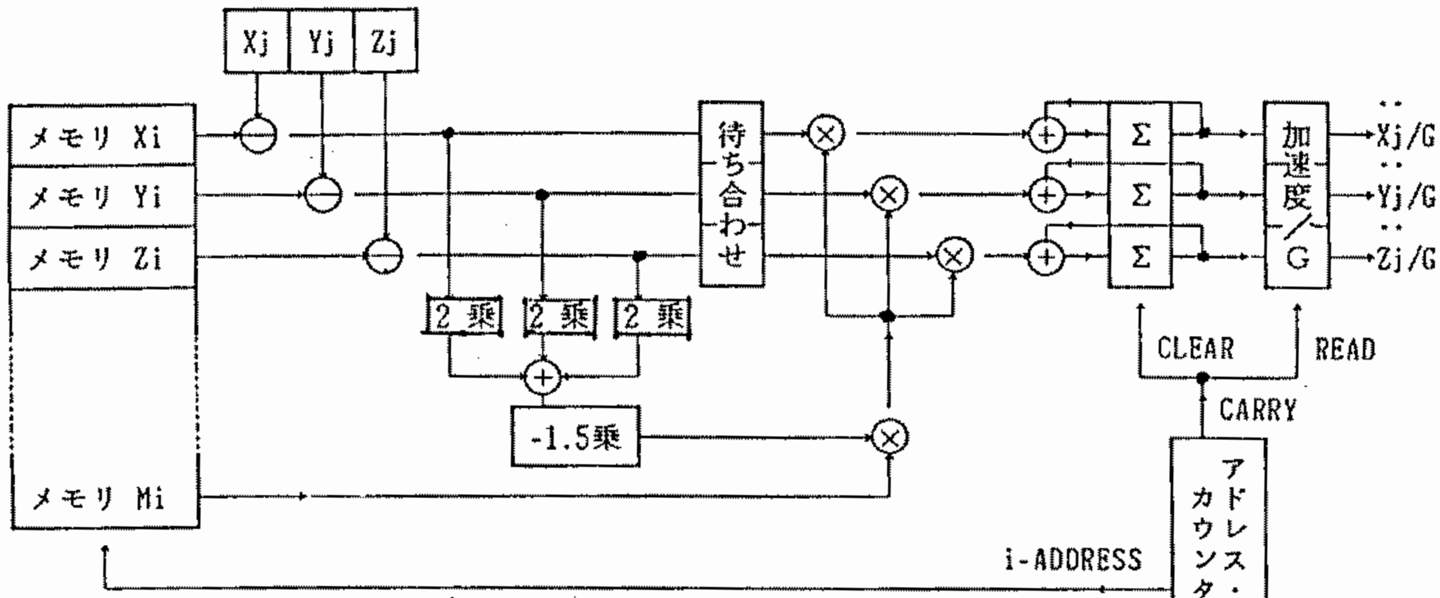
専用ハード: 相互作用の計算
汎用ホスト: 他のすべての計算

専用ハードウェア

- 相互作用計算のための専用パイプラインプロセッサ
  - 多数の演算器を集積可能
  - すべての演算器が常時並列動作

  $\rightarrow$ 非常に高い性能
- すべてハードウェア $\rightarrow$ ソフトウェア不要

GRAPE パイプライン



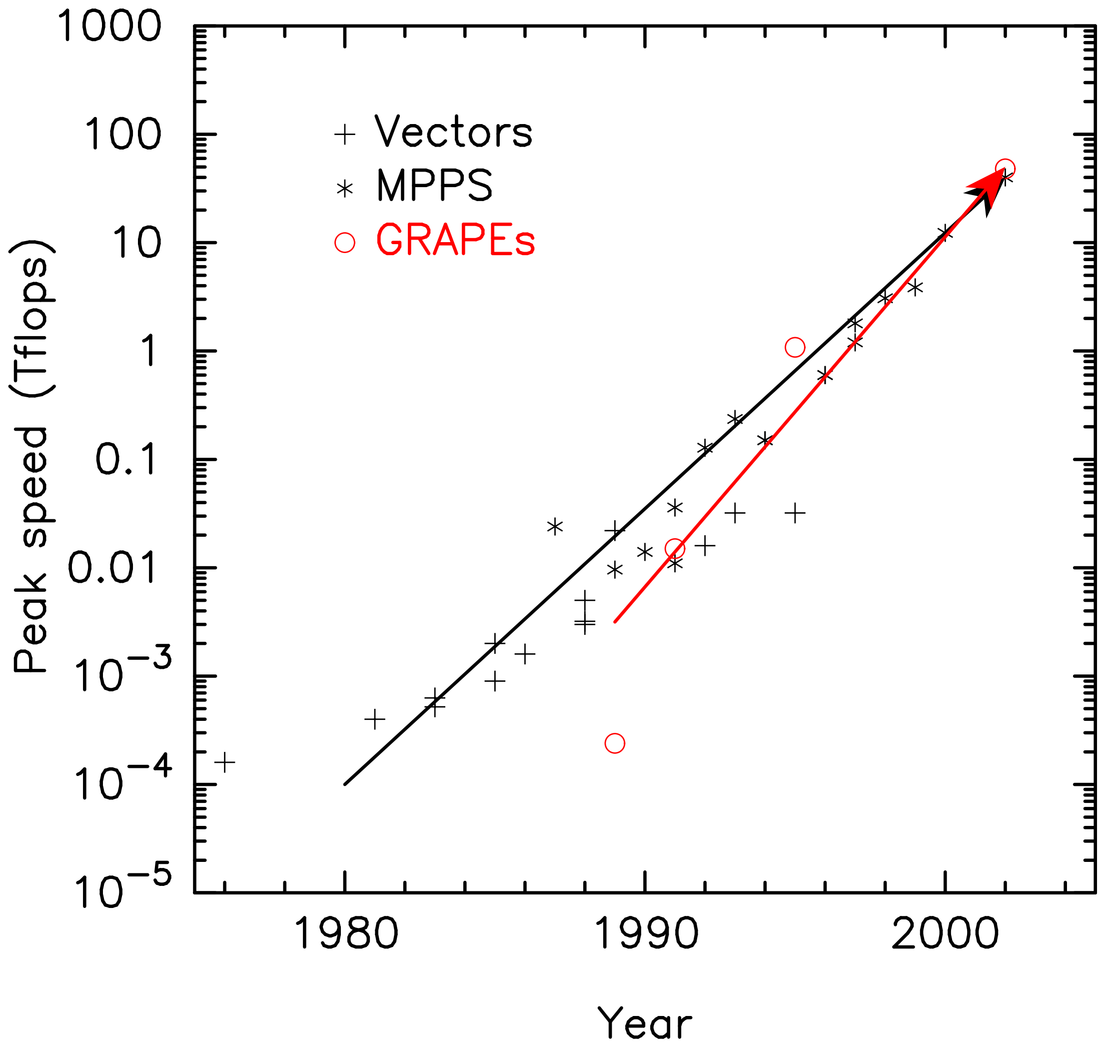
$$\ddot{\mathbf{r}}_j = G\sum_i \frac{M_i}{r_{ij}^3}\mathbf{r}_{ij} \quad (\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

+, −, ×, 2乗は1operation, -1.5乗は多項式近似でやるとして10operation 位に相当する.
総計24operation.
各operation の後にはレジスタがあって, 全体がpipelineになっているものとする.
「待ち合わせ」は2乗してMと掛け算する間の時間ズレを補正するためのFIFO(First-In First-Out memory).
「Σ」は足し込み用のレジスタ. N回足した後結果を右のレジスタに転送する.

図2. N体問題のj-体に働く重力加速度を計算する回路の概念図.

(近田 1988)

計算速度の発展

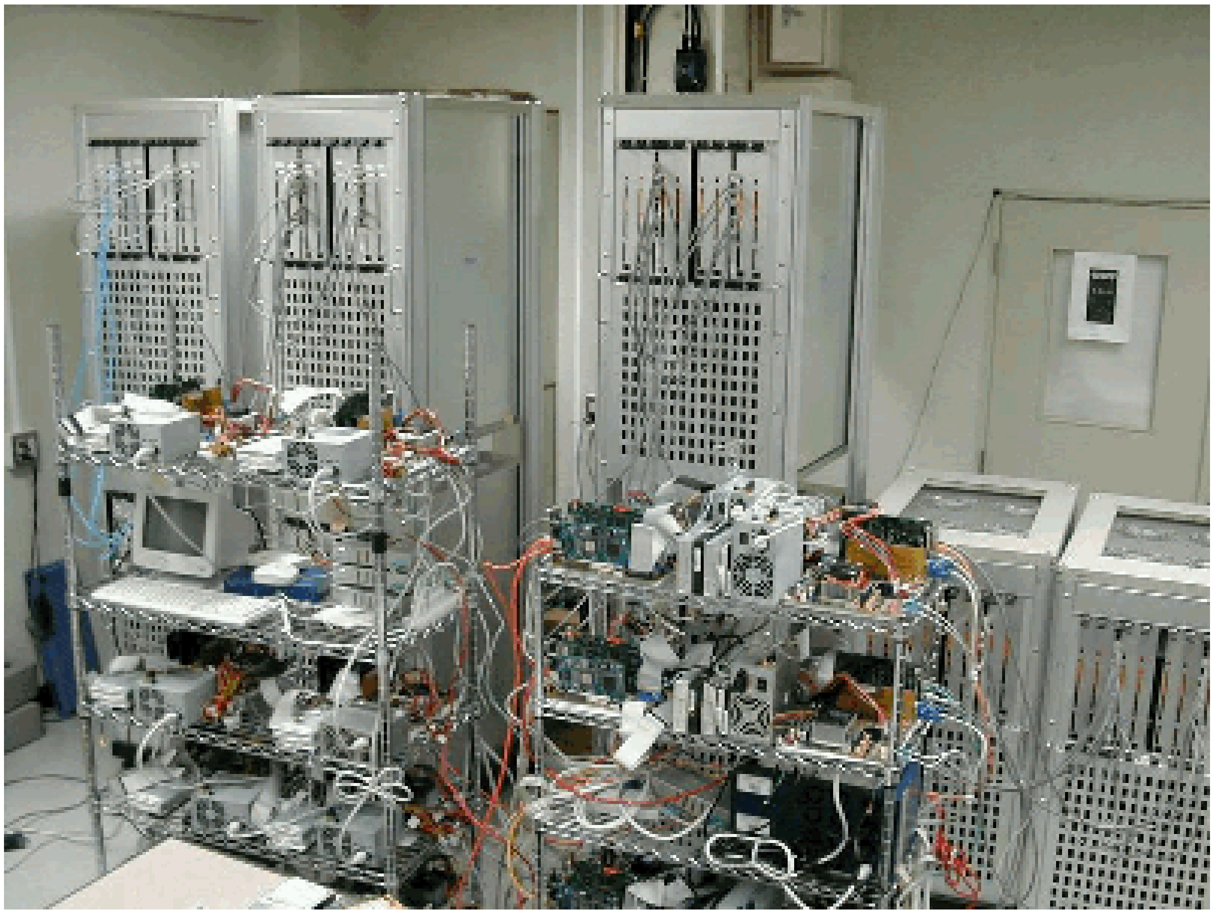

1000
100
10
1
0.1
0.01
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
Peak speed (Tflops)
1980
1990
2000
Year
Vectors
MPPS
GRAPEs

GRAPE-4

1995 年完成、当時世界最高速

GRAPE-6

2002年完成、当時世界最高速



GRAPE の成果

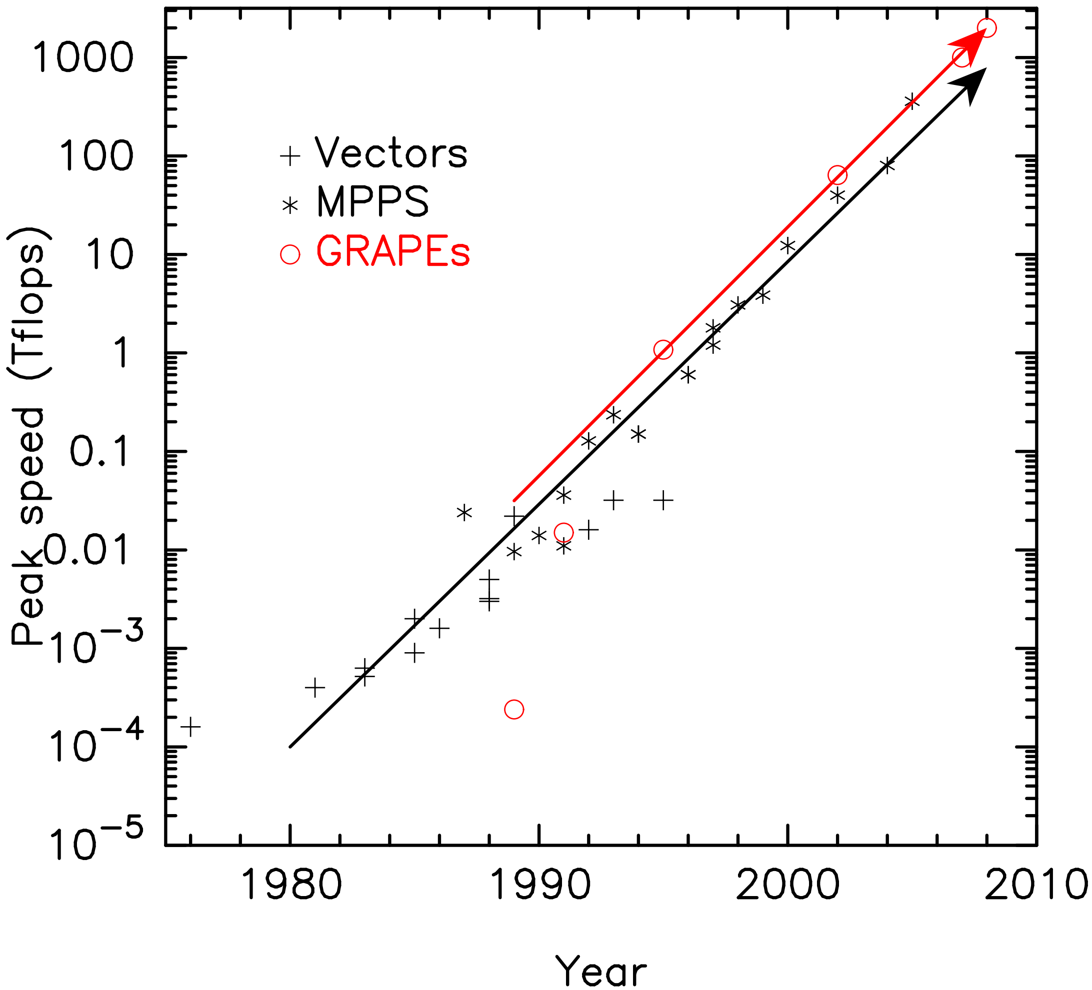
この講義で紹介したいろいろな計算結果の結構な部分。

本当に新しい研究をするには、人より良い道具を持たないといけない

道具＝ 望遠鏡、人工衛星、計算機、、、（頭）

- 沢山お金を払って良い道具を買ってくる
  – お金を出しても売ってない、、、
- 頭を使って良い道具を作る

GRAPE の性能



GRAPE: 重力相互作用だけ計算する専用計算機。

大変効率は良い。汎用機の 1/100 のコスト。

続ければよいか？

「GRAPE-6 後継」の実際的な問題

天文だけ (しかも理論だけ (しかも軌道計算だけ)) のの機械としては開発にお金がかかりすぎる

プロセッサ回路開発費

1990	1μm	1500 万円
1997	0.25μm	1 億円
2004	90nm	3 億円以上
2010	45nm	10 億円以上

普通の計算機より速いとはいえ、そもそも高すぎる、、、、

ではどうするか？

GRAPE-DR でのアプローチ

- 若干妥協して、ある程度色々できるようにする
- で、大きな予算を獲得する

計算設計としてのアプローチ:

小さくて単純だが、色々できるプロセッサをなるべく沢山詰め込む

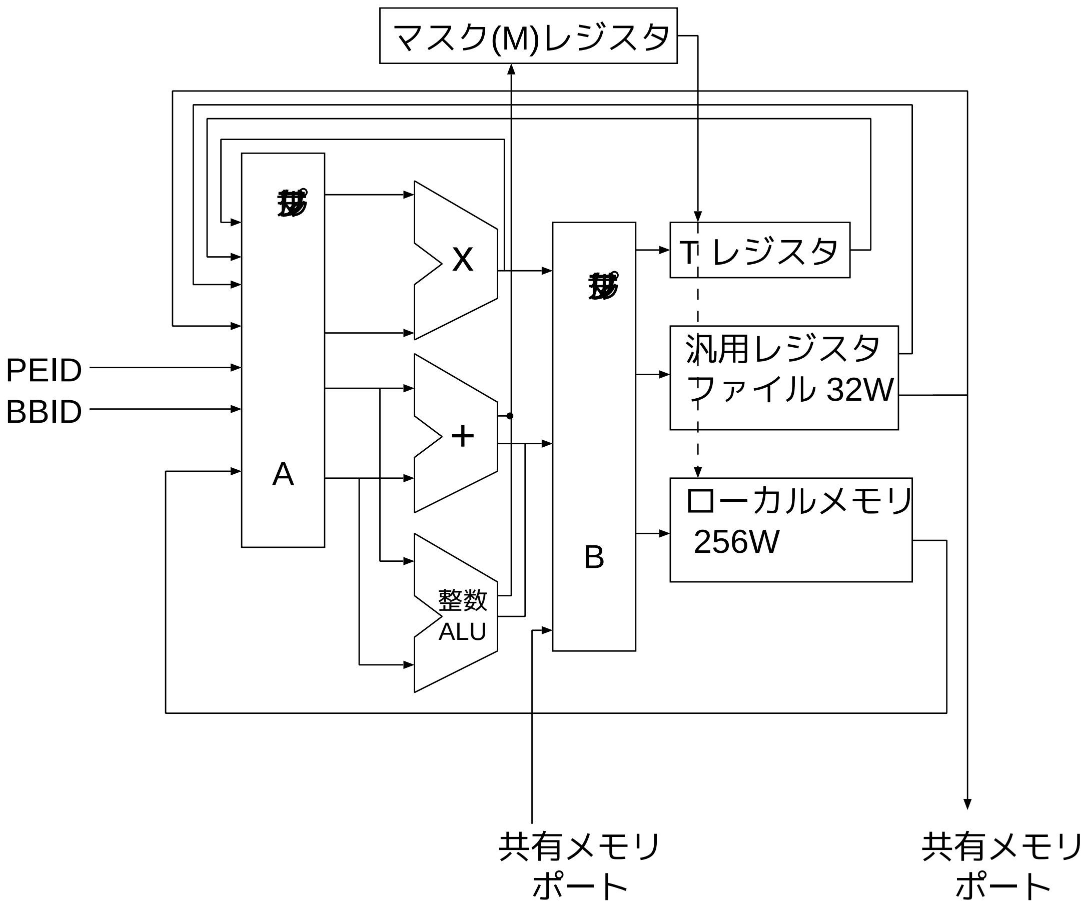
基本的な計算モデル

$$R_i = \sum_j f(x_i, y_j)$$

を並列に評価。

- 2 重ループ、一方について積算。
- y_j がなければ単純な並列計算。
- 行列乗算もできるように作る。

GRAPE-DR プロセッサの構造

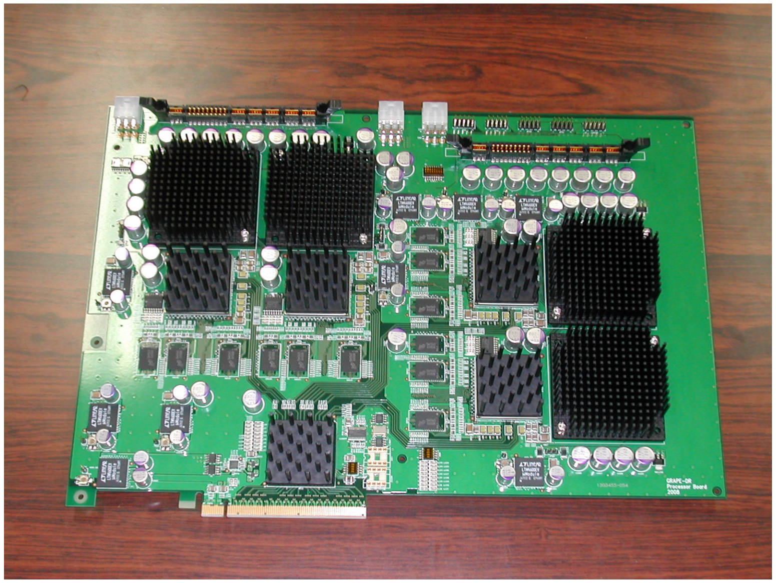


- 浮動小数点演算器
- 整数演算器
- レジスタ
- メモリ 256 語 (K とか M ではない。)
- これを 512 個 1 チップに入れる

プロセッサチップ

チップ写真

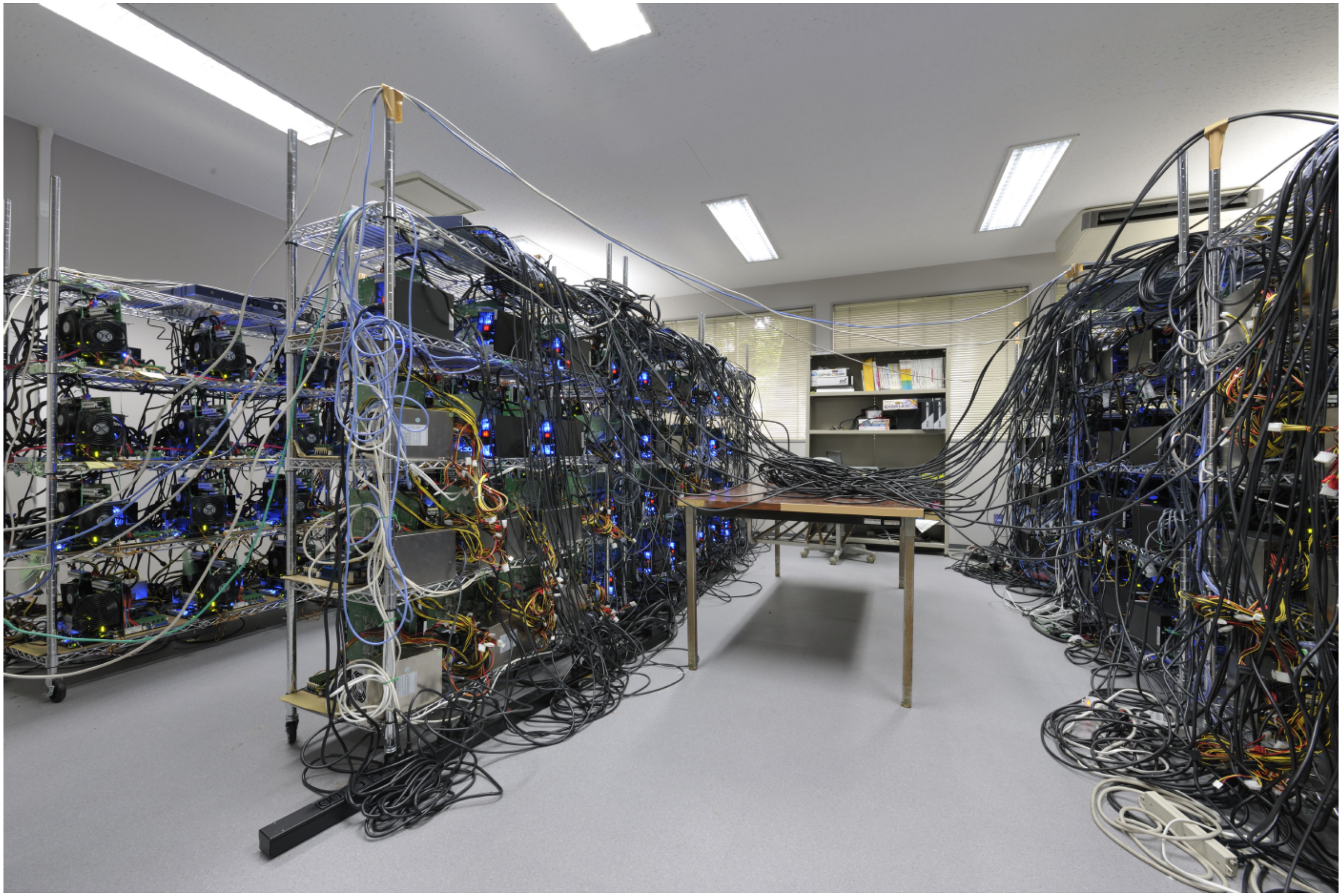
プロセッサボード



普通のパソコンにつく PCIe ボード

- 200-250W
- 400-433MHz クロック
- 820-887 Gflops
- 普通のパソコンの 20 倍程度の性能

GRAPE-DR クラスタシステム

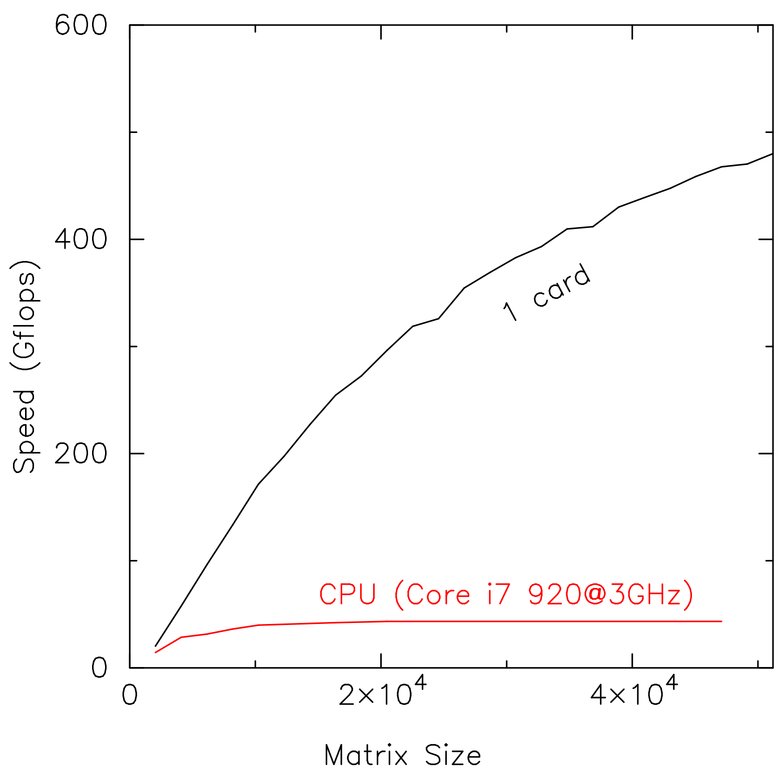


GRAPE-DR クラスタシステム

前のスライドの写真とった時の構成:

- 128-ノード, 128-ボード (105Tflops peak)
- ホスト計算機: Intel Core i7+X58 12-24 GB メモリ
- ネットワーク: x4 DDR インフィニバンド

LU 分解の性能



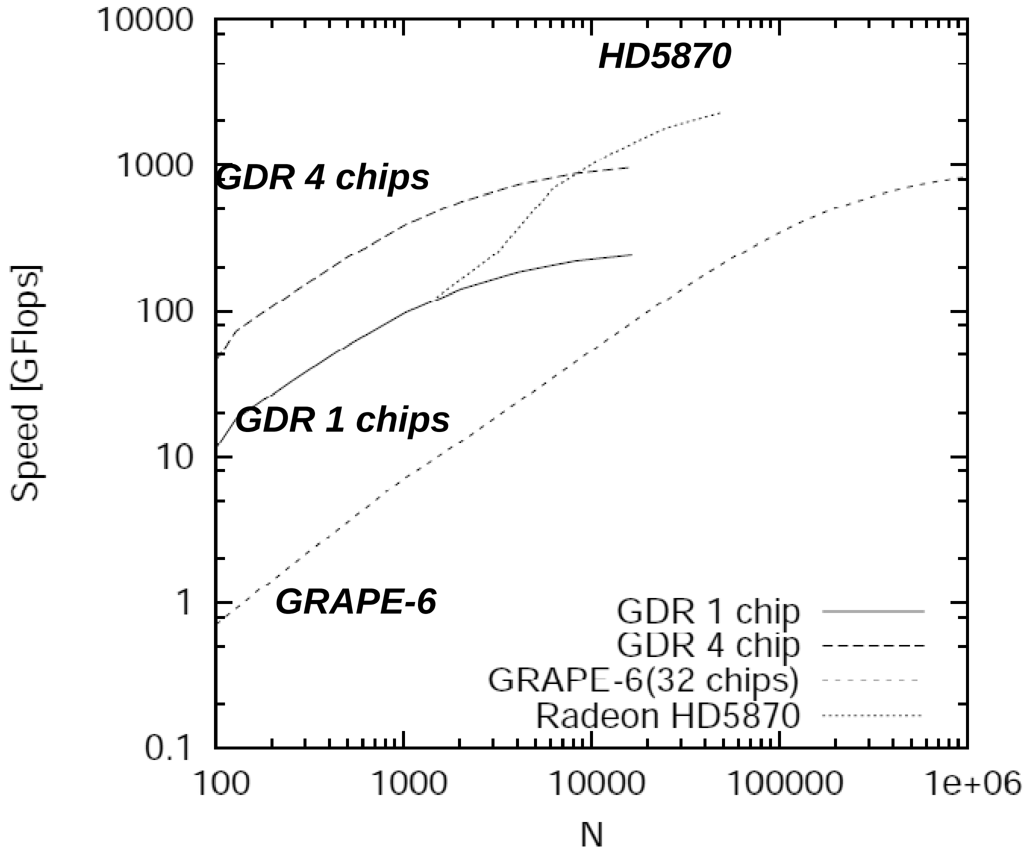
行列サイズの関数としての速度

行列がメモリー杯のところで 430Gflops(1 カード)、及び 670Gflops(2 カード)

カード 1 枚でホスト CPU の 11 倍

(天河 1A: ホスト CPU の 2 倍ちょっと)

重力計算性能



Performance for small N much better than GPU

(for treecode, the multiwalk method greatly improves GPU performance, though)

Little Green 500, June 2010

Green500 Rank	MFLOPS/W	Site*	Computer*	Total Power (kW)
1	815.43	National Astronomical Observatory of Japan	GRAPE-DR accelerator Cluster, Infiniband	28.67
2	773.38	Forschungszentrum Juelich (FZJ)	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
2	773.38	Universitaet Regensburg	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
2	773.38	Universitaet Wuppertal	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
5	536.24	Interdisciplinary Centre for Mathematical and Computational Modelling, University of Warsaw	BladeCenter QS22 Cluster, PowerXCell 8i 4.0 Ghz, Infiniband	34.63

電力当りの性能で、世界一を達成

#2: IBM PowerXCell, #9: NVIDIA Fermi

他の計算機に比べてどうか？

プロセッサだけで、電力当り性能でみてみると

プロセッサ	設計 ルール (nm)	電力当り 性能 (GF/W)
GRAPE-DR	90	4.1
GRAPE-6	250	3.24
Tesla C2050	40	2
Xeon 5680	32	0.6
「京」	45	2

- GRAPE-DR は良いことは良いが、10 年前の GRAPE-6 と大差ない
- GRAPE-6 同様の専用回路なら 10 倍くらいよくできた

今後の方向

- 電力の問題は深刻:「京」は 30 メガワット
- GRAPE-DR のような方向は、汎用プロセッサを使うよりはずっといい
- でも、本当に効率がいいのはやはり完全に専用回路化すること
  - FPGA
  - 構造化 ASIC

まとめ

- 天文学研究では「計算」はとても大事
- 専用計算機を作ると、同じコストで計算機を買ってくるのではできないことができる
- とはいえ、時代が変わると作り方も変える必要があるのかも、、、

おまけ — 4月からの牧野のやること

- 「京」の後継プロジェクトが一応文部科学省に予算ついた。
- GRAPE-DR を色々いじり回したようなものを「加速部」とかいう名前で作ることに。
- というわけで、「計算科学研究機構エクサスケールコンピューティング開発プロジェクト 副プロジェクトリーダー/コデザイン推進チームチームリーダー」とかいうものに。
- ELSI PI は続けますが、卒研/大学院担当ははずれます。