自己重力系の構造形成と
その計算機シミュレーション

牧野淳一郎

東工大 地球生命研究所

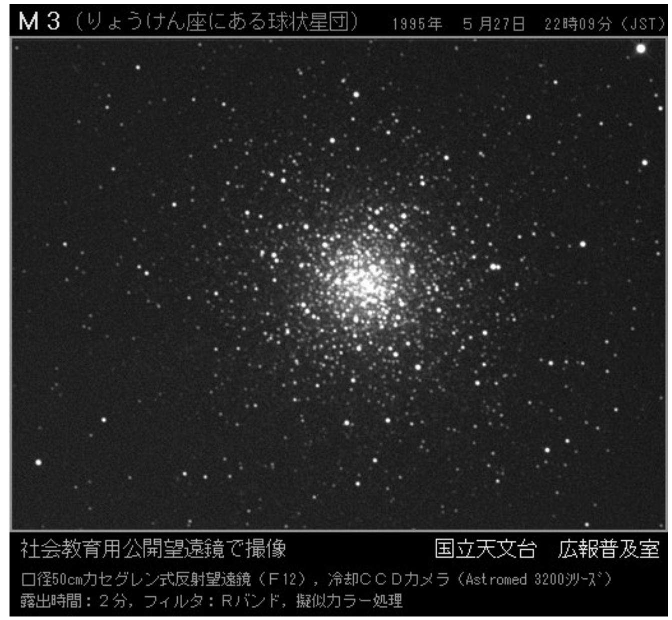
講義概要

1. 自己重力多体系
    - 自己重力多体系とはどんなもの？
    - 太陽系とその安定性
    - 宇宙膨張と銀河形成
    - 重力熱力学的不安定
2. 最近の研究から
    - ブラックホールのある系について
    - 銀河形成・渦巻構造
3. 計算機の話

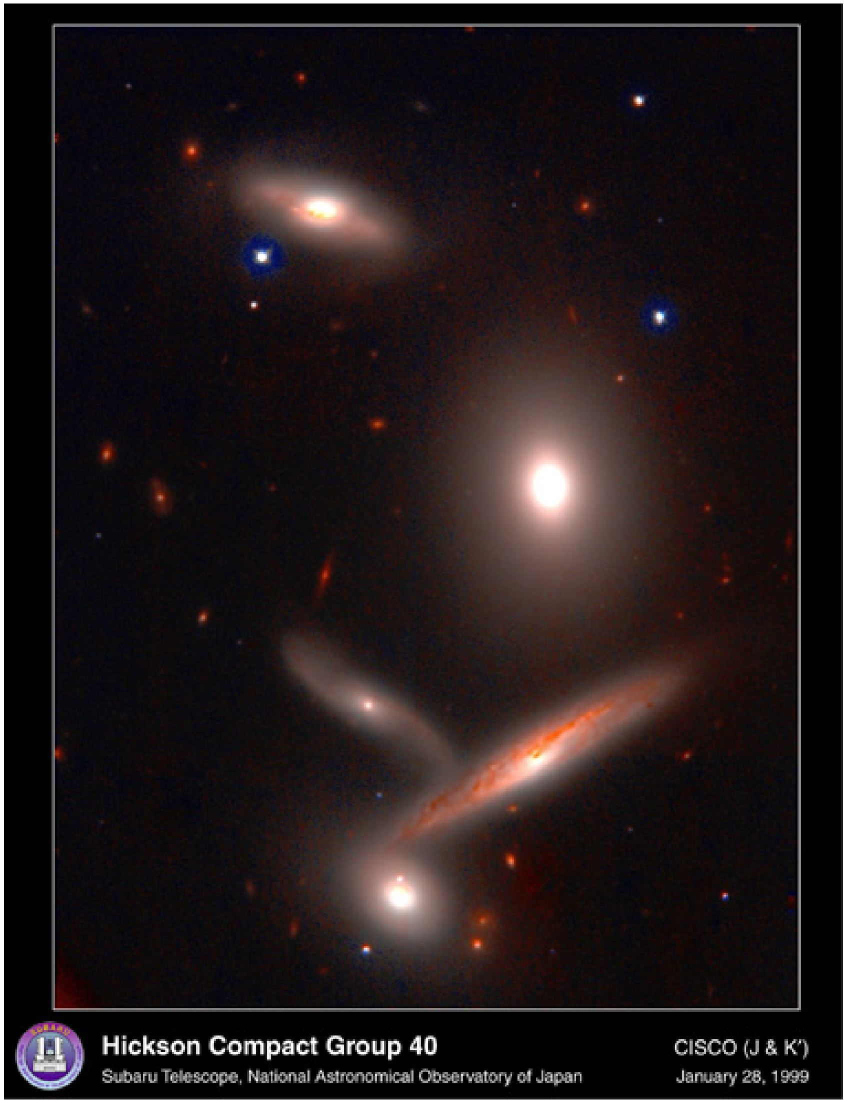
そもそもどんなもの？(観測)

銀河

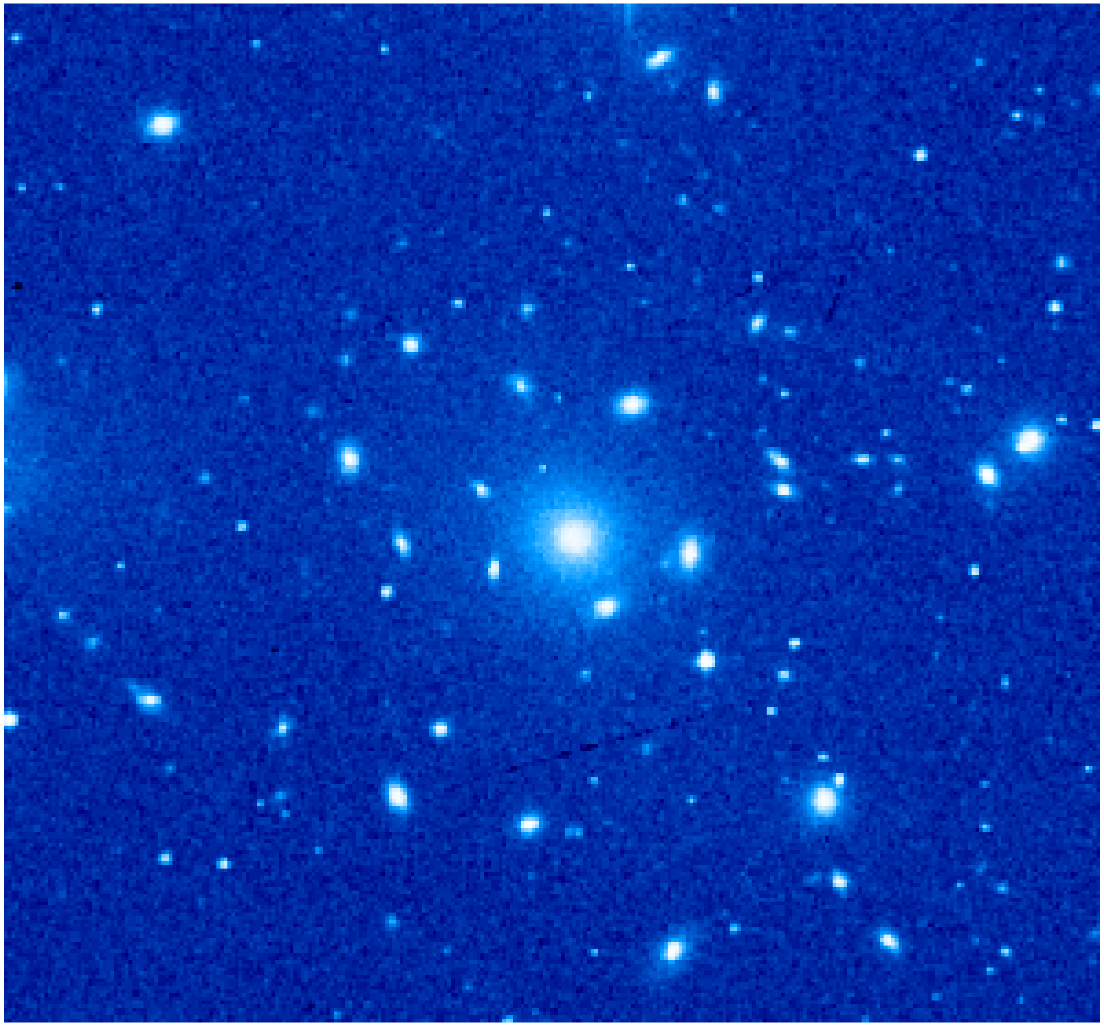
球状星団



銀河群

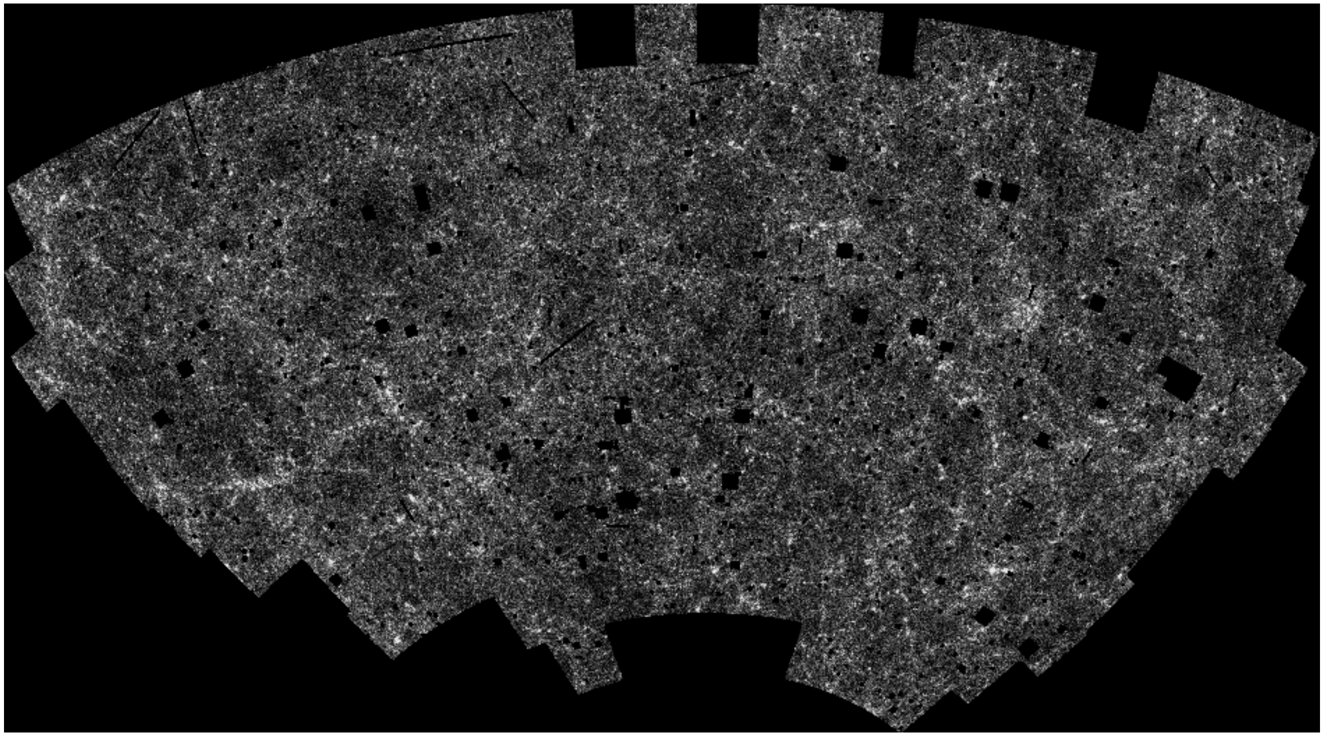

Hickson Compact Group 40
Subaru Telescope, National Astronomical Observatory of Japan
CISCO (J & K')
January 28, 1999

銀河団



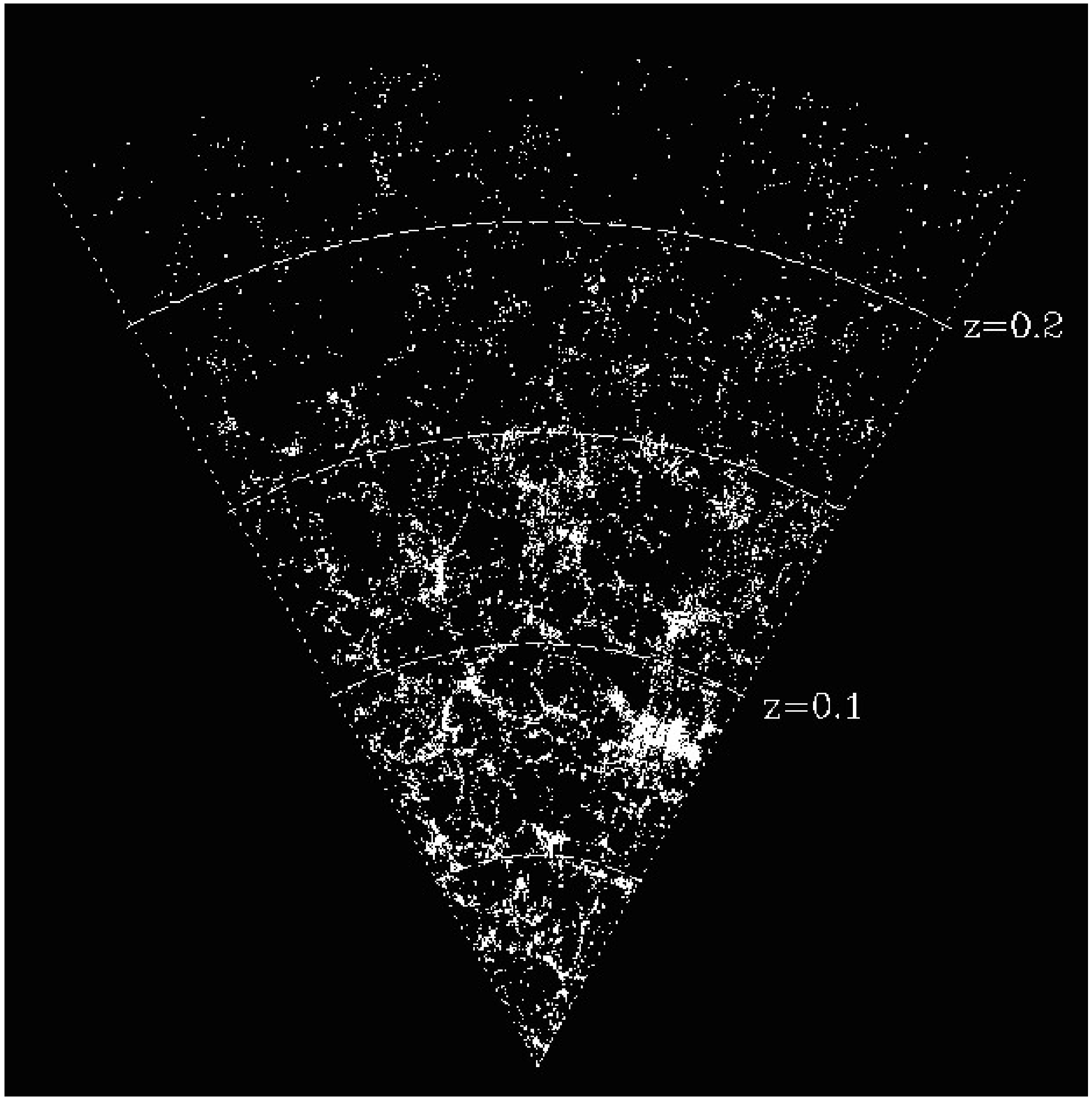
http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



支配方程式:

太陽系、星団、銀河、銀河団、宇宙の大規模構造などの基本方程式

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j \boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- それぞれの星（あるいは惑星）を一つの「粒子」と思った時に、ある粒子は他のすべての粒子からの重力を受ける。
- 大抵の場合に相対論的効果は考えなくていい（速度が光速にくらべてずっと小さい）

計算機「実験」

実際に星や惑星をどこかにおいて実験するのは不可能

計算機で支配方程式を積分することで実験の代わりにする

＝「計算機実験」

実験そのものとはちょっと違う

- こちらが入れた物理法則以外は入ってこない（はず）
- 計算があっているとは限らない

重力多体系の基本的性質

惑星や星と、それ以上の大きさの構造の基本的な違い：

圧力が重力とつりあっているわけではない

では、どうして潰れてしまわないか？
— Newton 以来の疑問。

- 太陽系
- 銀河
- 宇宙全体

太陽系の場合

太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からのに比べて 3 桁程度小さい（木星の質量は太陽のほぼ 0.1%）。従って

ケプラー問題＋摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか？（惑星の軌道は本当に安定か？）というのは現在でもまだ完全に解決されていない大問題。

古典的な（19 世紀くらいの）理解

「ラプラスが太陽系の安定性を証明した」

これは摂動展開したという話。

- ラプラスの頃にはまだ無限級数の収束条件はそもそも知られていなかった
- 摂動展開すればいいというものではないということをポアンカレが示した
- 冥王星、海王星などの新しい惑星がみつかった
- 単純な力学系でも「カオス」になるということがわかってきた

近代的な（20 世紀後半の）理解

20 世紀後半には太陽系が本当に安定かどうか？というのは、

「なんだかよくわからない問題」

に戻ってしまった。

用語の整理

安定 太陽系だと、要するに惑星がどっかにとんでいってしまうとか、2 つがぶつかるとか太陽に落ちるとかそういった大きな変化はないということを定義にする。

可積分 任意の初期条件で解析的な解が求まる。（多重）周期的なので、フーリエ級数で書ける

用語の整理(続き)

カオス的 これも定義はかならずしもはっきりしない。可積分なものはカオス的ではないが、一般には可積分かどうかわかるとは限らないし、可積分でなくてもある初期条件の範囲で安定な解が求まるような力学系もある。

ややこしい例

可積分ではないけれど安定な解がある古くて新しい問題：重力 3 体問題。

3 個の質点がお互いの重力に引かれて運動する。

銀河、星団等のもっとも簡単なモデルともいえる。

(2 体問題は可積分)

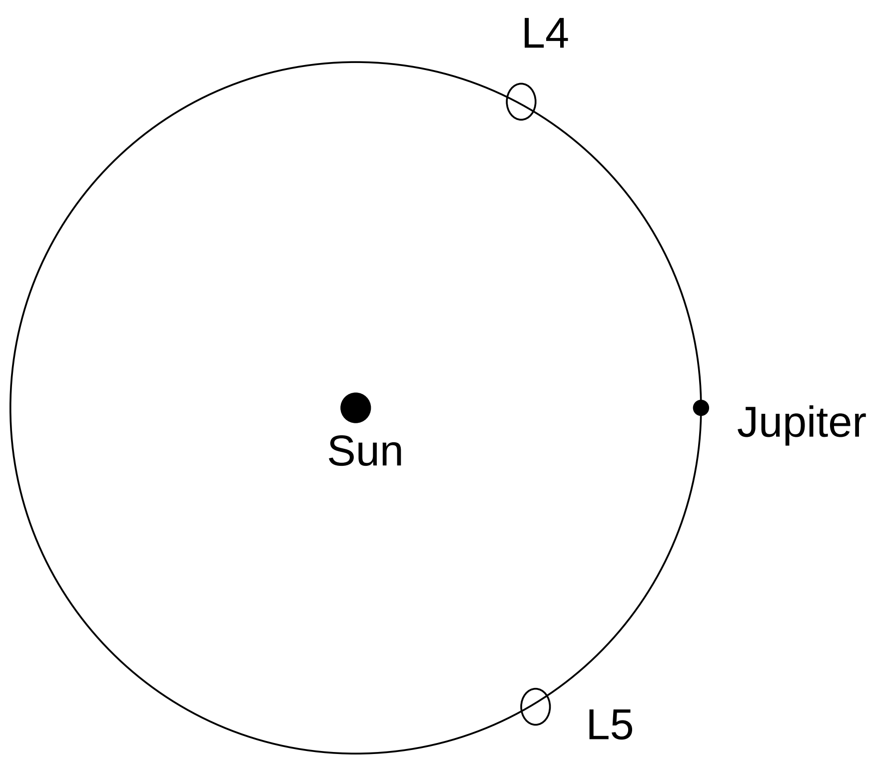
3 体問題の性質

一般の 3 体問題は可積分ではない： ポアンカレによって「証明された」

が、これはどんな初期条件でも安定ではないというわけではない。

安定な解の例

ラグランジュ解（正 3 角形解）。
$2,3$ 個めの質量が十分小さければ安定。
太陽・木星・トロヤ群の小惑星は実際にこのラグランジュ解を作っている。
（ラグランジュではなくてオイラーによって発見されたとか､､､）



ちょっと余談

20年くらい前に発見された新しい安定軌道 — Figure-8 Solution

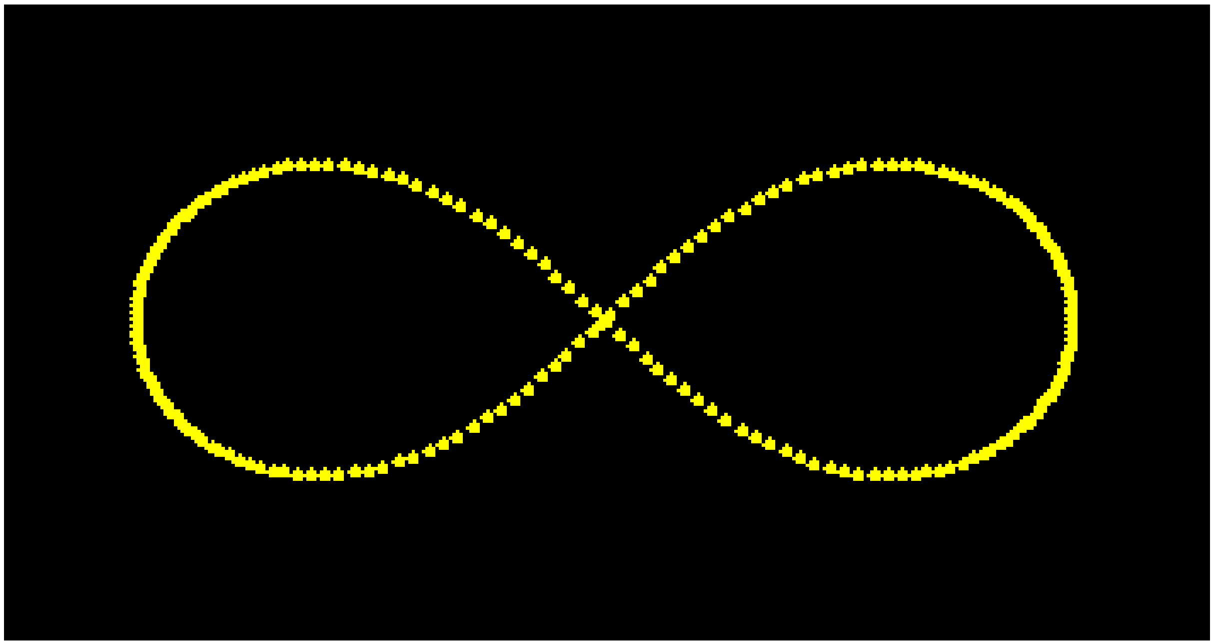


Figure-8 solution

- 3個の質量がほぼ等しい (0.005% 程度) の時にだけ安定（らしい）
- 数値的に（計算機で）周期軌道を見つける新しい方法が開発されて求まってきたもの。

太陽系の安定性について

結局、「計算機で長い間惑星の軌道を追いかけていって、どうなるか見る」のが唯一信用できる方法（信用できないとわかっていない方法）ということになった。

「計算機で軌道を追いかける」とはどういうことか？

計算機による軌道計算

ある運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \tag{1}$$

と初期条件

$$x(0) = x_0, \frac{dx}{dt}_{t=0} = v(0) = v_0 \tag{2}$$

が与えられたとして、そのあとの時間発展を計算機で求めること。

具体的な方法

基本的には、最初の位置（と速度）からちょっと後の時刻の位置を求めるというのを繰り返す。

もっとも基本的な方法：オイラー法

1 変数で書くと

$dx/dt = f(x)$ に対して、

$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t))$ と近似するもの。

つまり、ある時刻での解のテイラー級数展開の 1 次の項までをとったもの

もっと効率の良い方法が一杯研究されている

で、安定性はどうなったかというと

と、こういうような、いろいろな方法が出てきたこと、計算機が速くなったこともあって、

太陽系の惑星の軌道は「安定ではない」

ということが 1987 年には示された

ここでの「安定ではない」の意味は：

「非常に近い初期条件の太陽系を 2 個つくってそれぞれ別に計算すると、それぞれでの惑星の位置の差がどんどん大きくなっていく」ということ

不安定のタイムスケール

大きくなるタイムスケール：リアプノフ時間といわれるもの。軌道間の距離が e 倍になる時間。

求まったリアプノフ時間： 2 千万年

これ自体は 8.5 億年の計算をして求まったもの。

太陽系はでは 45 億年間どうして存在を続けているのか？

さらに長い時間の計算（主に国立天文台の木下・中井・伊藤らによるもの）でわかったこと：

- リアプノフ時間は確かに 2 千万年 程度と短い
- だからといって惑星がどこかに飛んでいってしまうというようなことはおこらない（らしい）

つまり、軌道の安定性ということからみるとカオス的だが、だからといって全くなんでも起こるというわけではなくてある狭い範囲（どういう範囲かはよくわからない）に軌道が収まっている（らしい）

冥王星は惑星じゃなくなったし

だからいうわけでもないが、2009年に Nature にでた論文:

Vol 459 | 11 June 2009 | doi:10.1038/nature08096 nature

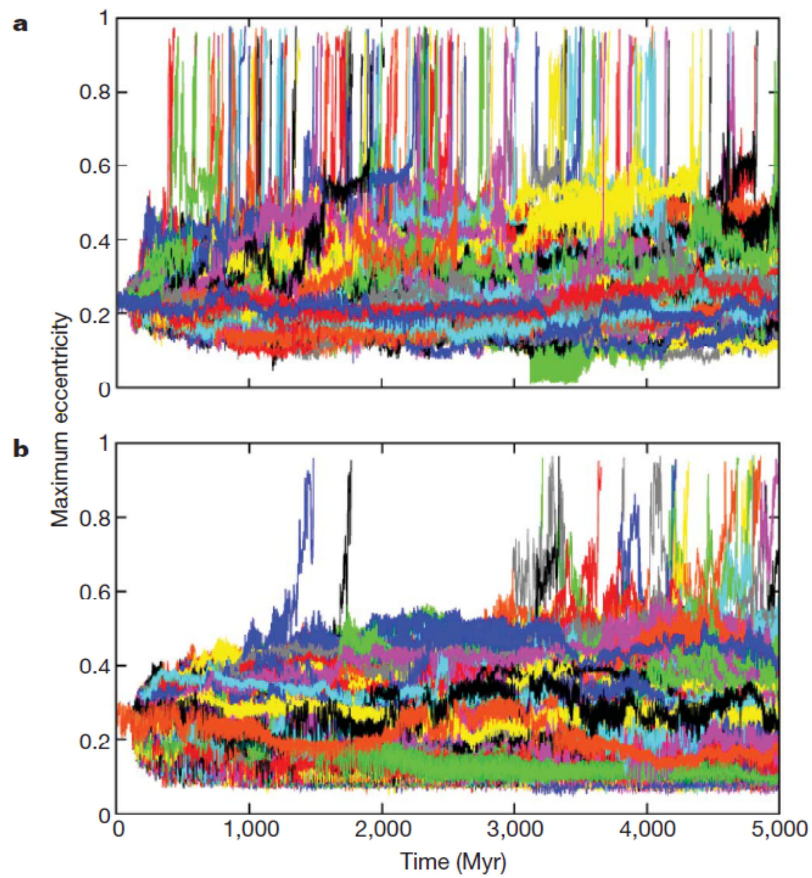
LETTERS

Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth

J. Laskar[1] & M. Gastineau[1]

地球が水星や金星とぶつかる ???

Laskar and Gastineau 2009



- 水星の初期の位置をほんのちょっとだけ (0.38mm) づつ変えて、沢山の「太陽系」の進化を計算した
- 結構な数の「太陽系」で、水星の離心率が大きく上がって金星や地球とぶつかった
- 但し、一般相対論的効果をいれると、いれない場合より安定になった

本当に計算あってるのかどうかは？

結局のところ

そういうわけで安定かどうかはまだよくわかって
いない。

色々な人が色々な方法で研究中。

以下、太陽系の話はおいて銀河とか星団の話に
移る。

なにが問題か？

銀河とか星団とかはそもそもどうしてそこにあるのか？

それらは安定なのか？

どうやってできたのか？

というようなことが問題。

ニュートンが考えたこと：

太陽と同じような星が宇宙全体に広がっているとすれば、それらはお互いの重力で集まったり落ちてきたりぶつかったりしないか？

本人が考えた解答：

落ちてくるのには1億年くらいかかるから大丈夫（というか、宇宙の年齢がこれで決まる？）

現代的な解答：

2 つの問題があることになる。

- 宇宙全体としてはなにがおきているのか
- 一つ一つの星、太陽系、銀河とかについてはどうか？

宇宙全体としてはなにがおきているのか？

「宇宙論」の基本的問題。

＝宇宙空間というものはどうやってそこに存在できているか？

一般相対性理論で初めて本当に扱えるようになった問題。

ものが落ちないようにする方法

- 「反重力」でささえる
- 宇宙は広がっているということにする。重力で減速はしている。
- 上の 2 つの組合わせ

「反重力」なんての超科学かトンデモかと思うかもしれないけど、これはそうでもなくてアインシュタイン自身のアイディア。そういうもの（宇宙項）があるということにすると空間が落ちてこないで済む。

宇宙膨張

宇宙が全体として膨張しているとすればアインシュタイン方程式に宇宙項をつけなくても解がある：ルメートルとかド・ジッターのアイディア。これは 1920 年ころ。

遠くの銀河を観測すると本当に距離に比例した速度で遠ざかっているらしいとわかってきたのが 1930 年頃。

最初は速度ー距離の比例係数の見積りがいまと 10 倍違ったのでいろいろ混乱があった。

宇宙膨張の問題点

当初の問題：

宇宙の年齢が今の $1/10$ になって、放射性元素で決めた地球の年齢よりずっと若くなった。

これを回避するために、「膨張するけれど定常で年齢は無限大」といったモデルも考えられた。

最近は大きな矛盾はなくなってきている（一応）。

宇宙膨張の数学

ニュートン力学で考えても振舞いは同じなので以下簡単に：

宇宙は一様でどこでもものの密度ρが同じであると考える

で、ある半径Rの球を考える。その表面での重力加速度は

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho R^3/R^2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho R \tag{3}$$

ここで、加速度は半径に比例することに注意。

数学（続き）

宇宙全体が一様膨張または収縮するという状況を考えると、ある点（半径）の運動方程式は単に重力がその中にある質量に比例することになるので、ケプラー問題と同じ（だが、一次元）になる。

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi GM/r^2 \tag{4}$$

ここで M は時刻が同じなら ρr^3。 違う時刻では、「長さがどう変わったか」というものを $a(t)$ という関数であらわすことにすると

$$\rho(t) = \rho_0/a^3, \quad r = r_0 a \tag{5}$$

数学（続き2）

a の従うべき方程式は結局

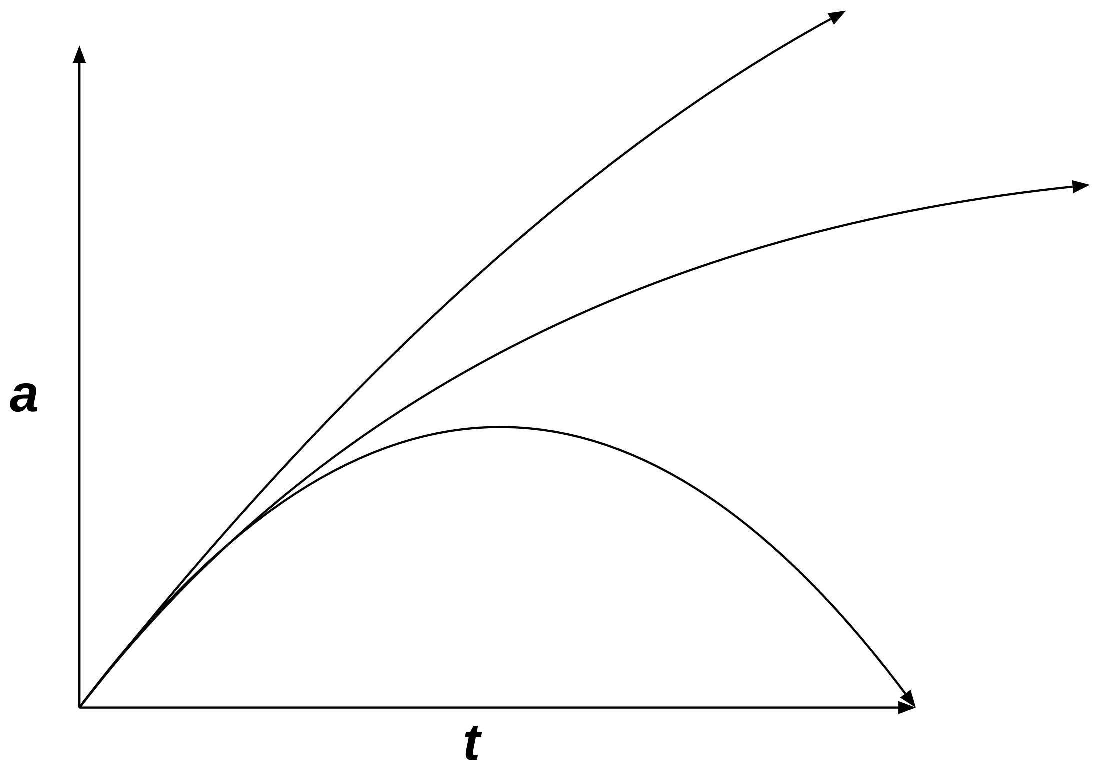
$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho_0/a^2 \tag{6}$$

この解は初期条件によって

- 無限に膨張する。無限の時間たっても有限の速度で膨張
- 無限に膨張する。無限の時間たつとちょうど速度が 0
- どこかで収縮を始めてまた一点に戻る

宇宙膨張の３通り

それぞれが２体問題の双曲線解、放物線解、楕円解に対応



現実の宇宙は？

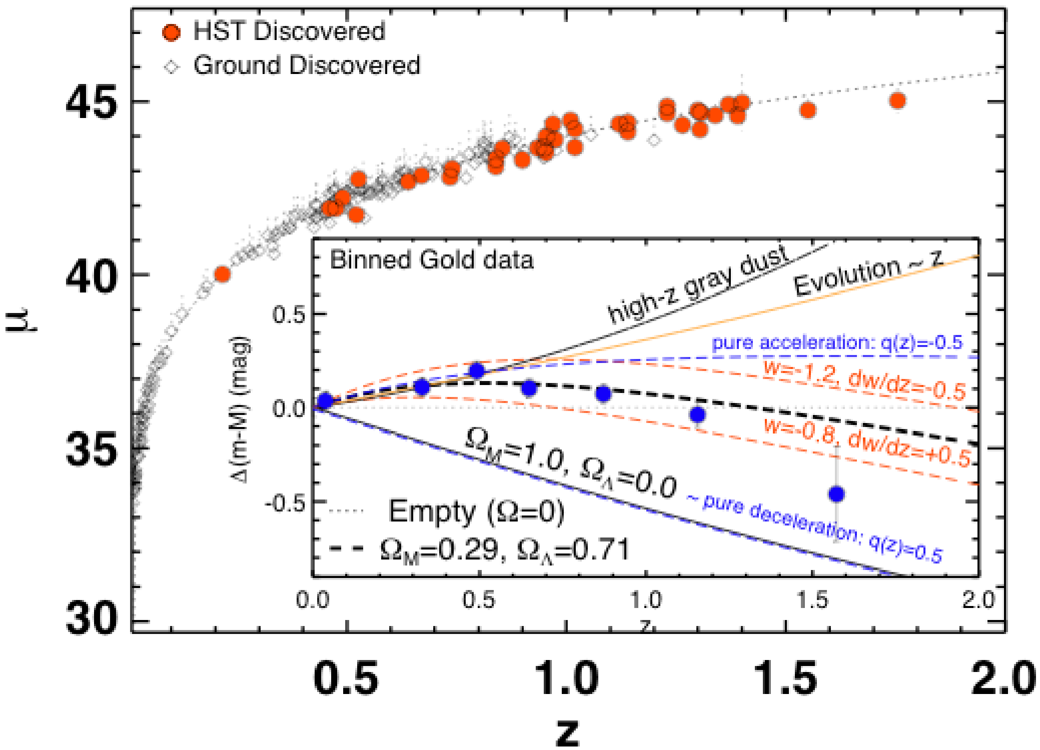
決定的な証拠があるとはいい難いが、いまのところいろいろな観測結果ともっとも矛盾しないのは、

- 無限に膨張する
- しかも、単純な双曲線解よりも最近膨張が速くなっている

というのが一番「本当らしい」

宇宙膨張の加速

遠方の超新星の明るさを観測する：同じ「赤方変移」でも膨張のしかたで距離、従って明るさが違う



- **普通に平坦な宇宙：明るい**
- **物質が少ない宇宙：暗い**
- **膨張が加速している宇宙：もっと暗い これが我々の宇宙**

2011 年ノーベル物理学賞
膨張を加速しているなにか＝ダークエネルギー

現在の宇宙の理解

- 物質+ダークエネルギーで「平坦」
- ダークエネルギーは重力とは逆に働いて、空間を膨張させる。遠い未来には指数関数的に膨張
- つまり、宇宙初期のとは違うけれど、現在の宇宙も「インフレーション」的な膨張過程にある
- 「ダークエネルギー」は、全く正体不明。ほぼ名前つけただけ

では「物質」のほうは？

- **観測の示唆: ダークエネルギー**$+$**物質**$=$**「**1**」**
- **ダークエネルギー:** 68.3%, **「ダークマター」:**26.8%, **普通の物質:** 4.9%
- **普通の物質: 陽子、電子、中性子からなる普通の元素。それぞれクォークからできている。**
- **ダークマター: 普通の物質「ではない」なにか。現在の宇宙ではほぼ重力しか働いていない**

そんなものが本当にあるのか？

銀河等はどうやってできたか？

- 宇宙全体は一様に膨張しているとすると、惑星とか、太陽とか、銀河はどうやってできたのか？
- 銀河は重力で星が集まっているだけなのにどうして潰れてしまわないのか？

という問題は依然として残っている。

まず、どうしてそれら、とりあえず銀河とか、ができたのか？ということ。

重力不安定による揺らぎの成長

宇宙全体としては、(非常に大きなスケールでは)
一様で密度一定であるとしても、小さなスケール
になると揺らぎのために一様からずれている。

宇宙が熱い火の玉から現在まで膨張する過程で、
その揺らぎが自分自身の重力のために成長して、
ものが集まってできるのが銀河とか銀河団という
ことになる。つまりは、ニュートンが最初に心配し
た、「星が落ちてくるのではないか」という問題に
対する答は、「おちてきちゃってる」というもの。

では、銀河はどうやって形を保っているか？

宇宙はなにからできているか

そのへんにある普通の物質：バリオン（陽子、中性子）＋電子でできている。

宇宙のバリオンのほとんどは水素原子のまま（ビッグバンの最初にヘリウムやリチウムが少しできて、あとは星のなか、特に超新星爆発の時にもっと重い元素が核反応で作られる)

ダークマター

見えるバリオンの量（星と、あとは電波や X 線でみえる水素ガスの量）：例えば銀河系の質量や、銀河団の質量のほんの一部でしかない。

銀河：回転曲線

銀河団：X 線ガスの温度から質量を推定

- 重力の理論が間違っている？
- なんだかわからないものがある？

ダークマター

どちらが本当かというのは簡単にはいえないわけだが、今のところ「なんだかわからないものがある」というほうが主流。

これはいろいろな状況証拠があるが、（僕の意見としては）大きいのは重力理論が違うことにした時に、銀河毎に重力理論が違うというわけにはいかない（統一的な説明があるはず）とすると説明が難しいということ。

ダークマターは何か？

大きくわけて 2 つの理論：

- Hot dark matter 質量をもったニュートリノが大量にあって、それが宇宙の物質のほとんどを占めている。
- Cold dark matter 未知の素粒子があってそれが宇宙の物質のほとんどを占めている。

実はニュートリノではうまくいかないということがわかっている。（ことになっている）この場合銀河団とか大きいものはできていても銀河はまだできていないことになってしまうため。

ダークマターの正体???

- 現在のところダークマターの正体は「未知の素粒子」
- 有力な候補、と考えられているもの:「超対称性理論」で予言されている粒子 (どういう理論でどういう粒子かはあまり聞かないで)
- 名前: 「ニュートラリーノ」、質量: 陽子の100倍くらい?
- 普通の物質や他のダークマター粒子と、全く相互作用しないわけではない。
  - 1秒に1億個くらいのダークマター粒子が我々の体を通り抜けている
  - ダークマター粒子が私の体の原子とぶつかる: 1000年-1億年に1度くらい?
  - ダークマター粒子同士の衝突、というのもある。

ダークマター探査

2 つの方針:

- 直接検出: 検出器を通り抜けるダークマター粒子が普通の物質とぶつかり、はね飛ばすのを検出 (日本の XMASS、アメリカの CDMS-II など) CDMS-II は「発見したかも」と昨年 4 月に発表したが ???
- 間接検出: 宇宙の中でダークマター粒子が集まっているところでの対消滅からでてくるなにか (γ 線？電子？陽電子？) を人工衛星で観測 (Fermi 望遠鏡の天体の中にないか？ AMS 実験:ISS 上で反粒子を観測) AMS も「発見したかも」と昨年 4 月に発表したが ???

もちろんまだ見えてないので、どこにどれだけあるのかよくわからない

現在の宇宙に対する我々の基本的な理解

- 宇宙の物質のほとんどは、偉そうにいえば「未知の素粒子」、わかりやすくいえばなんだかわからないものである。
- 宇宙は全体としては一様だが、揺らぎがあって完全に一様なわけではない。宇宙膨張の間にその揺らぎが成長して銀河とか銀河団ができてきた。

こういった理解が正しいかどうか：本当にこういうやり方で現在の宇宙の構造ができるかどうかを計算機シミュレーションで調べることである程度はチェックできる。

宇宙の大規模構造形成のシミュレーション

計算の 1 例（国立天文台理論研究部・石山さん提供）

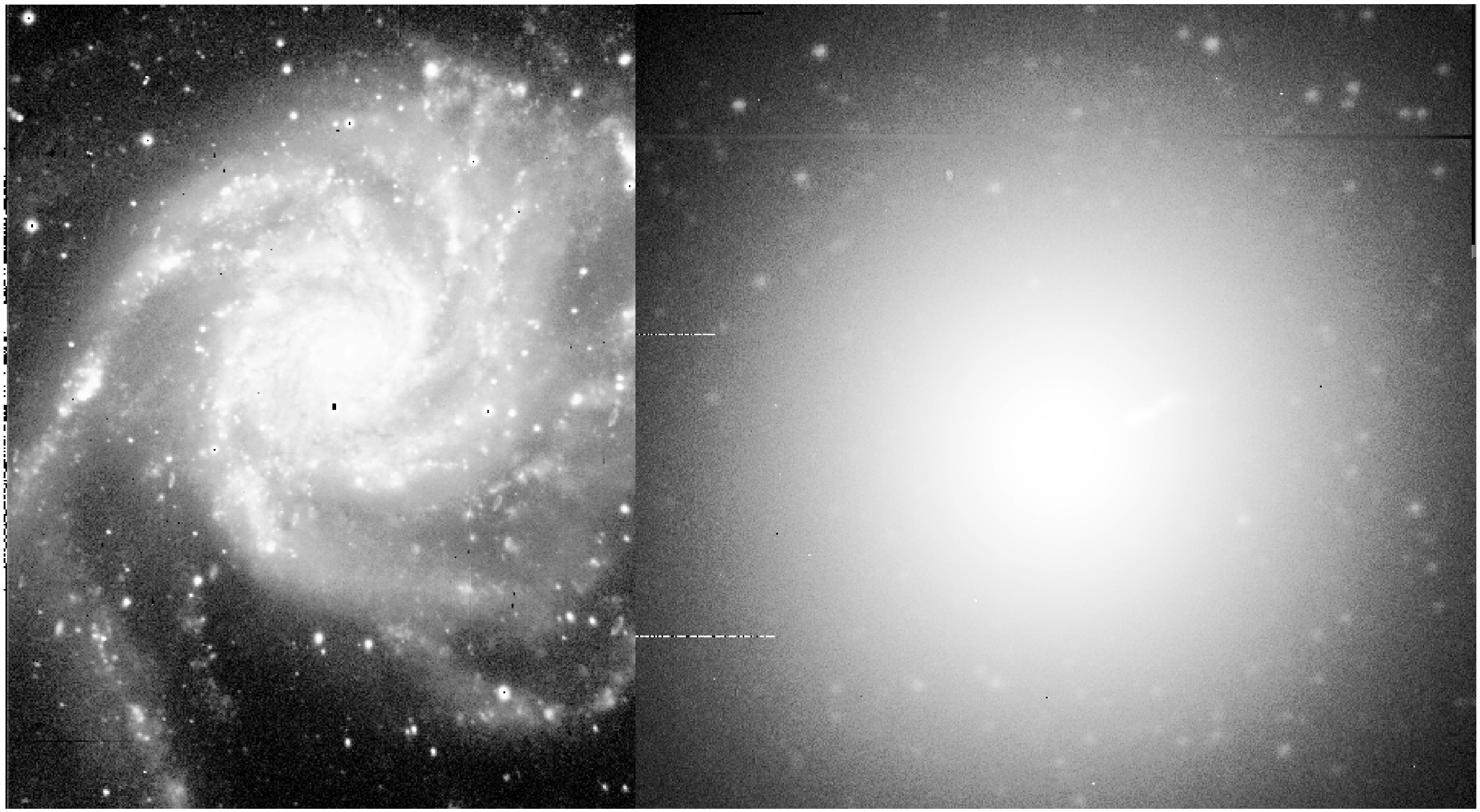
ここでやっていること：

- 基本的には「一様」な宇宙を、なるべく沢山の粒子で表現する
- 理論的に「こう」と思われる揺らぎを与える
- 理論的に「こう」と思われる初期の膨張速度を与える
- あとは各粒子の軌道を数値的に積分していく。基本的には太陽系の時と同じこと

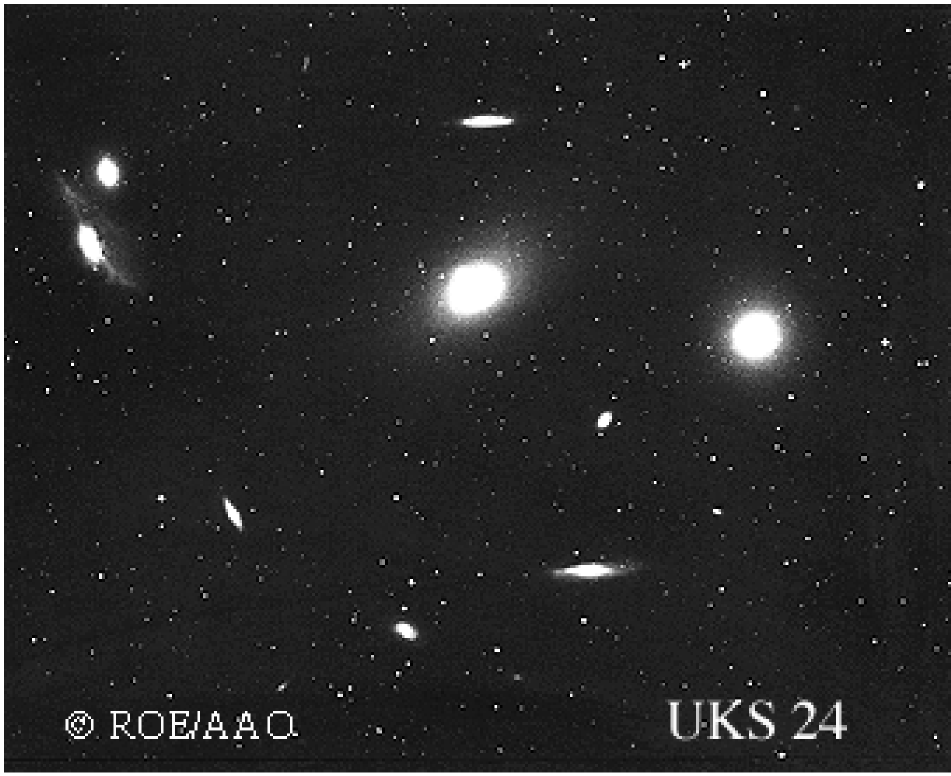
わかること

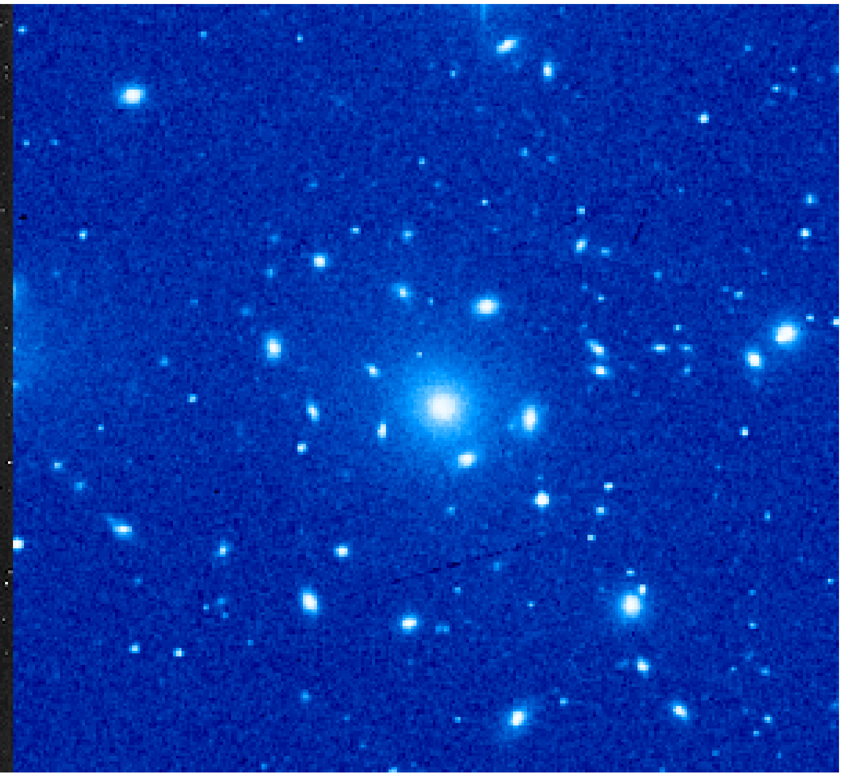
- 宇宙全体としては膨張していく
- 最初に密度が高いところは、他に比べて相対的に密度がどんどん大きくなっていく。
- 特に密度が高いところは、そのうちに膨張しきって潰れ出す。
- （このシミュレーションでは）最初に小さいものが沢山できて、それらがだんだん集まって大きなものになる
- 大雑把にいうと、銀河とか銀河団はこのようにして潰れたもの。

銀河



銀河団





宇宙論の問題としては：

- 観測される銀河や銀河団の性質、特に分布
- シミュレーションでできた銀河や銀河団の分布

を比べて、「どうすれば現在の宇宙ができるか」を決めることで、「宇宙の始まりはどうだったか」を逆に決めたい。

例えば宇宙の膨張速度、密度、宇宙項、 初めの揺らぎの性質、 ダークマターの性質

Ill-posed problem?

つまり、、、

- 宇宙初期の揺らぎ：（銀河や銀河団になる細かいところまでは）直接には見えない
- 昔の宇宙の膨張速度：直接には見えない
- ダークマター：見えるかどうか（あるかどうかも）わからない

これらを、全部同時に銀河の観測から決めたい。

そんなことは可能か? という問題。

問題点

シミュレーションで出来るのは、本来はダークマター の分布だけ。

銀河になるにはそのなかでガスが収縮して星にならないといけない。

つまり、どういう条件で星ができるかが決まらないと本当には比べられない

- 銀河の数が変わる（合体するとか）
- 銀河の明るさが変わる（若い星があると明るい。古くなると暗くなる）

原理的には

- こういった問題点の解決: 「ガスが収縮して星になる」ところも全部シミュレーションすればいい
- そういう方向の研究ももちろん進められている
- が、まだ、シミュレーションの信頼性その他に問題が、、、(時間があれば最終回くらいにこの話をします)

話を戻して、、、

なぜ銀河は潰れないか？

太陽系 太陽が圧倒的に重い — 2 体問題$+$摂動

一般の3体問題：不安定

安定（最終）状態：2体の連星 $+$ もう一つ（無限遠に飛ばされる）

銀河ではなにが起きるか？

銀河の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x,v)$: 6 次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x,v)dxdv$ がある「体積」 $dxdv$ の中の星の数を与えるとする。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} f - \boldsymbol{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

ここで Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{8}$$

ここで、 G は重力定数である。

分布関数の従う方程式（続き）

ρ は空間での質量密度

$$\rho = m\int dv f, \tag{9}$$

である。

この書き換えは難しいことではないんだけど、「面倒臭い」ので導出はここでは省略。

力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがありえる（一般にいつでもそうというわけではもちろんない）

これを「力学平衡状態」という。

銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態にいくのか？

はよくわからない.

なぜ力学平衡にいくのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態にいく。

（但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、）

前に見せた銀河形成のシミュレーションはその一例。

ジーンズ不安定

良く考えると、宇宙膨張と構造形成の関係はあんまり簡単ではない。

- ビッグバン直後の宇宙は熱平衡、一様密度
- 今の宇宙は全く一様ではない (少なくとも「小さな」スケールでは。メガパーセクとか)
- 理論的にはどうやって一様でなくなったか？

理解する枠組み: 重力不安定 (ジーンズ不安定)

ジーンズ不安定 (続き)

- 「理論的」枠組み:大抵、摂動論 (解けるものからの無限小のずれを扱う)
- ここでもそういう話
- で、ダークマター (無衝突ボルツマン方程式に従う) だと面倒なので断熱のガスで考える (あとで述べるが、安定性条件は同じになる)

流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{10}$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Phi \tag{11}$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{12}$$

で記述される。

さらに状態方程式がいる。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいい)

記号のリスト

ρ: 密度

t: 時間

v: 速度

p: 圧力

Φ: 重力ポテンシャル

G: 重力定数

線型化

- 平衡状態からの無限小のずれの変化を見るため、ベースの解とずれの部分にわける。
- ρ, p, v, Φ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好
- 添字 0 がつくものはもとの方程式の平衡解であり、 1 がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）とする。

で、方程式を書き直す。

線型化した方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\rho}_0 \boldsymbol{v}_1) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 \boldsymbol{v}_0) = \mathbf{0} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{\rho}_1}{\boldsymbol{\rho}_0^2}\nabla \boldsymbol{p}_0 - \frac{1}{\boldsymbol{\rho}_0}\nabla \boldsymbol{p}_1 - \nabla \boldsymbol{\Phi}_1 \tag{14}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Phi}_1 = 4\pi G \boldsymbol{\rho}_1 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{p}_1 = \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{d\boldsymbol{\rho}}\right)_0 \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{v}_s^2 \boldsymbol{\rho}_1 \tag{16}$$

ここで v_s は音速である。

ベースが無限一様の場合

ベースは無限一様でいたるところ密度、圧力が等しく、速度も 0 とすると、連続の式とオイラー方程式が

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 v_1) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{18}$$

となる。下 2 本は見かけはかわらない。

これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \tag{19}$$

この方程式の振舞いは？

- 最初の 2 項をみれば普通の波動方程式、
- 最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。
- 波長が短い極限では普通の波動方程式
- 波長が長い極限では空間２階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

分散関係 (空間波長と時間振動数の関係) を求める

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\boldsymbol{\rho_1 = Ce^{i(\mathrm{k}\cdot \boldsymbol{x} - \omega t)}} \tag{20}$$

として代入すれば

$$\boldsymbol{\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0} \tag{21}$$

ということになる。したがって、

$$\boldsymbol{k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2}} \tag{22}$$

と書くことにする。

分散関係

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

なお、一応念のために書いておくと、式 (20) の形の解だけを考えるのは任意の初期条件からの解が（連続性とかを仮定すれば）この形の解の線形結合で表現できるからである。解の線形結合が解であるのは方程式が線形だからであり、任意の解が表現できるのは要するにフーリエ変換が完全系をなすからである。

分散関係からいえること

- 波長が短ければ普通の音波
- 波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化
- つまり、長い波長のモードは密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）

いいかえると

- 十分に波長が長いと必ず不安定になる
- 重力があると無限に一様な状態というのは温度無限大でない限り必ず不安定

ジーンズ波長

k_J に対応する波長: ジーンズ波長 λ_J

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} v_s \tag{23}$$

ジーンズ波長くらいの半径の球を考えると、

- 運動エネルギー: $M_J v_s^2$ の程度
- 重力エネルギーは GM_J/λ_J の程度、
- M_J はジーンズ質量で (半径 λ_J の球の質量)

計算すると、運動エネルギーと重力エネルギーが大体等しい。
ジーンズ波長はそういう長さ。

ここまでの解析でごまかしたところ

- 一様密度の物質があれば、ポアソン方程式の右辺が 0 じゃないから重力ポテンシャルは一様な値というのは何かおかしい
- が、一様で無限にひろがっているなら、重力ポテンシャルが場所によって違うのも何か変

宇宙全体の場合: 宇宙膨張に対して不変な座標系 (共動座標という) で方程式を書き換えるとこの問題は解消。但し、時間変換がはいるので、時間の指数関数的にはならない。

初期条件と力学平衡の状態の関係

あまり役に立つことはわかっていない。初期条件と最終状態の間の関係をいろいろ調べている段階。

このへんは、基本的には前にいった数値計算でやられる。

- 1996 年頃に、宇宙論で考えるような初期条件の範囲内ではいろいろパラメータを変えてもできるものはみんな同じであるというシミュレーション結果が出た。
- が、この結果は実は間違い であったことが、より大規模なシミュレーションからわかった。

というわけで、わかっていない問題は非常に多い。

もう一つ大きな問題

星の数は実際には無限大というわけではない。

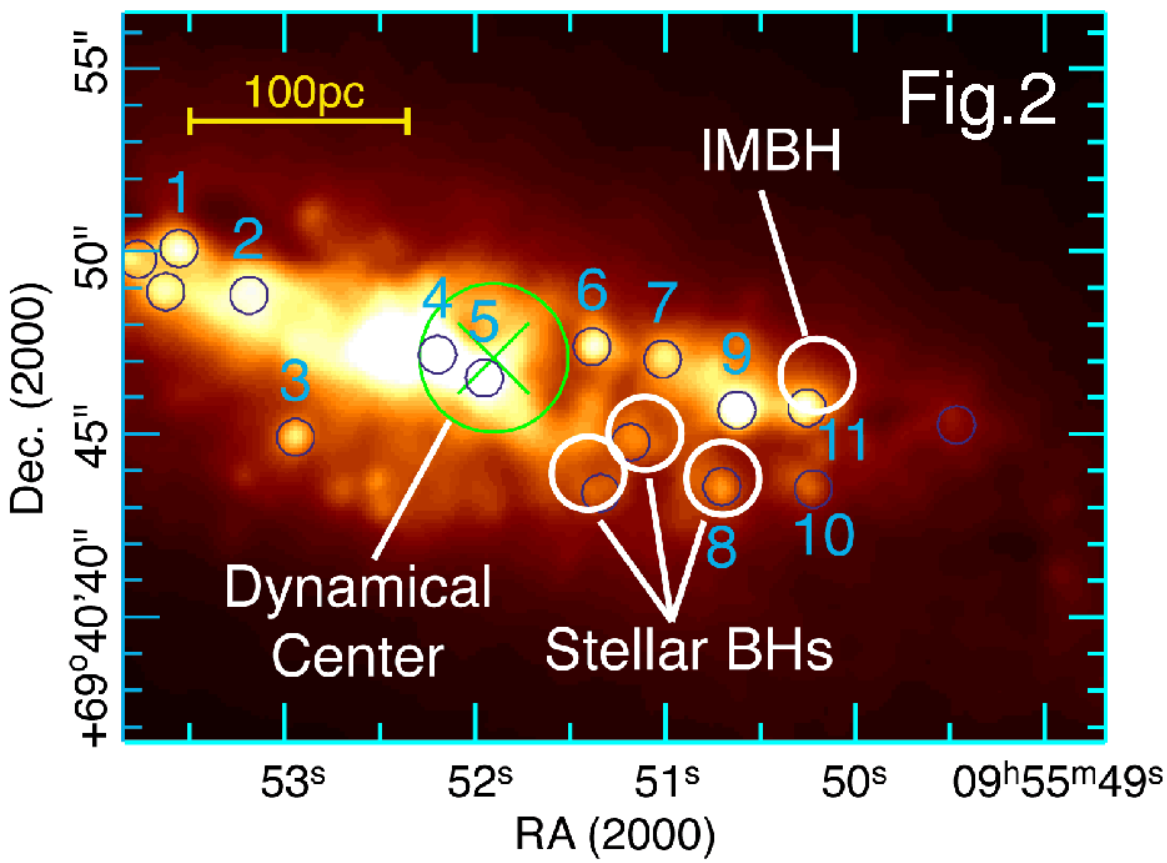
銀河： 10^{10} かなり多い、

散開星団、球状星団 $10^{4\sim6}$

銀河中心 巨大ブラックホール$+10^7$個程度の星

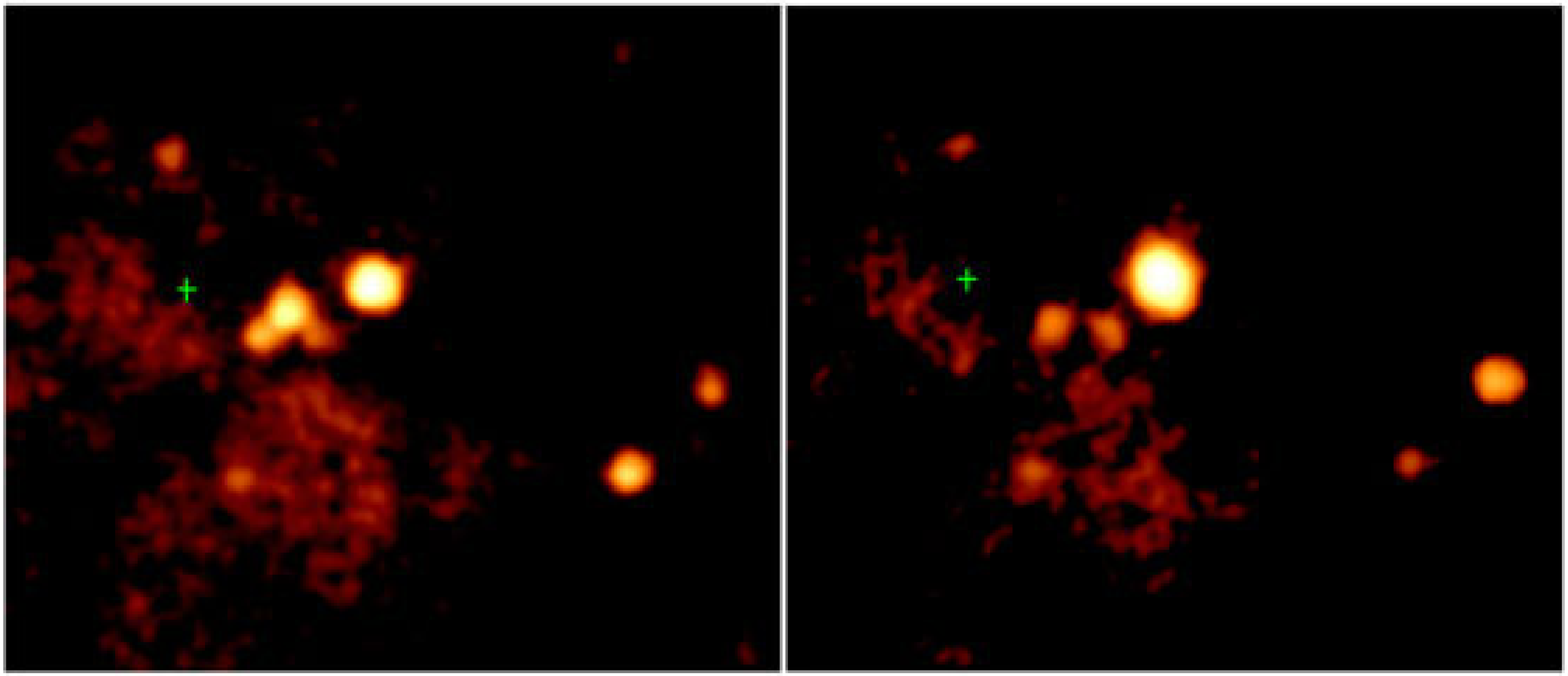
こういったところではどういうことが起きるか

銀河中心



近傍の銀河 M82 の中心部の「すばる」望遠鏡による写真

X 線では



NASA Chandra X 線衛星による写真

こういったところではいったい何がおきているか？

無限には星が多くない時

厳密には力学平衡にない

$\to$ それぞれの星の軌道はだんだん変わっていく

物理的には大自由度のハミルトン力学系

$\to$ 統計力学的（熱力学的）に振舞うはず

つまり：熱平衡状態（エントロピー最大）にむかって進化するはず。

（普通の気体なんかと同じ）

普通の気体との違い

- 重力のエネルギーは質量の 2 乗に比例
- 粒子を閉じ込めておく箱（境界）があるわけではない

2 つ違うとよくわからないので、違いを一つにしてみる。

具体的には：仮想的に球形の断熱壁でかこんだなかの理想気体を考える。

重力の効果があるくらい大きいもの。

断熱壁の中の理想気体

温度（熱エネルギー）が重力エネルギーよりもずっと大きい状態

これはもちろん重力がない時と変わらない

温度を段々下げていく（エネルギーを抜いていく）

↓

重力の効果が出てくる。

具体的には、中心の密度が上がって、壁のところが下がる。これは、重力と圧力勾配を釣り合わせるため。地球の大気が上にいくほど薄くなるのと同じ。

方程式と解析解

球対称な壁の中の、等温熱平衡なガスの方程式はこんなふう。

$$\frac{dp}{dM} = -\frac{M}{4\pi r^4}, \tag{24}$$

$$\frac{dr}{dM} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \tag{25}$$

$M(r)$ は半径 r の中の質量、p と ρ は圧力と密度、ここでは重力定数が 1 になるような単位系だとする。

方程式と解析解(続き)

座標系のとりかたが普通ではないが、恒星内部構造論では質量を座標にとる慣習がある。下の式は逆数とれば普通の式、上の式は

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho M}{r^2} \tag{26}$$

で、圧力変化が重力と釣り合う、という式である。温度は、状態方程式

$$p = \rho T \tag{27}$$

方程式と解析解 (3)

- 一般の境界条件で解析解があるわけではないが、$\rho \propto r^{-2}$ の形の解はある。(代入すれば解であることがわかる)
- 壁をつけた人工的な条件ではこの解は存在できるが、「自己重力系」としては存在できない (質量が無限大になる)
- 中心で有限密度の解も、$r \to \infty$ の極限では解析解に漸近する
- そういう、解の系列を考える。

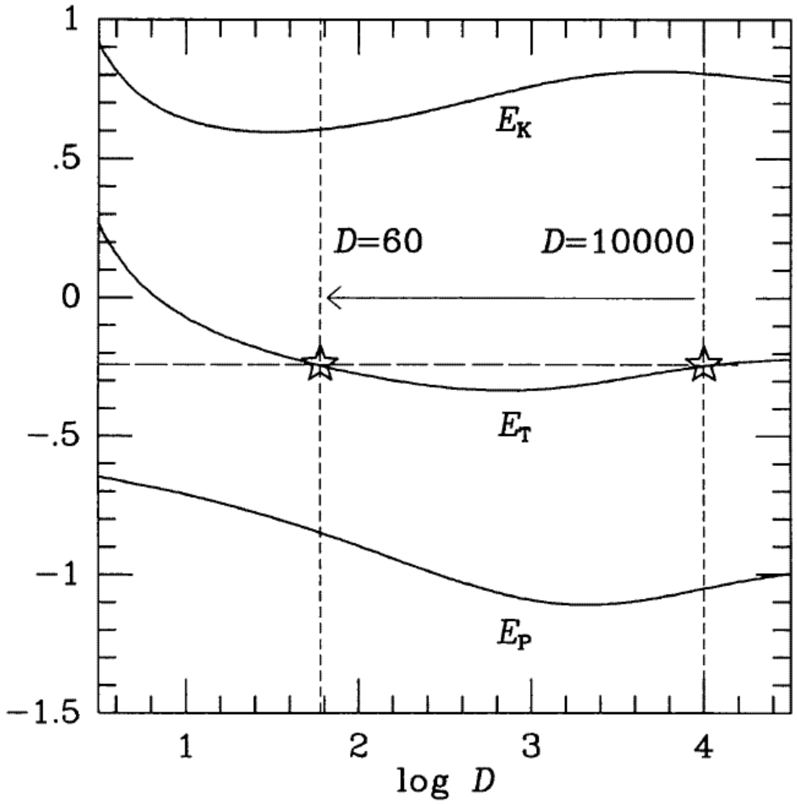
解の系列

- 物理的にしたいこと:ある質量のガスをある半径の球系の壁にいれて、段々温度を下げていく。そうすると、重力の効果が大きくなってきて中心と壁の密度比 (D とする) が大きくなる
- 計算機でこの解を求めるには:中心で適当な密度から始めて、外側にむかって積分していく。任意のとこである D の解が求まる。これを、質量、半径を (例えば) 1 になるようにスケール変換して、温度もあわせる。

スケール変換

- 半径 r, 質量 m, 温度 t の解があったとする。$G=1$ で考える。スケール変換では半径を $1/r$ 倍、質量を $1/m$ 倍するので、重力エネルギーは r/m^2 倍になる。
- 熱エネルギーを同じ比率でスケールすれば、圧力と重力がちゃんと釣り合う解になっているはずである (ビリアル定理からくる要請) ので、温度は t/m 倍すればいい (はず)
- 始めからエネルギーだけ与えて、壁の中にある、という境界条件を満たす解を求めようとするとどうすればいいかわからないが、スケール変換すれば求められる。

エネルギーの下限



計算してみるとどこまでも温度を下げられるわけではない。
図に結果を示す。これは横軸に中心と壁の密度の比、縦軸にエネルギーをとったもの

熱平衡状態

$D = 709$ でエネルギーが最小になり、それ以上エネルギーが低い平衡状態はない。

さらに、エネルギーのほうから考えてみると、あるエネルギーに対してそれに対応する平衡状態が 2 つ以上あるところがある。

- もっとエネルギーが低い状態は？
- D が大きいところはいったいなにか？

密度比が限界より大きい状態

これは「熱力学的に不安定な平衡状態」になっている。

安定／不安定：ここでは「熱力学的」

温度が一様な平衡状態に、すこし温度差をつけてやる（熱エネルギーを移動してやる）

- もとに戻る：安定
- 戻らない：不安定

熱力学的安定性

普通の世の中のもの：戻るに決まっている。

熱をもらった方は温度が上がる。

とられたほうは温度が下がる。

熱い方から冷たい方に熱がながれるので、元に戻る。

ところが､､､重力が効いているとそうなるとは限らない。

熱力学的不安定性

条件によっては以下のようなことが起こる

中心部から熱を奪う → 温度／圧力が下がる → 圧力を釣り合わせるために収縮 → 重力が強くなる → もっと収縮 → 結果として温度が上がる。

これが起きると、熱を奪われた方が温度が上がるので、ますます熱が流れだし、いっそう温度が上がるという循環にはいる。

これを、「重力熱力学的不安定性」という。

どうやって安定性を調べるか

「重力熱力学的不安定性」:

計算機によって安定性を調べることで初めて発見されたもの。

「計算機で安定性を調べる」というのはそもそもどういうことかという原理的な話をすこしだけしておく。

安定性解析の原理

ここで問題なのは適当な偏微分方程式（系）

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A(f(x)) \tag{28}$$

ここで、 A は「汎関数」。具体的には、例えば普通の熱伝導なら f の空間 2 階微分。f は例えば温度。

の定常解 $f_0(x)$ があったとする。

定義により $A(f_0(x)) = 0$

少しずれた $f = f_0 + df$ 、df の方程式を作る。

線形化(1)

df に何か入れればそれがどうなるかが計算できる

あらゆる可能な df について調べる？

そんなことがどうやってできるか？

これを可能にする方法が線形化して固有値問題にするということ。

線形化 (2)

仮定: df が f_0 よりもずっと小さい

df について線形な式にできる。

線形:

$$\frac{\partial df}{\partial t} = B(df(x)) \tag{29}$$

という形だったとして、

$$B(\alpha df_1(x)+\beta df_2(x)) = \alpha B(df_1(x))+\beta B(df_2(x)) \tag{30}$$

という性質を満たすということ。

線形化 (3)

もうちょっとわかりやすくいうと、

df_1 が解なら df_1 の定数倍も解

df_1, df_2 が解なら $df_1 + df_2$ も解

ということ。

固有関数

このように線形な方程式には、固有値、固有関数というものがある。

固有関数は、

$$\lambda df = B(df) \tag{31}$$

の解。λ が固有値。

この時、時間発展が $df = e^{\lambda t} df_0$ の形に書ける。

一般には任意の関数が固有関数の重ね合わせで書けるので、これら固有関数だけを調べればいいことになる。

固有値と安定性

これの解（固有関数）は一般には無限個ある。

対応する固有値λ も無限個ある。

「もっとも大きい固有値」から順に求めるような計算方法があるので、求まった最大の固有値が負（実数部分が）であれば安定ということになる。

もうちょっと具体的な計算法

まず f_0 自体が必要。

空間も細かい刻みにわけて、その各点での値を近似的に計算する。

出てくるのは連立方程式になる。これを計算機を使って解く。

f_0 が求まると、それを使って df についての方程式を具体的に書ける。

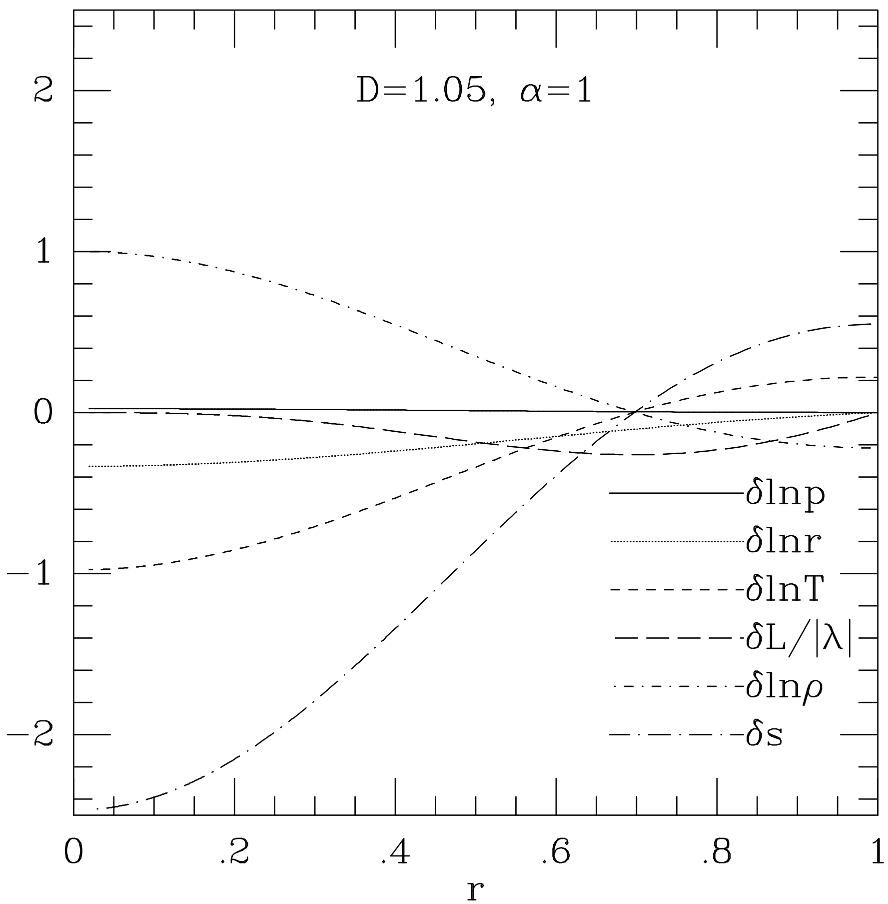
df についての方程式

これもやっぱり連立方程式になるが、線形であることから連立一次方程式になる。つまり行列でかける。

この行列の固有値、固有ベクトルを求めると、元の問題の固有値、固有関数の近似値になっている。

と、なんかややこしいが、計算機で安定性を調べるという時ににはだいたいどんな分野でも同じようなことが出てくるので、ちょっと詳しく書いてみた。

安定な場合, $D = 1.05$

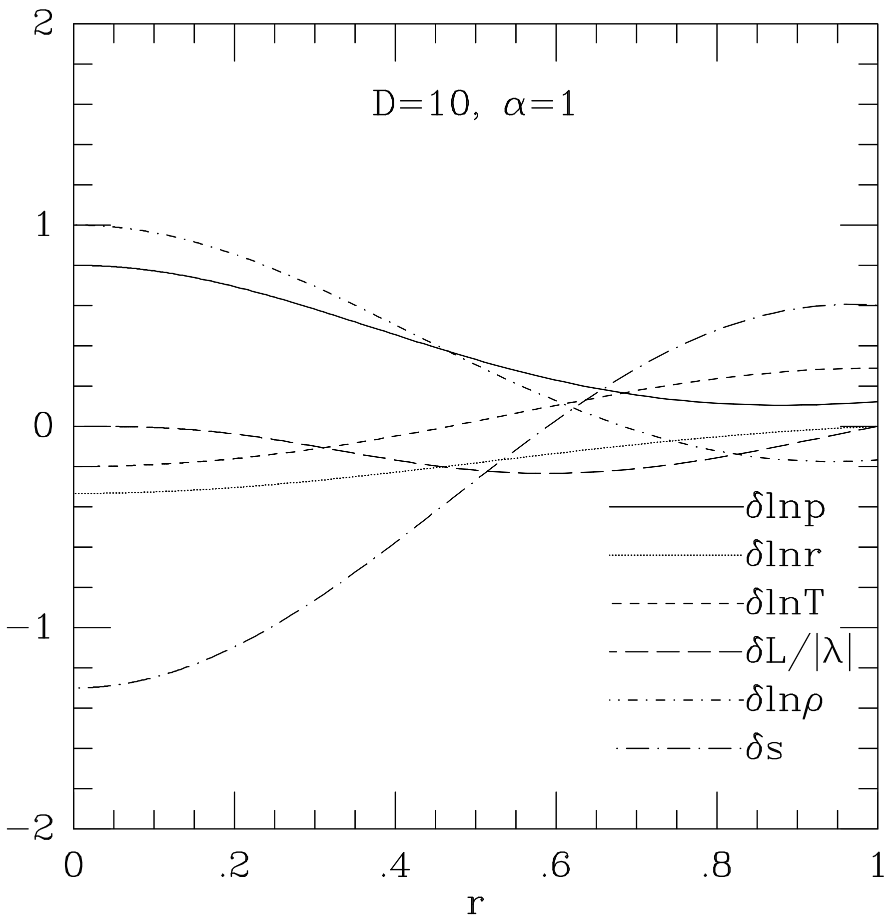


λ: 固有値

- 圧力は変化しない
- エントロピーと温度が比例

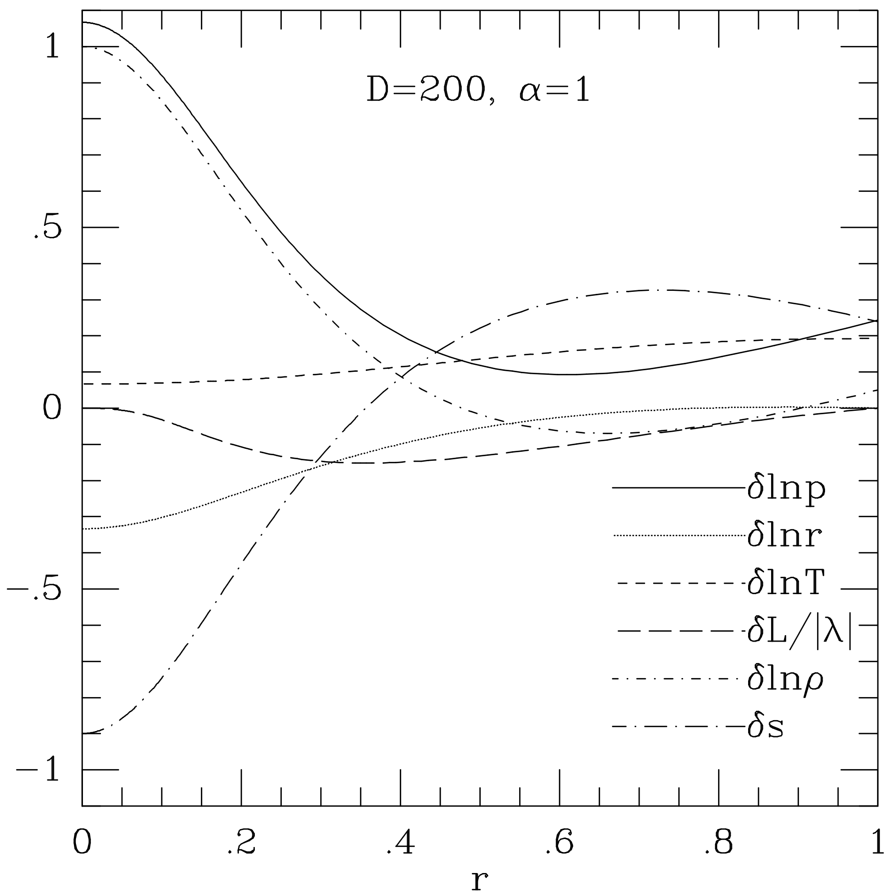
要するに、普通の断熱容器のなかのガス。

安定な場合 (2), $D = 10$



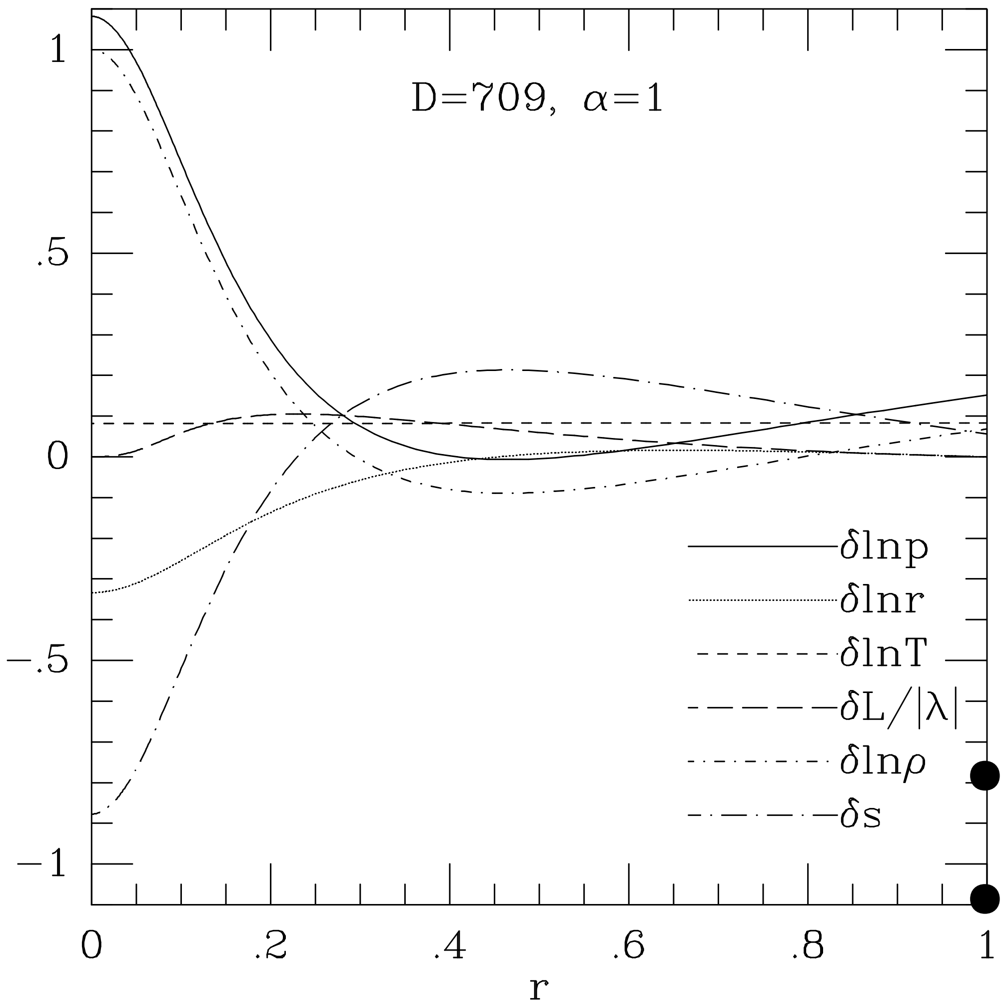
- 中心で圧力が上がる
- 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

安定な場合 (3), $D = 100$



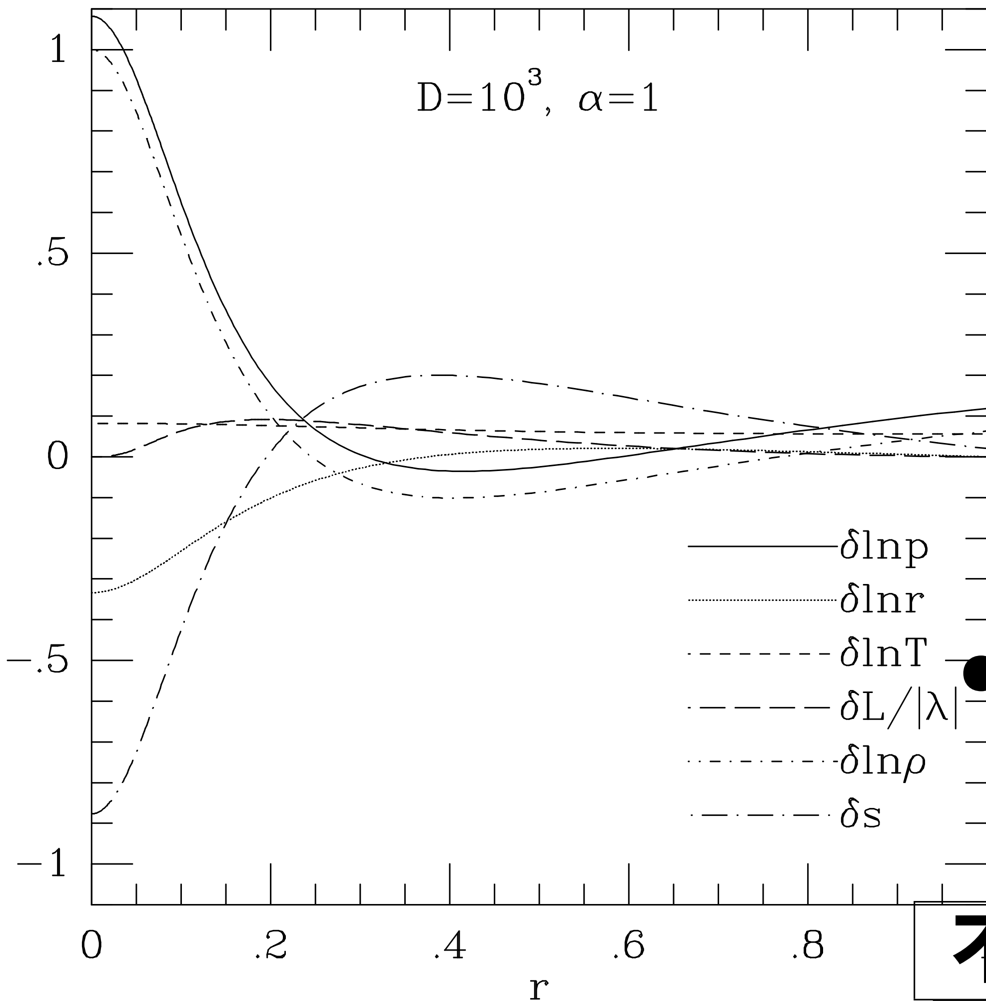
- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き（この場合中心の方が低温）
- 熱力学的には安定

中立安定, $D = 709$



- 温度勾配ができない
- したがって、摂動がもとに戻らない

不安定, $D = 1000$



- 中心のほうが温度上昇が大きい

不安定になっている

重力熱力学的不安定性

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

一応、「重力熱力学的不安定性」 gravothermal instavility という名前がついている。

発見： V. Antnov (1961)

上のような安定性の明確な定式化: Hachisu & Sugimoto (1978)

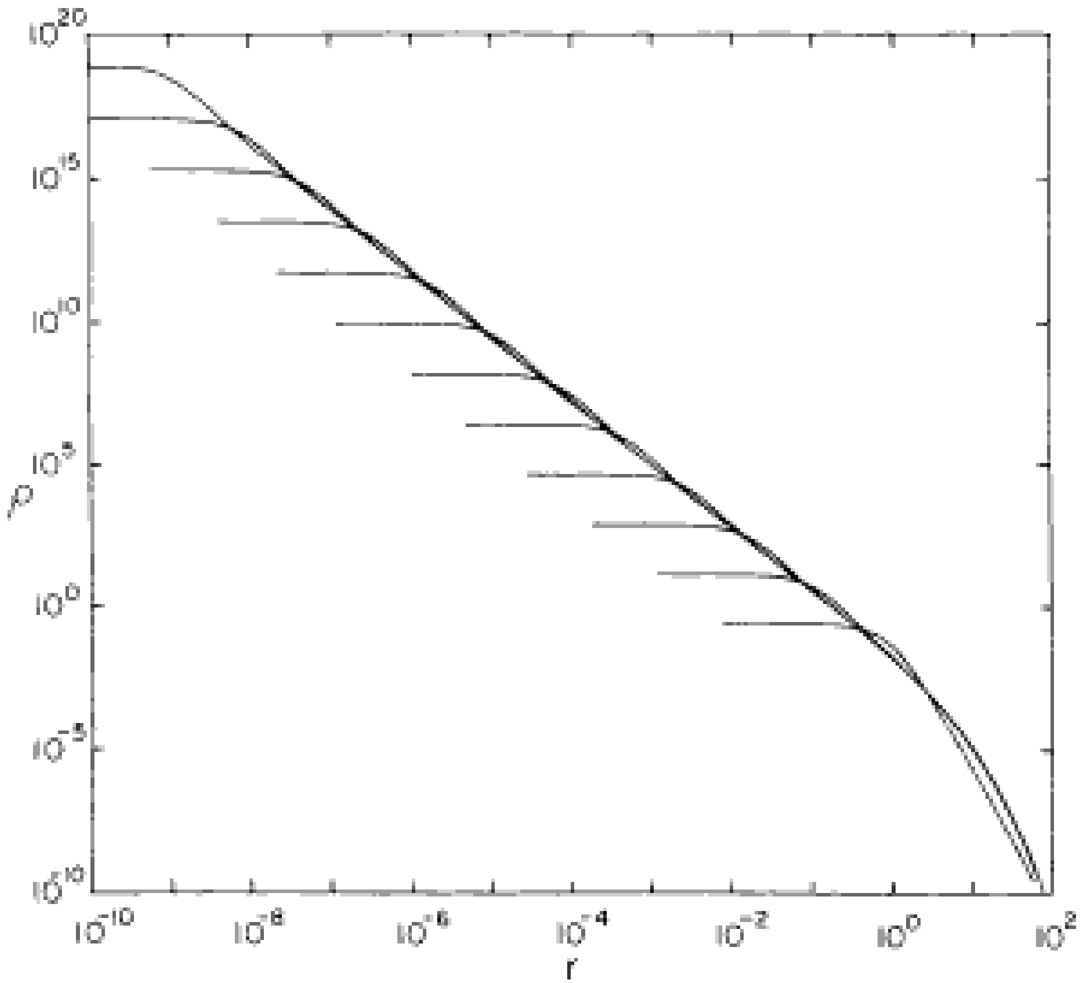
もっと先の進化

摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

Hachisu *et al.* (1978)：**自己重力流体について数値計算した。**

Cohn (1980): **流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。**

自己相似解



10^{20}
10^{15}
10^{10}
10^{5}
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
ρ
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
r

最終状態？

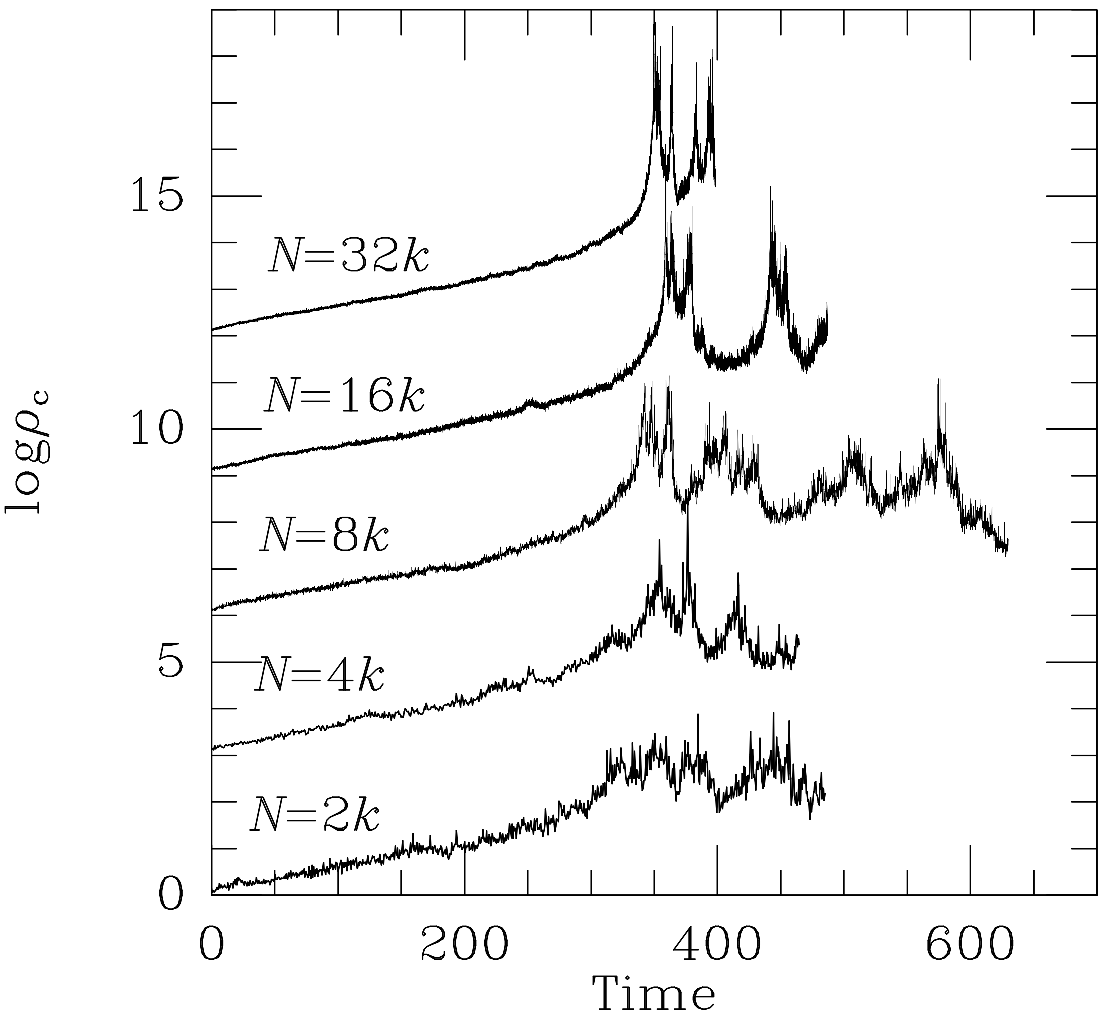
中心部の密度が非常に上がってくると､､

- 星同士の近接遭遇
- 3 星が同時に近付く

連星ができる。これは「エネルギー放出反応」（核融合と同じ）

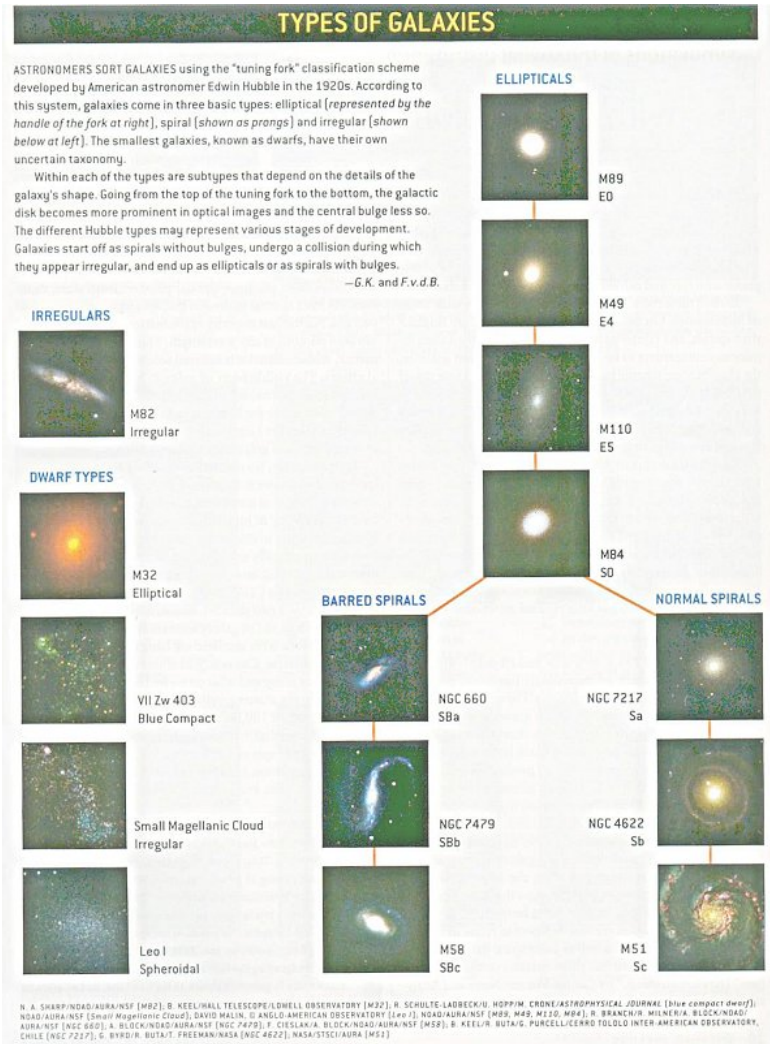
これにより、今度は中心部が膨張を始めると理論的には予測されている（重力熱力学的振動）

重力熱力学的振動



球状星団の中心部ではこのようなことが起こっている可能性が高い。

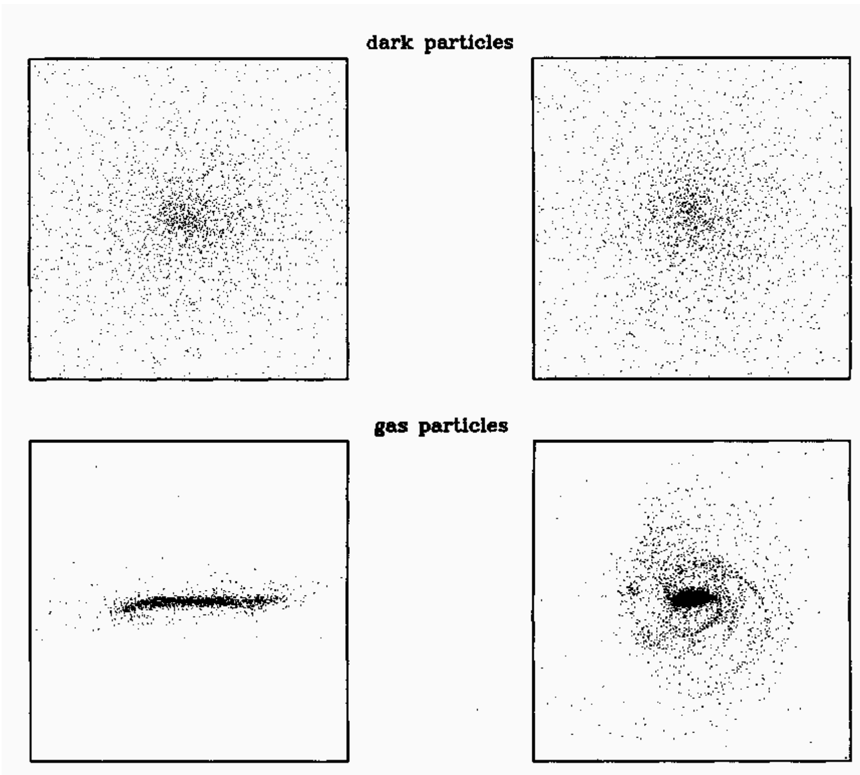
銀河形成シミュレーション



基本的な考え方:

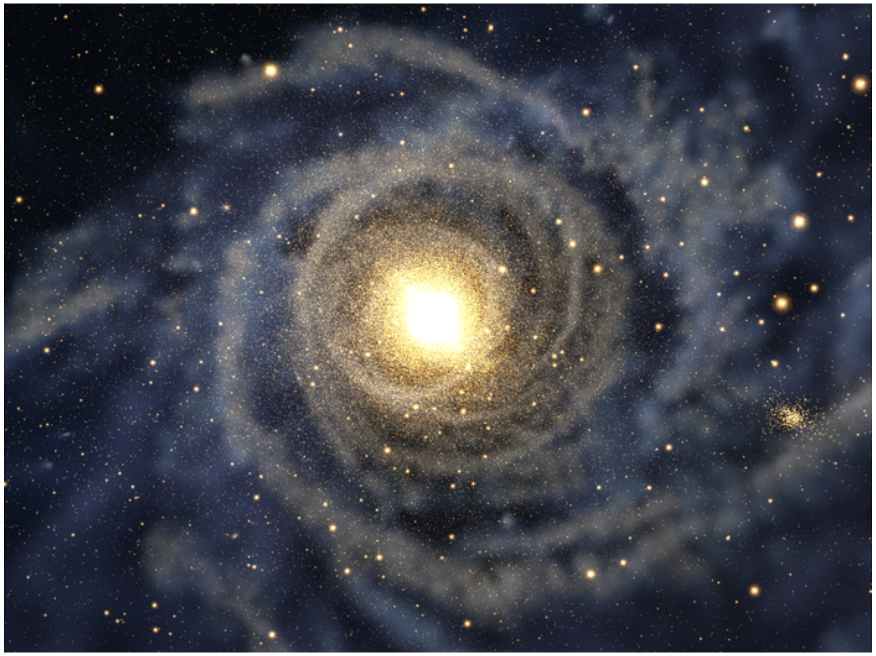
- 初期条件からの、銀河の「まるごと」シミュレーション
- 銀河の多様性の起源を理解したい

Katz and Gunn 1992



- ダークマター+ガス+星
- 1 万粒子くらい、 Cray YMP で1000時間くらいの計算
- 1 粒子の質量: 1000万 太陽質量くらい

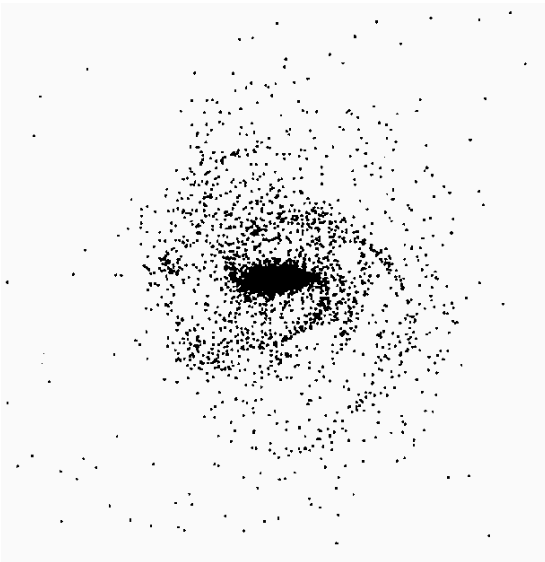
Saitoh et al. 2005

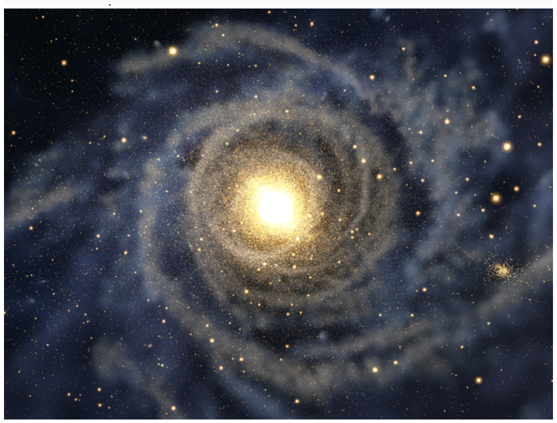


animation

- ダークマター+ガス+星
- 200万粒子、GRAPE-5 で1年(!)くらいの計算
- 1粒子の質量: 1万 太陽質量くらい

分解能を上げるといいことがあるか？





- そうでもない？
- 大事なこと:物理過程のより適切な扱い
  - 星形成
  - 超新星爆発からのエネルギーインプット

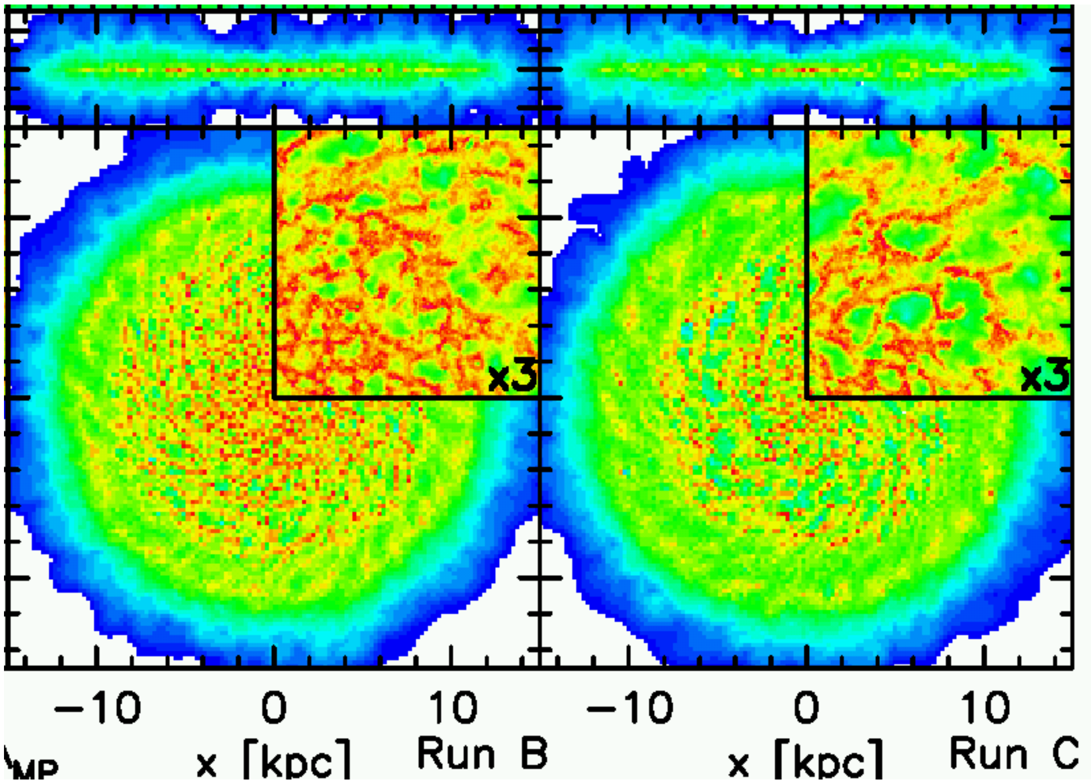
星形成過程のモデル

- 本当に星 1 つを作るシミュレーション:分解能が太陽質量より 4-5 桁高い必要あり
- 現在できる限界: 粒子の質量が太陽の 1000 倍。8 桁くらい足りない
- 星ができる過程のモデルが必要
  - ガスが十分に低温・高密度になったら、星に変わる、とする
  - いくつかフリーパラメータがある
  - できる銀河の構造がパラメータのとりかたによってしまう、、、、
- 超新星の扱いにも同様な問題

どれくらいの分解能でどうすればいいか？

- 答があうようになったらわかる？
- ガス粒子が星形成領域や分子雲より大きいようでは多分駄目
- 理論的には、十分な分解能があれば単純にガスを星に変えるだけでよくなるはず。
- そこに近付いている？
- あと 1-2 桁？

Saitoh et al. 2007



星形成のタイムスケールを 15 倍くらい変えてみた

あんまり大きくは結果が変わらなかった

分解能が低い計算では、星形成のタイムスケールを 15 倍小さくしたら銀河が爆発してしまう。

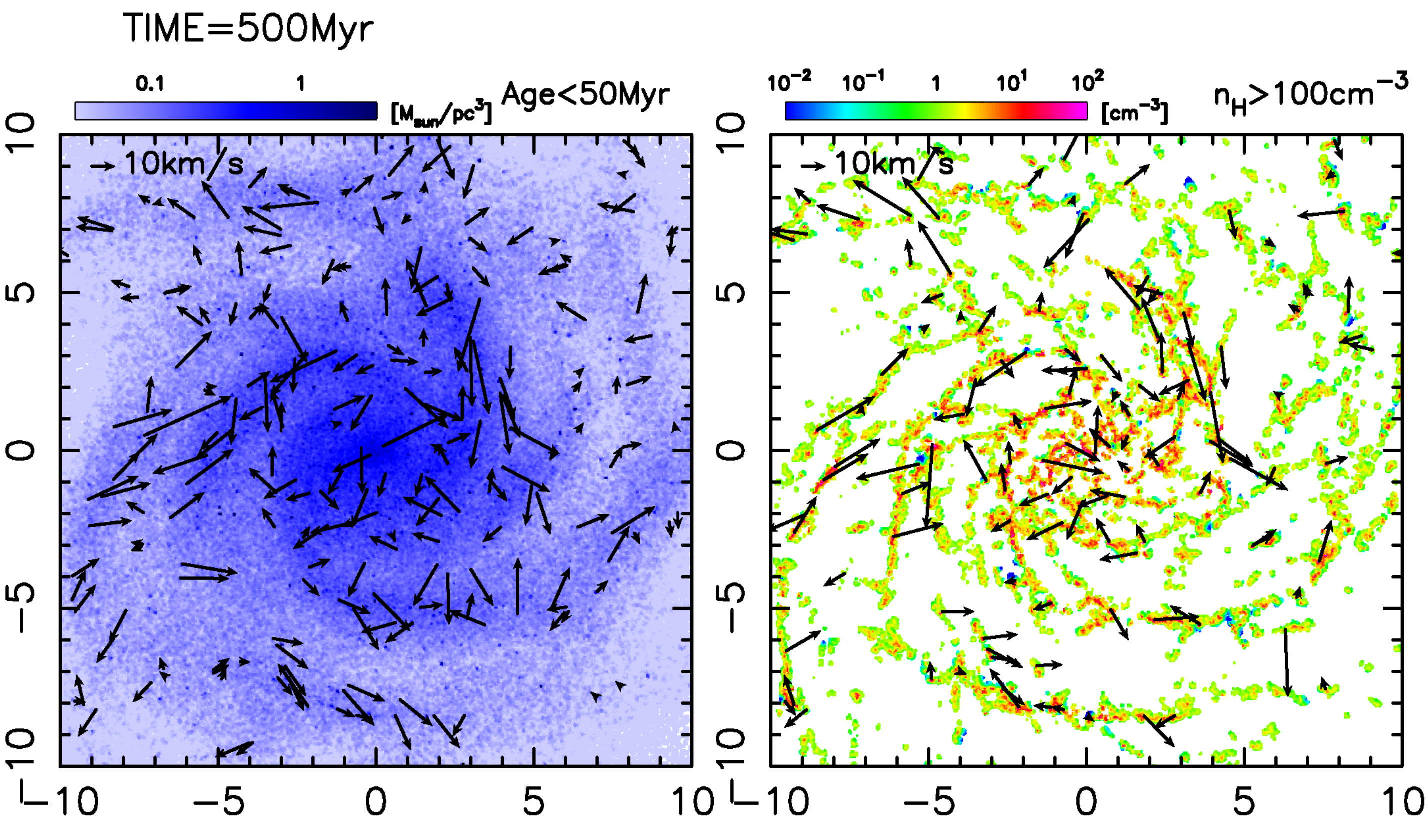
アニメーション

Star formation with SPH

Large scale structure formation with AMR

銀河円盤

渦巻構造と、円運動からのずれ animation (Baba et al 2009) 1 2



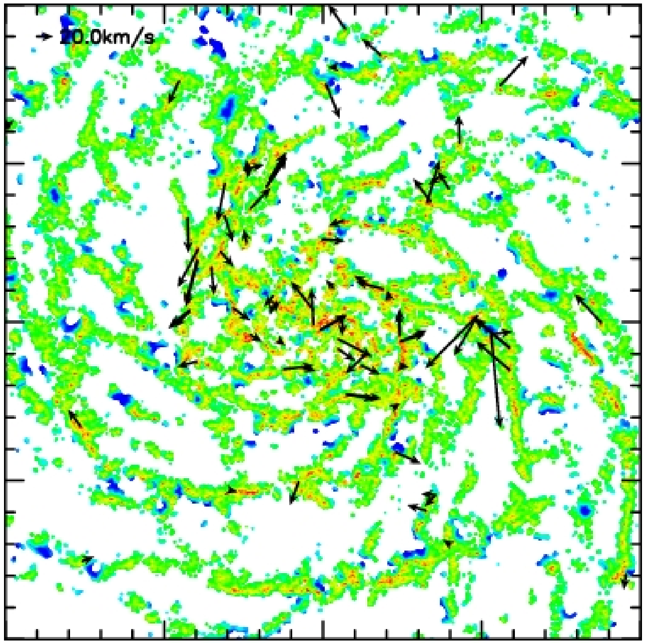
星の分布 **冷たいガスの分布**

シミュレーションの詳細

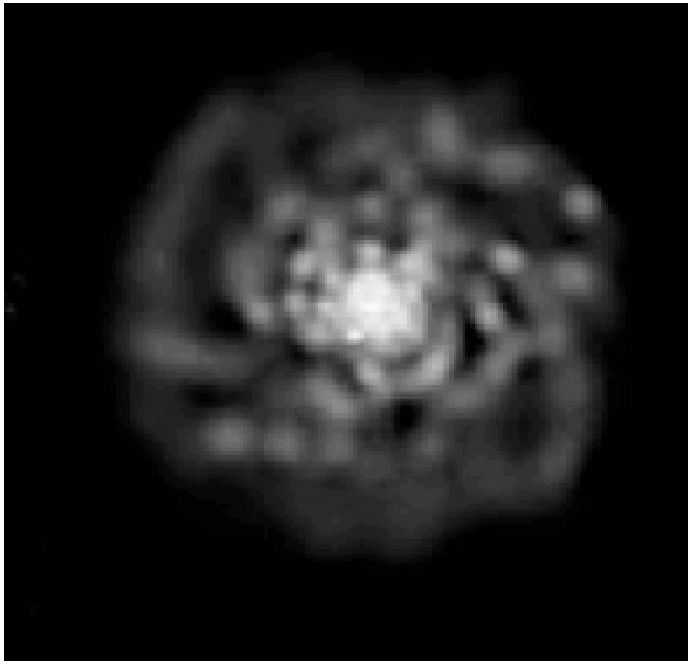
- ガスが低温・高密度になるところまで解く
- 多数の SPH 粒子で高分解能シミュレーション
- 計算機には国立天文台の Cray XT4、斎藤貴之さん開発の ASURA コード

- 10pc ソフトニング ($\leftarrow$ 500pc)
- ガスは温度10K まで解く ($\leftarrow 10^4$K)
- 粒子質量 $3000 M_\odot$ ($\leftarrow 10^5 M_\odot$)

高分解能モデルと観測



低分解能モデルと観測



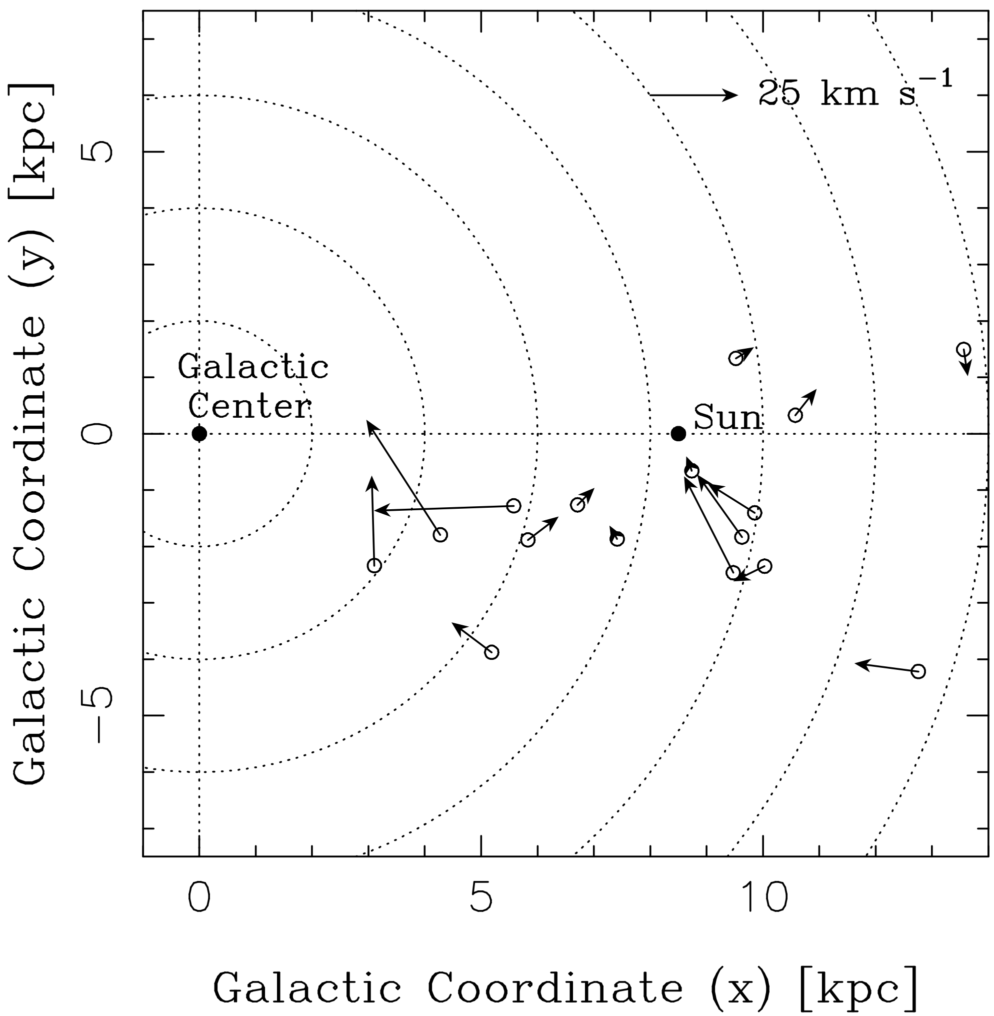
高分解能シミュレーションでわかってきたこと

- 星形成は大きなスケールの渦巻構造と関係
- 観測で見える複数アームがある渦巻は、定常ではなく形成・消滅を繰り返している
- この結果は、星形成のモデルの詳細にほとんど依然しない

電波干渉計による観測

- **2006: Xu et al, Science 311, 54**
- **Nov 2008: Burst of results from VLBA**
- **Several data from VERA**

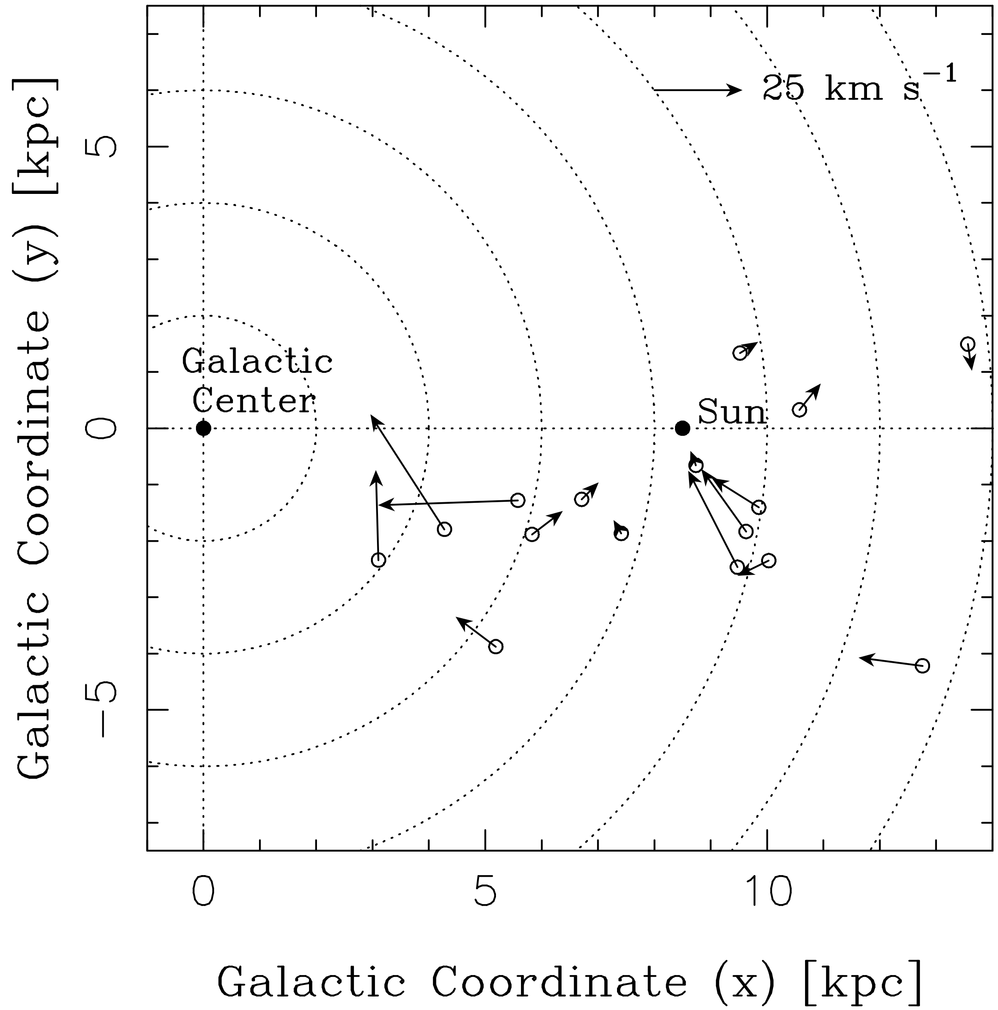
(Compiled by Dr. Asaki)



電波干渉計による観測

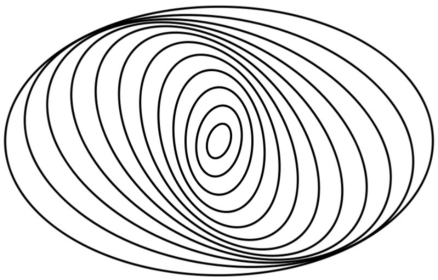
- 円運動からの大きなずれ (~ 30km/s)
- 空間相関もあり？

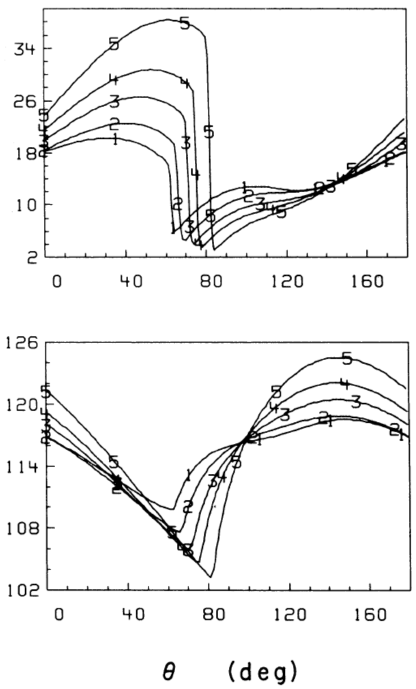
このような大きな運動の起源は？



教科書に書いてあること

定常密度波



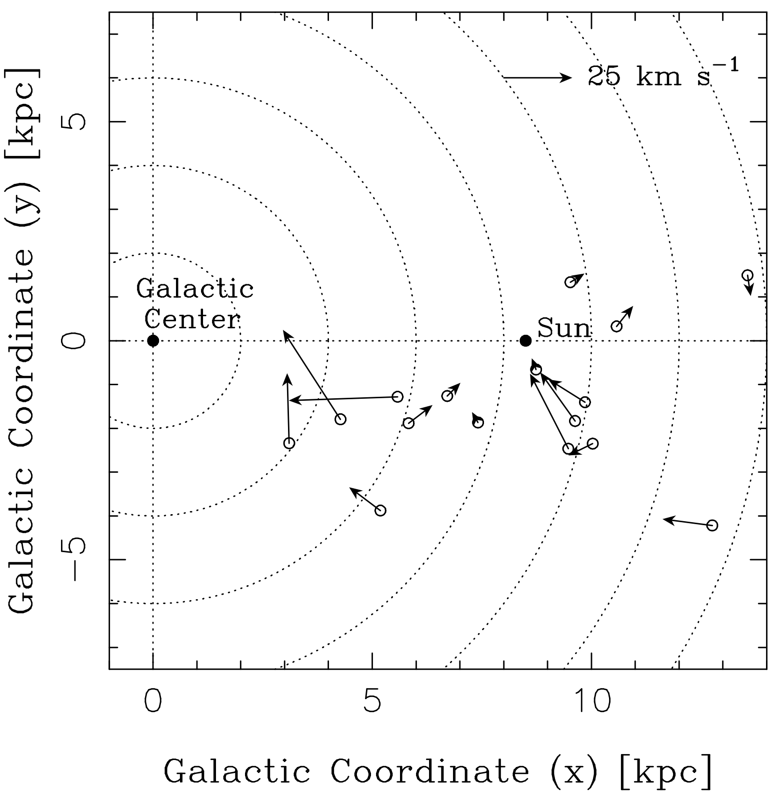


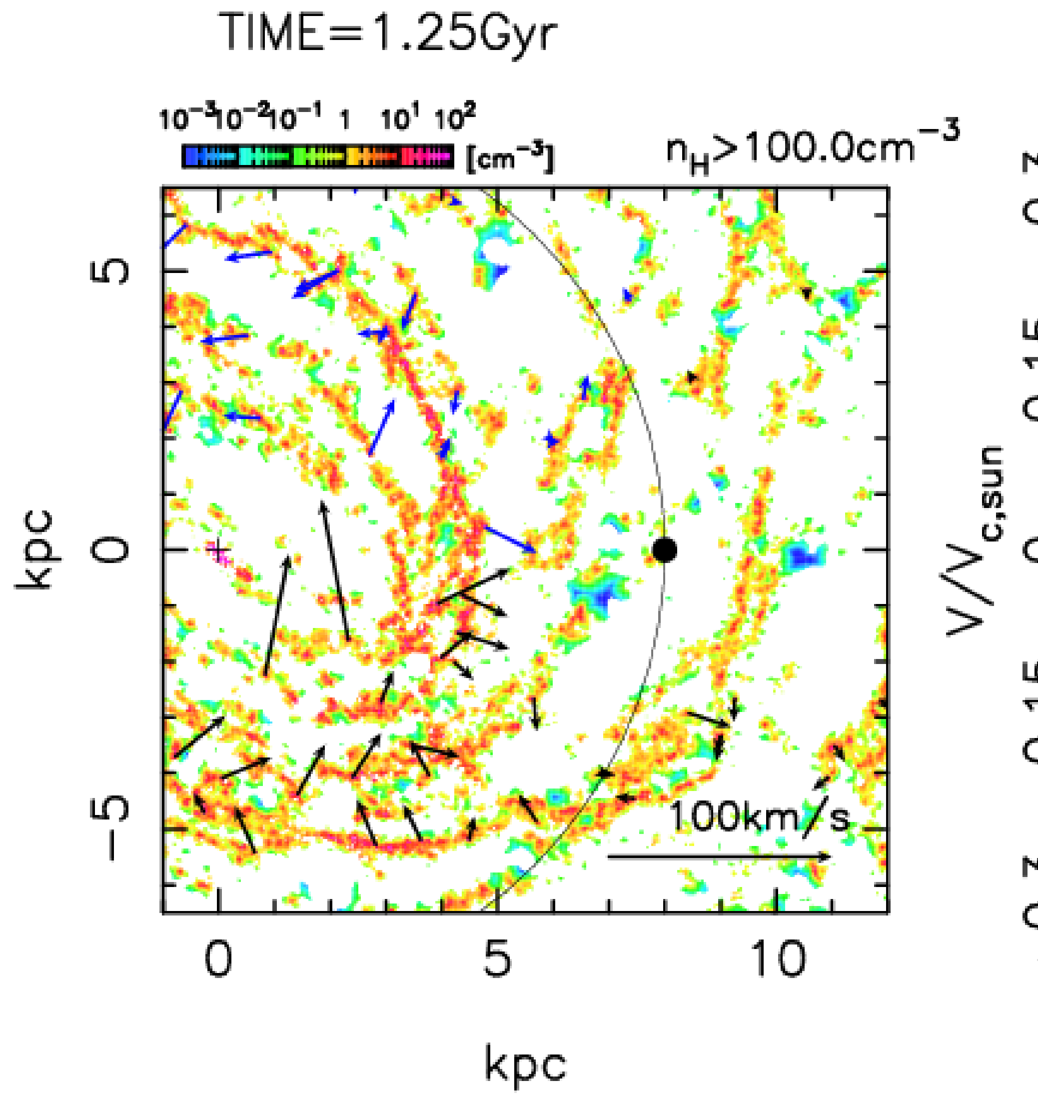
- 渦巻構造は実体ではなく、密度波
- ガスは、渦巻が作るポテンシャルの底を通る時に圧縮されて、そこで星を作る
- 星やガスの円運動からのずれはごく小さい

観測ともシミュレーション結果とも全然あってない、、、

比較

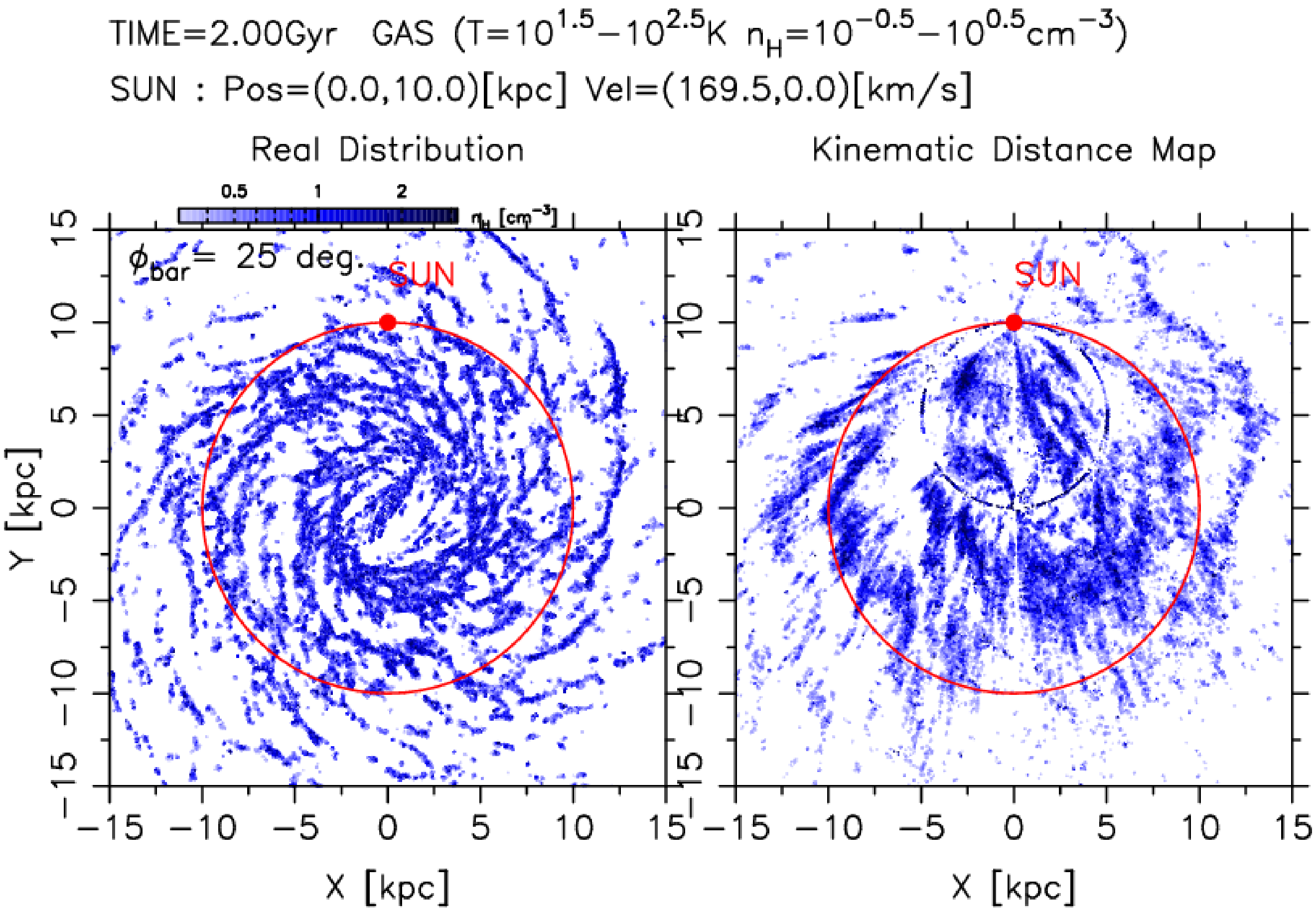
観測とシミュレーション





似ているような気が？

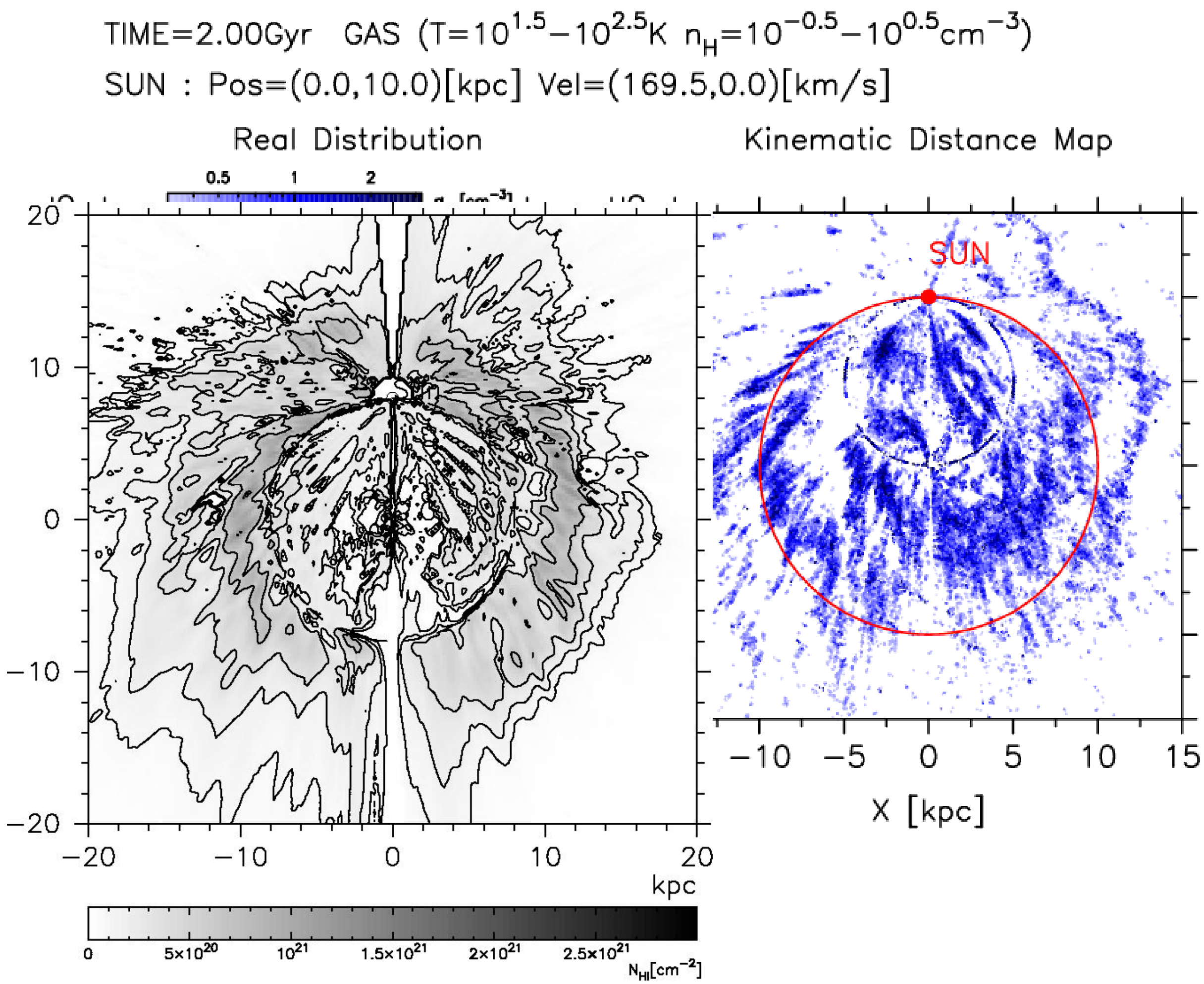
運動学的距離



「円運動をしている」と仮定すると、速度の観測から距離が求まる

シミュレーション結果を観測すると、、、、、

運動学的距離

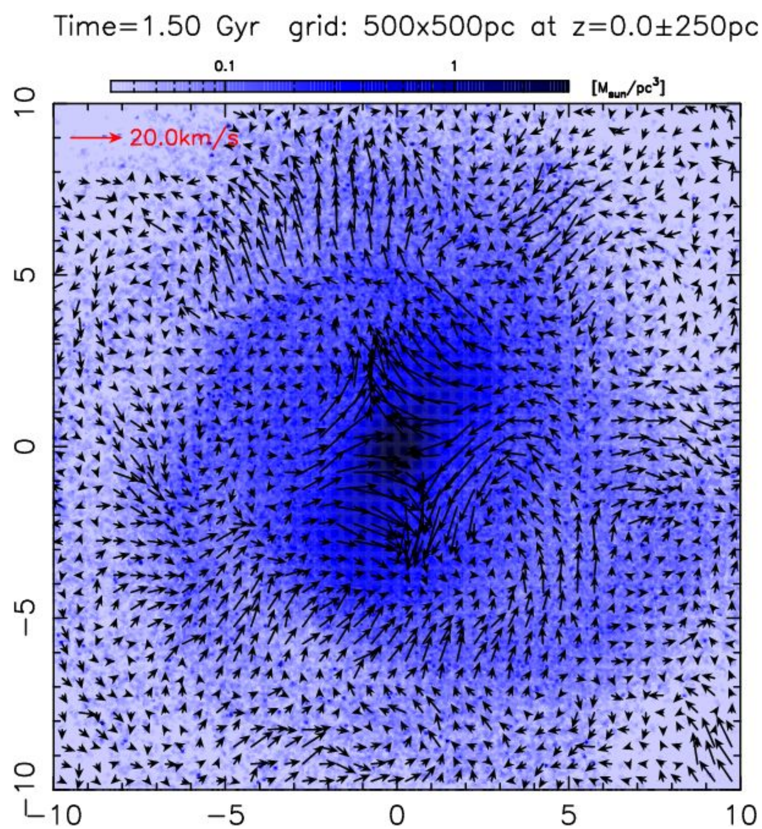


観測 (左) とシミュレーション (右) を比較すると、同じような構造

星のスパイラルの運動

星の運動の円運動からのずれ

- スパイラルアームは実体、密度波ではない
  - 古い星の平均の円運動からのずれも結構大きい
  - キロパーセクスケールの構造がある



ガス＋星の銀河円盤シミュレーションのまとめ

- 高分解能計算ではスパイラルアームは自然にできる
- アームは定常ではなく、常に生成消滅している
- シミュレーション結果を「観測」すると、我々の銀河系の観測の色々な特徴を再現できる

星だけの円盤

(Fujii et al. 2010)

animation a1

animation a2

animation b1

- Stable against radial mode (a1, a2)
- Spiral arms form
- They seem to be maintained for very long time

計算機の話

このような研究：

- できるだけ沢山の粒子を使って
- できるだけ長い時間
- できるだけ正確に

計算するのが大事。というわけで、

- 速く、正確に計算できるような方法を考える
- 新しい、速い計算機に合わせた方法を考える
- それでも足りなければ計算機を作る

速い計算機を使う

計算法の話は少ししたので、これははしょって後の2 つ。

速い計算機とはどんなものか？

普通のパソコンと スーパーコンピューター

なにが違うか？

昔は随分違った。

昔の「速い計算機」

30 年前

- パソコンはなかった。
- 同じプログラムでも高い計算機のほうが速かった

20 年前

- パソコンはあったけど、同じプログラムで高い計算機の 1000 倍とかそれ以上時間が掛かった（値段もそれくらいではあった）
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」というものに変わってきて、特別な工夫をしてプログラムをかかないと性能がでなくなった。

今の「速い計算機」

10年前

- パソコンが非常に速くなってきた
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」がさらに沢山並んだ並列計算機になってきた。

今

- パソコンはもっと速くなった。
- ベクトルプロセッサを並列に使うより、パソコンを並列に使う方がずっと安くて速くなってきた。

例：

「京」スーパーコンピュータ 128Gflops × 8万台

値段は1000億円＝1台120万円

普通のパソコン 1 台 100 Gflops 10 万円

値段あたりの性能を計算してみると、、、

プログラムにはいろいろ難しいことを考えないといけない。

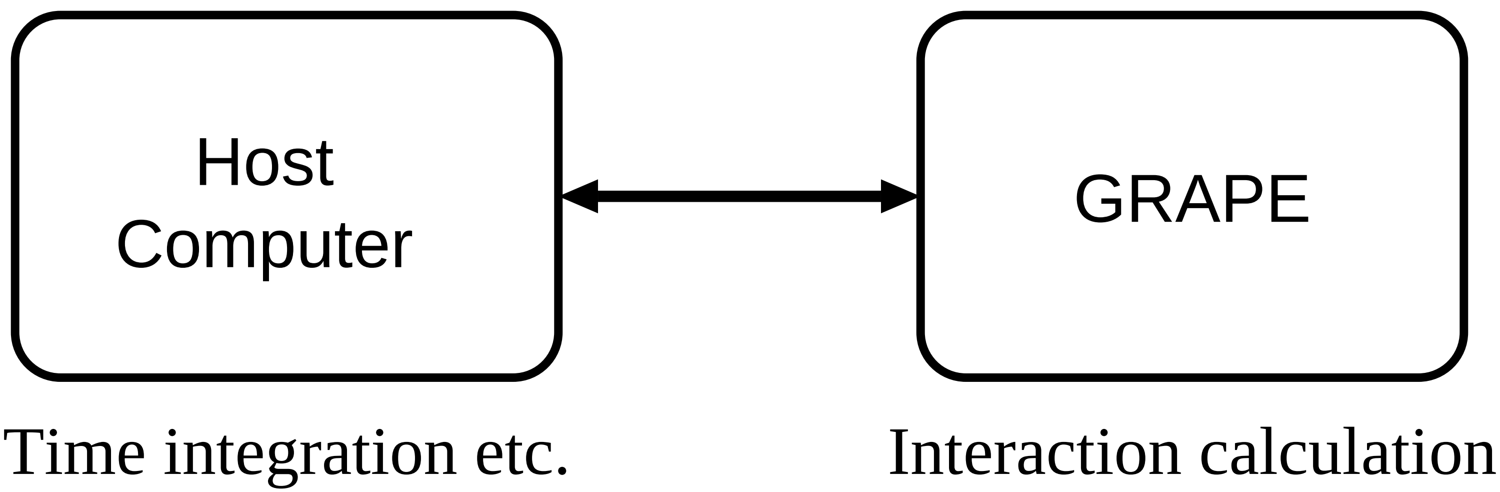
- 計算機どうしが通信すると時間が掛かる。
- もっと細かい話いろいろ。

計算機を作る？

- 計算機のなにもかもを全部作るのは大変
- 計算時間のほとんどは粒子間の重力の計算（計算法によってはちょっと違うけど、、、）

重力の計算だけ速くする計算機を考える
(GRAVITY PIPE, GRAPE)

GRAPE の基本的考え



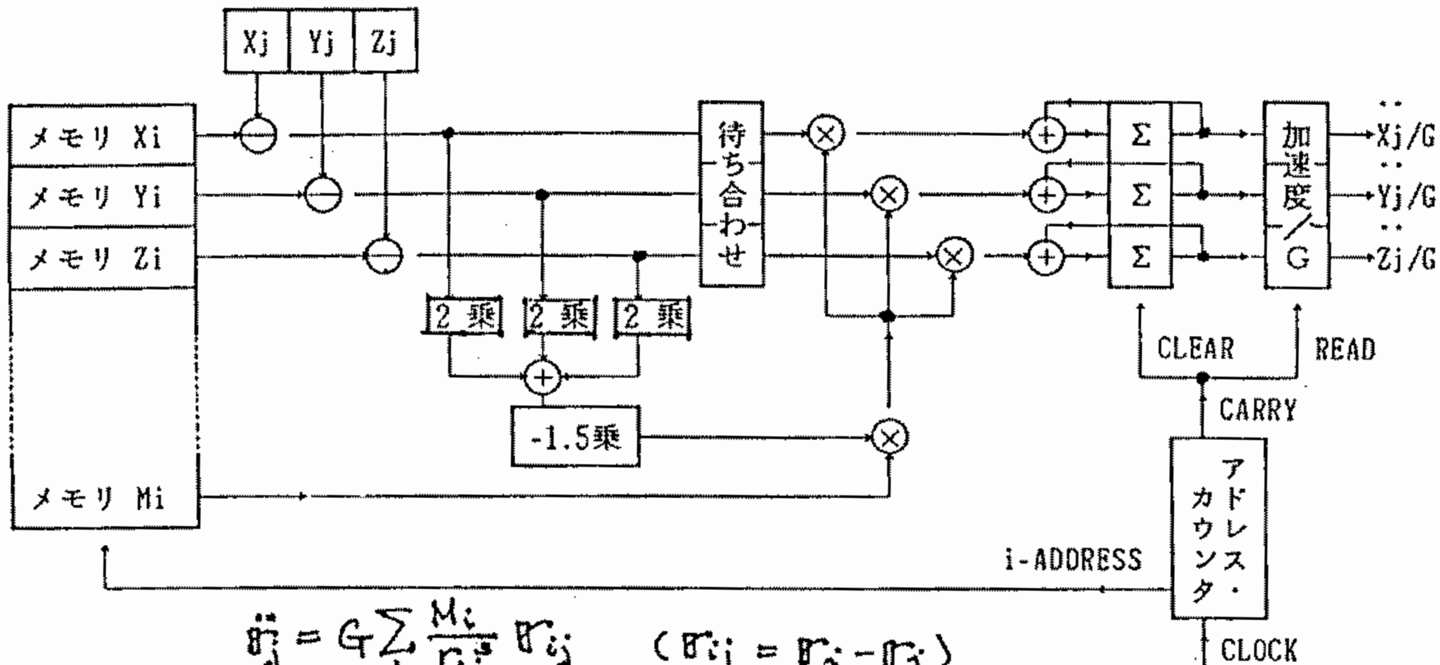
専用ハード: 相互作用の計算
汎用ホスト: 他のすべての計算

専用ハードウェア

- 相互作用計算のための専用パイプラインプロセッサ
  - 多数の演算器を集積可能
  - すべての演算器が常時並列動作

  $\rightarrow$ 非常に高い性能
- すべてハードウェア $\rightarrow$ ソフトウェア不要

GRAPE パイプライン



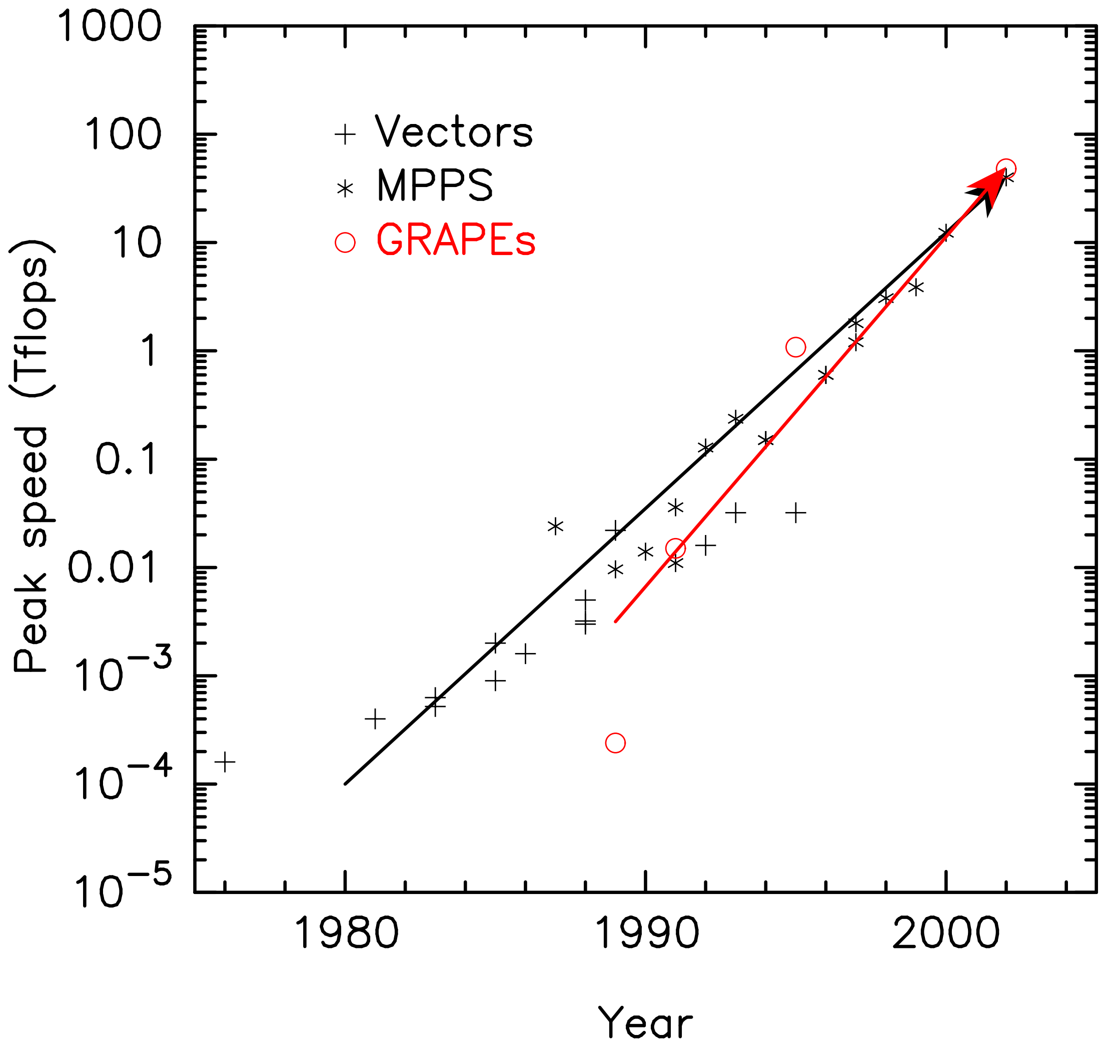
$$\ddot{\mathbf{r}}_j = G\sum_i \frac{M_i}{r_{ij}^3}\mathbf{r}_{ij} \qquad (\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

+，−，×，2乗は1operation，-1.5乗は多項式近似でやるとして10operation 位に相当する．
総計24operation．
各operation の後にはレジスタがあって，全体がpipelineになっているものとする．
「待ち合わせ」は2乗してMと掛け算する間の時間ズレを補正するためのFIFO(First-In First-Out memory)．
「Σ」は足し込み用のレジスタ．N回足した後結果を右のレジスタに転送する．

図2．N体問題のj-体に働く重力加速度を計算する回路の概念図．

（近田 1988）

計算速度の発展



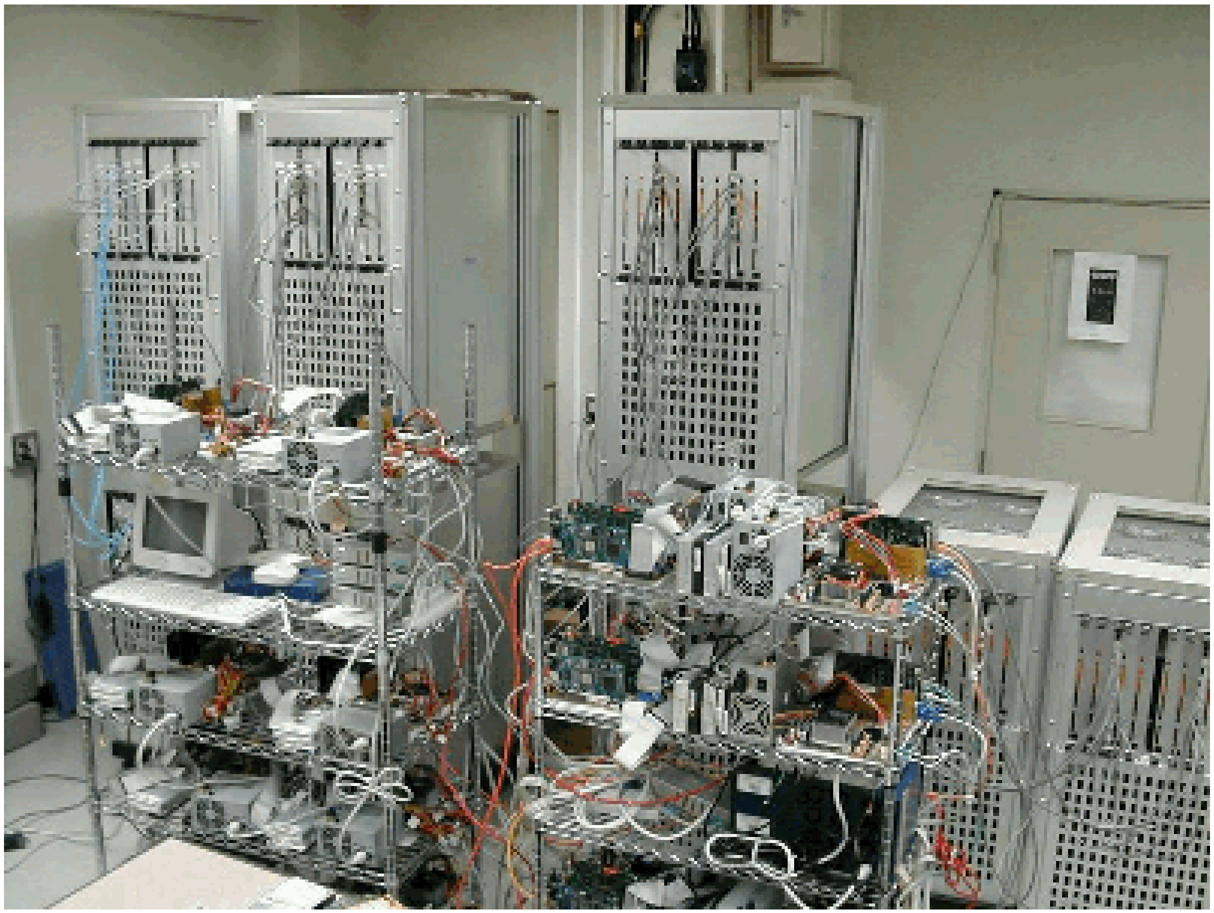
1000
100
10
1
0.1
0.01
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
Peak speed (Tflops)
1980
1990
2000
Year
Vectors
MPPS
GRAPEs

GRAPE-4

1995年完成、当時世界最高速

GRAPE-6

2002年完成、当時世界最高速



GRAPE の成果

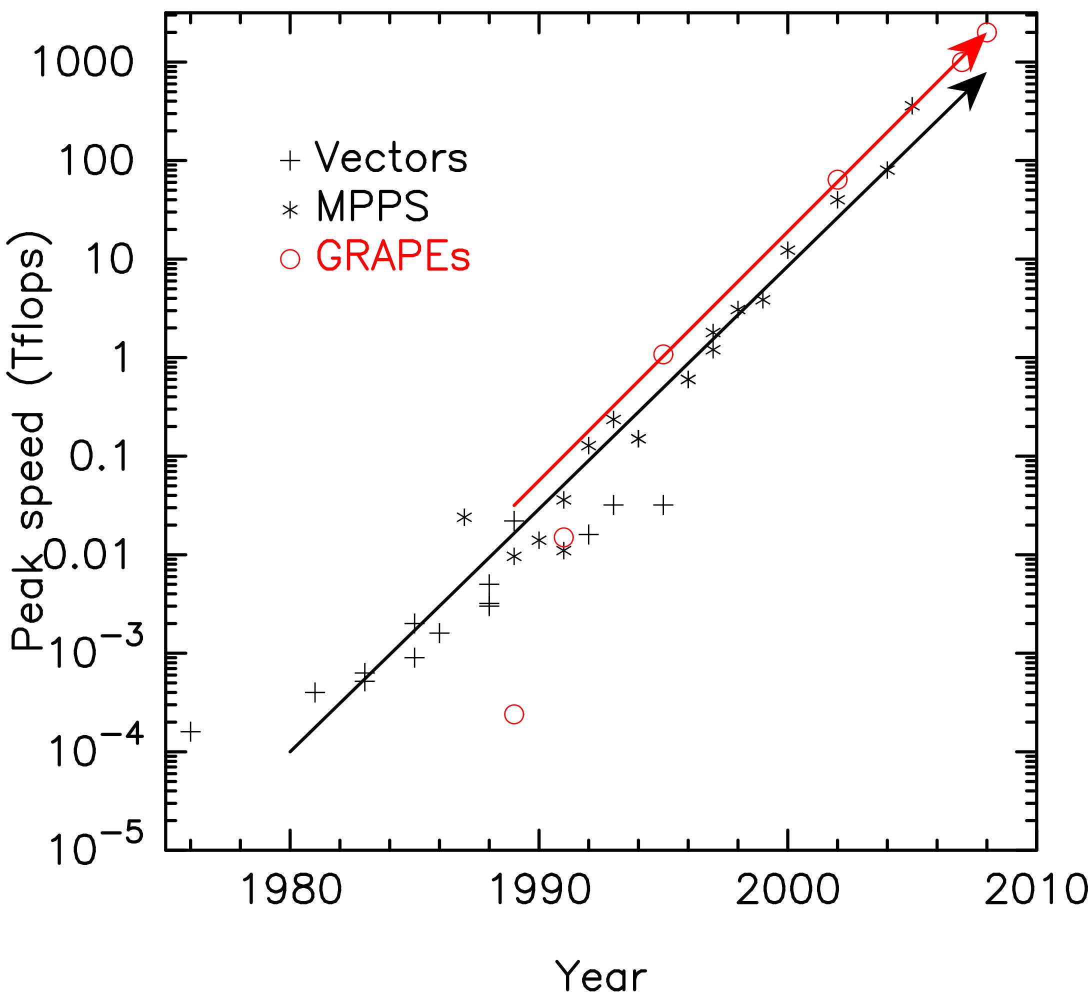
この講義で紹介したいろいろな計算結果の結構な部分。

> 本当に新しい研究をするには、人より良い道具を持たないといけない

道具＝ 望遠鏡、人工衛星、計算機、、、（頭）

- 沢山お金を払って良い道具を買ってくる
  - お金を出しても売ってない、、、
- 頭を使って良い道具を作る

GRAPE の性能



GRAPE: 重力相互作用だけ計算する専用計算機。

大変効率は良い。汎用機の 1/100 のコスト。

続ければよいか？

「GRAPE-6 後継」の実際的な問題

天文だけ (しかも理論だけ (しかも軌道計算だけ)) のの機械としては開発にお金がかかりすぎる

プロセッサ回路開発費

1990	1μm	1500 万円
1997	0.25μm	1 億円
2004	90nm	3 億円以上
2010	45nm	10 億円以上

普通の計算機より速いとはいえ、そもそも高すぎる、、、、

ではどうするか？

GRAPE-DR でのアプローチ

- 若干妥協して、ある程度色々できるようにする
- で、大きな予算を獲得する

計算設計としてのアプローチ:

小さくて単純だが、色々できるプロセッサをなるべく沢山詰め込む

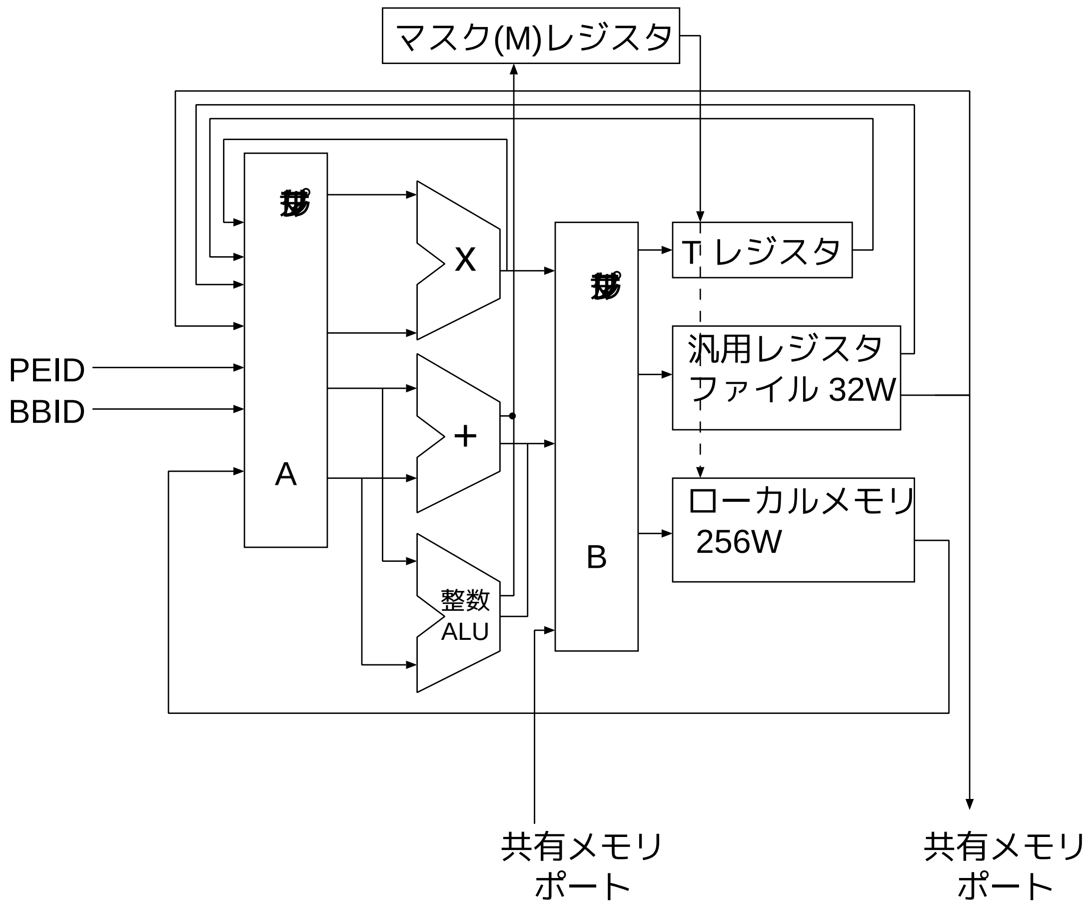
基本的な計算モデル

$$R_i = \sum_j f(x_i, y_j)$$

を並列に評価。

- 2 重ループ、一方について積算。
- y_j がなければ単純な並列計算。
- 行列乗算もできるように作る。

GRAPE-DR プロセッサの構造

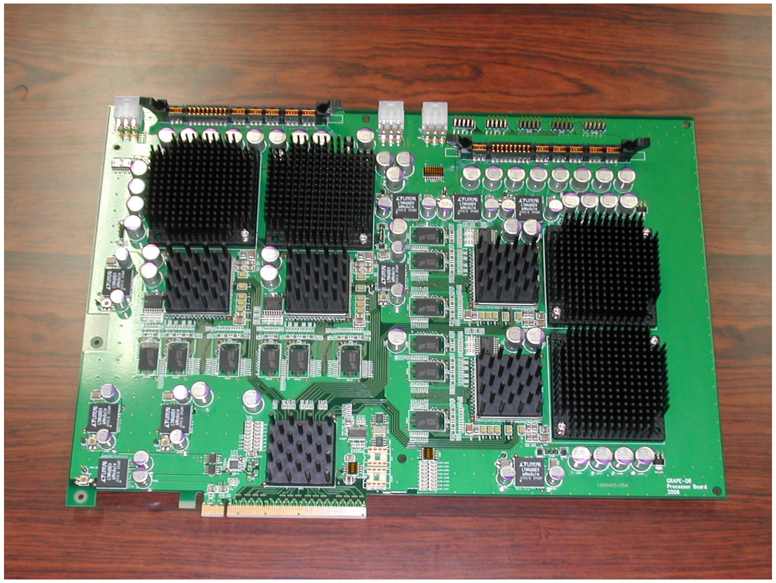


- 浮動小数点演算器
- 整数演算器
- レジスタ
- メモリ 256 語 (K とか M ではない。)
- これを 512 個 1 チップに入れる

プロセッサチップ

チップ写真

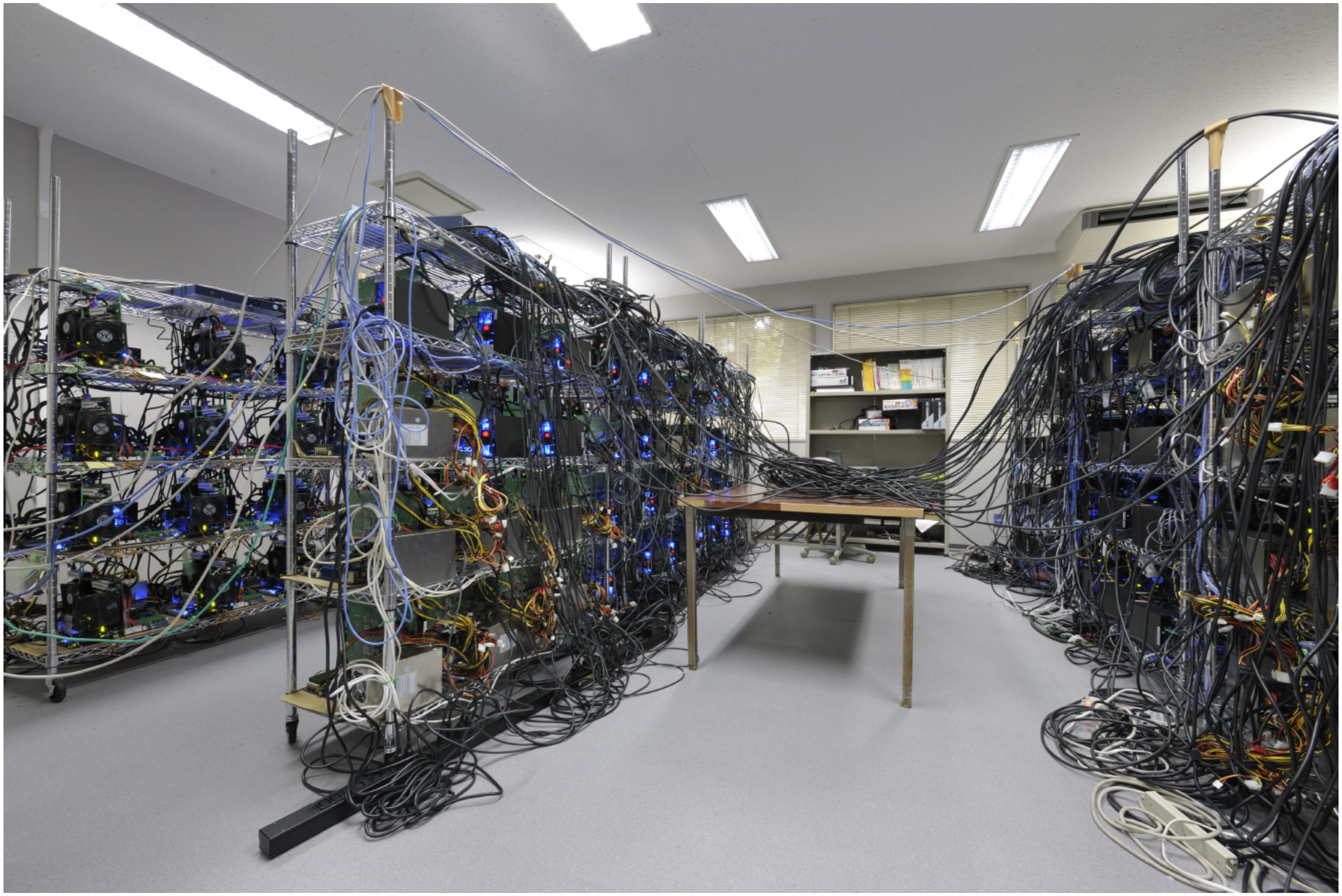
プロセッサボード



普通のパソコンにつく PCIe ボード

- 200-250W
- 400-433MHz クロック
- 820-887 Gflops
- 普通のパソコンの 20 倍程度の性能

GRAPE-DR クラスタシステム

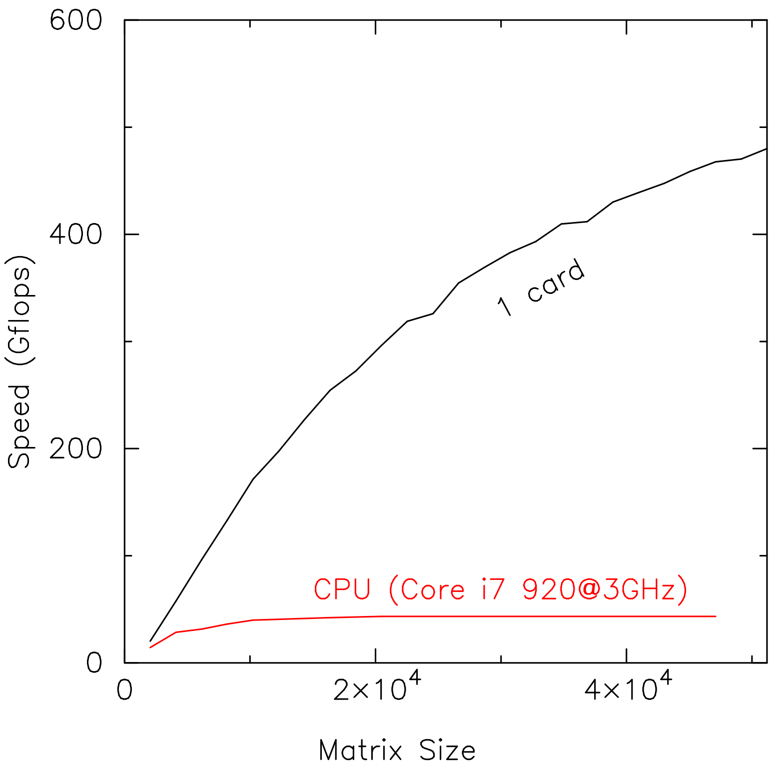


GRAPE-DR クラスタシステム

前のスライドの写真とった時の構成:

- 128-ノード, 128-ボード (105Tflops peak)
- ホスト計算機: Intel Core i7+X58 12-24 GB メモリ
- ネットワーク: x4 DDR インフィニバンド

LU 分解の性能



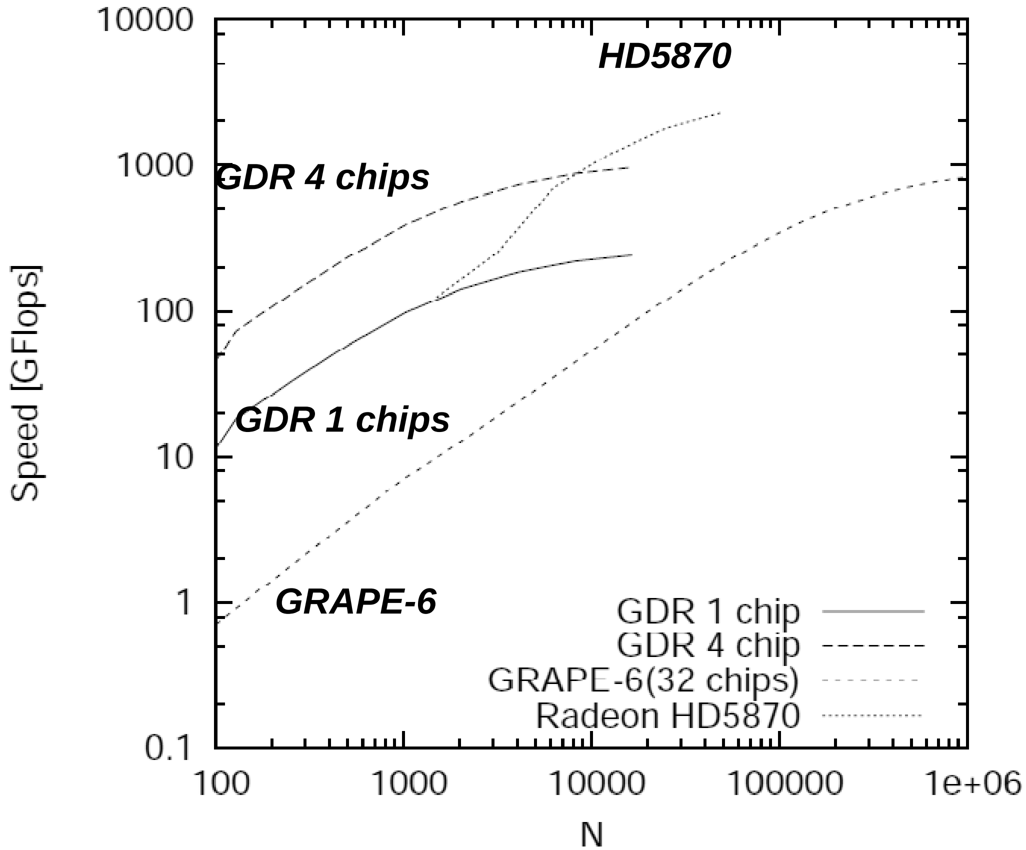
行列サイズの関数としての速度

行列がメモリ一杯のところで 430Gflops(1 カード)、及び 670Gflops(2 カード)

カード 1 枚でホスト CPU の 11 倍

(天河 1A: ホスト CPU の 2 倍ちょっと)

重力計算性能



Performance for small N much better than GPU

(for treecode, the multiwalk method greatly improves GPU performance, though)

Little Green 500, June 2010

Green500 Rank	MFLOPS/W	Site*	Computer*	Total Power (kW)
1	815.43	National Astronomical Observatory of Japan	GRAPE-DR accelerator Cluster, Infiniband	28.67
2	773.38	Forschungszentrum Juelich (FZJ)	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
2	773.38	Universitaet Regensburg	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
2	773.38	Universitaet Wuppertal	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
5	536.24	Interdisciplinary Centre for Mathematical and Computational Modelling, University of Warsaw	BladeCenter QS22 Cluster, PowerXCell 8i 4.0 Ghz, Infiniband	34.63

電力当りの性能で、世界一を達成

#2: IBM PowerXCell, #9: NVIDIA Fermi

他の計算機に比べてどうか？

プロセッサだけで、電力当り性能でみてみると

プロセッサ	設計ルール(nm)	電力当り性能(GF/W)
GRAPE-DR	90	4.1
GRAPE-6	250	3.24
Tesla C2050	40	2
Xeon 5680	32	0.6
「京」	45	2

- GRAPE-DR は良いことは良いが、10 年前の GRAPE-6 と大差ない
- GRAPE-6 同様の専用回路なら 10 倍くらいよくできた

今後の方向

- 電力の問題は深刻:「京」は 30 メガワット
- GRAPE-DR のような方向は、汎用プロセッサを使うよりはずっといい
- でも、本当に効率がいいのはやはり完全に専用回路化すること
  - FPGA
  - 構造化 ASIC

まとめ

- 天文学研究では「計算」はとても大事
- 専用計算機を作ると、同じコストで計算機を買ってくるのではできないことができる
- とはいえ、時代が変わると作り方も変える必要があるのかも、、、

おまけ — 2 位じゃだめなんですか？

解説的な何か:

- 「京」のプロセッサ等の開発は 2009 年春でおわっていて、問題になっていたのは完成をちょっと早くするために 100 億円追加要求していた分。
- 半年は計算機の性能としては 30% にあたる、という考え方からは、300 億追加しても半年速くできるなら意義あり。
- とはいえ、元々 1100 億はちょっと高すぎるのでは、という話も。